JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES.

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

Membre de l'Institut, professeur d'Analyse à l'École Polytechnique.

TOME VIII. — ANNÉE 1843.

PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1843

TABLE DES MATIÈRES.

TOME VIII.

Pages

Note sur quelques formules de calcul intégral; par M. *Alfred Serret*........ 1

Nouveau système de fontaines intermittentes sous-marines. Théorie et modèle fonctionnant; par M. *Anatole de Caligny*; suivi d'une Note de M. *Combes*. 23

Sur quelques propriétés des centres de gravité; par M. *E. Brassine*........ 46

Théorèmes nouveaux sur l'équation indéterminée $x^5+y^5=az^5$; par M. *Lebesgue*. 49

Note sur le mouvement d'une chaîne pesante infiniment mince sur la cycloïde; par M. *Puiseux*........ 71

Note sur la convergence et la divergence des séries; par M. *Ossian Bonnet*...... 73

Détermination de l'intégrale définie $\int_0^1 \frac{l(1+x)dx}{1+x^2}$; par M. *J. Bertrand*....... 110

Mémoire sur un phénomène relatif à la communication des mouvements vibratoires; par M. *Duhamel*........ 113

Sur les trajectoires qui coupent sous un angle donné les tangentes à une courbe à double courbure; par M. *H. Molins*........ 132

Note sur les fonctions elliptiques de première espèce; par M. *Alfred Serret*.... 145

Remarques sur la théorie des maxima et minima de fonctions à plusieurs variables; par M. *J. Bertrand*........ 155

Mémoire sur une nouvelle méthode de génération et de discussion des surfaces du deuxième ordre; par M. *B. Amiot*........ 161

Démonstration d'un théorème de géométrie; par M. *J. Bertrand*.............. 209

Théorèmes sur les surfaces du second degré; par M. *Chasles*........ 215

Du développement des fonctions trigonométriques en produits de facteurs binômes; par M. *Olinde Rodrigues*........ 217

Note sur l'évaluation des arcs de cercle, en fonction linéaire des sinus ou des tangentes de fractions de ces arcs, décroissant en progression géométrique; par M. *Olinde Rodrigues*........ 225

Note sur une classe d'intégrales définies multiples; par M. *Tchebichef*........ 235

Note sur une formule relative aux intégrales multiples; par M. *E. Catalan*...... 239

Note sur la ligne de longueur donnée qui renferme une aire maximum sur une surface; par M. *Ch. Delaunay*........ 241

Note sur la détermination d'une fonction arbitraire; par M. *Cellérier*.......... 245

Note sur une classe particulière d'intégrales définies; par M. *Cellérier*........ 255

Pages.

Sur une représentation géométrique des fonctions elliptiques de première espèce; par M. *William Roberts* (de Dublin) 263

Sur l'équation $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0$; par *J. Liouville* 265

Sur les nombres premiers complexes que l'on doit considérer dans la théorie des résidus de cinquième, huitième et douzième puissance; par M. *C.-G.-J. Jacobi*. — Traduction de M. *Faye* 268

Recherches sur l'orbite de Mercure et sur ses perturbations. Détermination de la masse de Vénus et du diamètre du Soleil; par M. *U.-J. Le Verrier* 273

Sur la loi de la pesanteur à la surface ellipsoïdale d'équilibre d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation; par *J. Liouville* 360

Note sur la théorie mathématique de la double réfraction; par M. *H. Sénarmont*. 361

De la détermination, sous forme intégrable, des équations des développées des courbes à double courbure; par *H. Molins* 379

Remarques sur un Mémoire de N. Fuss; par *J. Liouville*; suivies d'une Note de M. *J. Binet* 391

Mémoire sur les surfaces orthogonales et isothermes; par M. *G. Lamé* 397

Mémoire sur le mouvement propre du système solaire dans l'espace; par M. *A. Bravais* 435

Sur quelques formules relatives à la théorie des intégrales eulériennes; par *J.-A. Serret* 489

Propriétés géométriques relatives à la théorie des fonctions elliptiques; par *J.-A. Serret* 495

Rapport fait à l'Académie des Sciences de l'Institut, au nom d'une Commission composée de MM. *Lamé* et *Liouville*, sur un Mémoire de M. Hermite, relatif à la division des fonctions abéliennes ou ultra-elliptiques; par *J. Liouville*; suivi d'une Lettre de M. *Jacobi* à M. *Hermite* 502

Sur la division du périmètre de la lemniscate, le diviseur étant un nombre entier réel ou complexe quelconque; par *J. Liouville* 507

Sur un théorème d'Abel; par *J. Liouville* 513

Note sur la méthode de recherche des surfaces isothermes; par M. *G. Lamé* 515

ERRATA.

Pages.	Lignes	
75,	12,	*au lieu de* $\frac{\nu}{{}_{\nu}2\alpha}$, *lisez* $\frac{\nu^2}{{}_{\nu}2\alpha}$
76,	21,	*au lieu de* $lll\nu$ entre les accolades, *lisez* $l\left(1+\frac{ll\nu}{l2}\right)$ pour le premier term $l\left(1+\frac{ll\nu}{l3}\right)$ pour le second, etc.
77,	9,	*au lieu de* $lll\nu > 0$ ou $\nu > e^e$, *lisez* $ll\nu > 0$ ou $\nu > e$
84,	20,	*supprimez* par rapport à llp_m
104,	16,	*au lieu de* $\left(\frac{lllm}{m}\right)^2$, *lisez* $\left(\frac{lm}{m}\right)^2$
391,	4,	*au lieu de* 1761, *lisez* 1791
395,	10,	*au lieu de* $\sum x^i \varphi(i)$, *lisez* $2\sum x^i \varphi(i)$

* * *

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

NOTE

SUR QUELQUES FORMULES DE CALCUL INTÉGRAL;

Par M. Alfred SERRET,
Ancien Élève de l'École Polytechnique.

1. Le but principal de cette Note est la recherche des quatre intégrales définies

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^m \cos(nx)\, dx, & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^m (\sin nx)\, dx, \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^m \cos(nx)\, dx, & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^m (\sin nx)\, dx. \end{array} \right.$$

dans lesquelles m et n sont des quantités quelconques.

La première de ces quatre intégrales est exprimable au moyen d'intégrales eulériennes de première ou de seconde espèce. On trouve, en effet,

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^m \cos(nx)\, dx = \frac{\pi}{2^{m+1}} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m-n}{2}+1\right)} \\ \displaystyle\qquad\qquad = \frac{\pi}{(m+1)\, 2^{m+1}\, \mathrm{B}\left(\frac{m+n}{2}+1,\ \frac{m-n}{2}+1\right)} \end{array} \right.$$

Cette formule est due, je crois, à M. Cauchy, qui l'a déduite d'intégrales définies prises entre des limites imaginaires [*]. La démonstration qu'en a donnée ce géomètre est la seule que je connaisse.

Quant aux trois dernières des intégrales (1), elles ne sont pas exprimables au moyen des Γ; leur expression est quelquefois très-simple. Cela arrive, par exemple, si la différence $n-m$ est un nombre entier pair; d'autres fois, au contraire, cette expression est fort compliquée. Dans tous les cas, elles sont exprimables au moyen d'intégrales définies qui ont avec les fonctions eulériennes la plus grande analogie.

L'expression des quatre intégrales (1) se déduit, comme on va le voir, avec la plus grande facilité, de la simple définition des intégrales d'Euler: l'une d'elles, la quatrième, a déjà été traitée par Laplace, (*Calcul des Probabilités*, page 235).

2. Soit

$$\int_0^\infty \theta^{p-1} e^{-\theta} d\theta = \Gamma(p).$$

Si l'on met $a\theta$ au lieu de θ, on aura identiquement

$$\int_0^\infty \theta^{p-1} e^{-a\theta} d\theta = \frac{\Gamma(p)}{a^p}; \tag{3}$$

et si dans cette dernière on remplace a par $a+b\sqrt{-1}$, il viendra

$$\int_0^\infty \theta^{p-1} e^{-(a+b\sqrt{-1})\theta} d\theta = \frac{\Gamma(p)}{(a^2+b^2)^{\frac{p}{2}}} e^{-\left(p\sqrt{-1}\,\text{arc tang}\frac{b}{a}\right)}. \tag{4}$$

Cette équation équivaut à deux autres, débarrassées d'imaginaires, et qui ont été trouvées directement par Poisson [**].

Si dans l'équation (3) on pose successivement

$$a = e^{x\sqrt{-1}} \quad \text{et} \quad a = e^{-x\sqrt{-1}},$$

---

[*] *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires;* Paris, 1825, page 40.

[**] *Journal de l'École Polytechnique,* XVI^e cahier, page 219.

on aura

$$\Gamma(p)\, e^{-px\sqrt{-1}} = \int_0^\infty y^{p-1}\, e^{-ye^{x\sqrt{-1}}}\, dy,$$

$$\Gamma(q)\, e^{qx\sqrt{-1}} = \int_0^\infty z^{q-1}\, e^{-ze^{-x\sqrt{-1}}}\, dz;$$

d'où, en multipliant,

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q)\, e^{(q-p)x\sqrt{-1}} = \int_0^\infty y^{p-1}\, e^{-ye^{x\sqrt{-1}}}\, dy \int_0^\infty z^{q-1}\, e^{-ze^{-x\sqrt{-1}}}\, dz.$$

Si, dans l'intégrale relative à z, on pose

$$z = yt, \quad \text{d'où} \quad dz = y\,dt,$$

on aura, en remarquant que les deux intégrations peuvent s'effectuer dans un ordre quelconque,

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\,\Gamma(q)\, e^{(q-p)x\sqrt{-1}} &= \int_0^\infty t^{q-1}\, dt \int_0^\infty y^{p+q-1}\, e^{-y\left(e^{x\sqrt{-1}}+te^{-x\sqrt{-1}}\right)}\, dy \\ &= \int_0^1 t^{q-1}\, dt \int_0^\infty y^{p+q-1}\, e^{-y\left[(1+t)\cos x+(1-t)\sqrt{-1}\sin x\right]}\, dy \\ &+ \int_1^\infty t^{q-1}\, dt \int_0^\infty y^{p+q-1}\, e^{-y\left[(1+t)\cos x+(1-t)\sqrt{-1}\sin x\right]}\, dy.\end{aligned}$$

Mettant $\frac{1}{t}$ au lieu de t dans la seconde de ces intégrales doubles, il viendra

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\,\Gamma(q)\, e^{(q-p)x\sqrt{-1}} &= \int_0^1 t^{q-1}\, dt \int_0^\infty y^{p+q-1}\, e^{-y\left[(1+t)\cos x+(1-t)\sqrt{-1}\sin x\right]}\, dy \\ &+ \int_0^1 t^{-q-1}\, dt \int_0^\infty y^{p+q-1}\, e^{-y\left(\frac{1+t}{t}\cos x-\frac{1-t}{t}\sqrt{-1}\sin x\right)}\, dy.\end{aligned}$$

Les deux intégrations relatives à y peuvent s'effectuer en vertu de l'équation (4), et l'équation précédente devient

$$(5)\left\{\begin{aligned}\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\, e^{(q-p)x\sqrt{-1}} &= \int_0^1 t^{q-1}\, dt\, \frac{e^{-(p+q)\sqrt{-1}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{1-t}{1+t}\,\mathrm{tang}\, x\right)}}{\left[(1+t)^2\cos^2 x+(1-t)^2\sin^2 x\right]^{\frac{p+q}{2}}} \\ &+ \int_0^1 t^{p-1}\, dt\, \frac{e^{(p+q)\sqrt{-1}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{1-t}{1+t}\,\mathrm{tang}\, x\right)}}{\left[(1+t)^2\cos^2 x+(1-t)^2\sin^2 x\right]^{\frac{p+q}{2}}}.\end{aligned}\right.$$

Telle est la formule si naturellement déduite de l'équation (3), et qui fournira immédiatement la démonstration de l'équation (2).

3. Si l'on multiplie les deux membres de l'équation (5) par $(\cos x)^{p+q-2}\,dx$, et qu'on intègre ensuite de part et d'autre par rapport à x, entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, il viendra

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{p+q-2}\,e^{(q-p)\,x\sqrt{-1}}\,dx \\
&= \int_0^1 t^{q-1}\,dt\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^2 x}\,\frac{e^{-(p+q)\sqrt{-1}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{1-t}{1+t}\,\mathrm{tang}\,x\right)}}{\left[(1+t)^2+(1-t)^2\,\mathrm{tang}^2 x\right]^{\frac{p+q}{2}}} \\
&+ \int_0^1 t^{p-1}\,dt\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^2 x}\,\frac{e^{(p+q)\sqrt{-1}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{1-t}{1+t}\,\mathrm{tang}\,x\right)}}{\left[(1+t)^2+(1-t)^2\,\mathrm{tang}^2 x\right]^{\frac{p+q}{2}}}.
\end{aligned}$$

Si dans les intégrales du second membre, relatives à x, on pose

$$\frac{1-t}{1+t}\,\mathrm{tang}\,x = \mathrm{tang}\,\varphi,$$

d'où

$$\frac{1-t}{1+t}\,\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

l'équation précédente deviendra

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{p+q-2}\,e^{(q-p)\,x\sqrt{-1}}\,dx \\
&= \int_0^1\frac{t^{q-1}\,dt}{(1+t)^{p+q-1}(1-t)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^{p+q-2}\,e^{-(p+q)\,\varphi\sqrt{-1}}\,d\varphi \\
&+ \int_0^1\frac{t^{p-1}\,dt}{(1+t)^{p+q-1}(1-t)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^{p+q-2}\,e^{(p+q)\,\varphi\sqrt{-1}}\,d\varphi.
\end{aligned}$$

Égalant en particulier les parties réelles et les parties imaginaires, et posant de plus

$$p+q-2=m \quad \text{et} \quad q-p=n,$$

on aura

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}+1\right)\Gamma\left(\dfrac{m-n}{2}+1\right)}{\Gamma(m+2)}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\cos nx\,dx \\ = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\frac{m+n}{2}}+t^{\frac{m-n}{2}}}{(1+t)^{m+1}(1-t)}\,dt\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\cos(m+2)\varphi\,d\varphi, \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}+1\right)\Gamma\left(\dfrac{m-n}{2}+1\right)}{\Gamma(m+2)}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin nx\,dx \\ = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\frac{m-n}{2}}-t^{\frac{m+n}{2}}}{(1+t)^{m+1}(1-t)}\,dt\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin(m+2)\varphi\,d\varphi. \end{cases}$$

Dans l'équation (6), l'intégrale relative à t est évidemment infinie; mais rien n'est plus simple que d'éviter cette difficulté. Si, en effet, on désigne par $F(n)$ le premier membre de cette équation, il est clair que, par le même procédé qui conduit à l'équation (6), on eût obtenu la suivante,

$$(8)\quad F(n)-F(n')=\int_0^1 \frac{\left(t^{\frac{m-n}{2}}+t^{\frac{m+n}{2}}\right)-\left(t^{\frac{m-n'}{2}}+t^{\frac{m+n'}{2}}\right)}{(1+t)^{m+1}(1-t)}\,dt\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\cos(m+2)\varphi\,d\varphi.$$

Dans cette dernière, qui remplacera l'équation (6), l'intégrale relative à t n'est généralement ni infinie ni nulle; et si l'on remarque que l'intégrale relative à φ ne renferme ni n ni n', on pourra la déterminer aisément en donnant à n et n' deux valeurs particulières quelconques, en faisant, par exemple, $n=0$, $n'=1$. De cette manière, et ayant égard aux formules connues

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m-1}x\,dx = 2^{m-2}\frac{\Gamma^2\left(\dfrac{m}{2}\right)}{\Gamma(m)}$$

et

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma(2a)}=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{2a-1}},$$

on trouve de suite

$$\mathrm{F}(0) = \mathrm{F}(1) = \frac{\pi}{(m+1)\,2^{m+1}};$$

ce qui montre que, dans l'équation (8), l'intégrale relative à φ est nulle, et, par suite, que la quantité désignée par $\mathrm{F}(n)$ est indépendante de n. On aura donc

$$\mathrm{F}(n) = \frac{\pi}{(m+1)\,2^{m+1}},$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos(nx)\,dx = \frac{\pi}{2^{m+1}} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m-n}{2}+1\right)},$$

équation qui coïncide avec l'équation (2). On verra plus loin qu'elle peut être obtenue sans passer par les considérations précédentes.

Si l'on y fait successivement $n=m$ et $n=m-2k$, k étant un entier, on aura

$$(9) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos mx\,dx = \frac{\pi}{2^{m+1}},$$

$$(10) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos(m-2k)\,x\,dx = \frac{\pi}{2^{m+1}} \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{1.2.3\ldots(k-1).k},$$

où l'on doit avoir $m > k-1$.

Ces deux formules ont été démontrées par Poisson [*].

Si l'on différentie les deux membres de l'équation (9) par rapport à m, puis qu'on fasse $m=0$, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}.$$

4. Revenons actuellement à l'équation (7): aucune des intégrales définies qui y entrent n'est généralement nulle ni infinie; celle relative

---

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, XIX^e cahier, page 490.

à φ est indépendante de n et cela suffit pour la déterminer. Si l'on fait $n = 1$ dans cette équation, on obtient immédiatement

$$(11) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin(m+2)\varphi \, d\varphi = \frac{1}{m+1},$$

et, par suite,

$$(12) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin nx \, dx = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m-n}{2}+1\right)} \int_0^1 \frac{t^{\frac{m-n}{2}} - t^{\frac{m+}{2}}}{(1+t)^{m+1}(1-t} dt.$$

L'intégrale

$$\int_0^1 \frac{t^{\frac{m-n}{2}} - t^{\frac{m+n}{2}}}{(1+t)^{m+1}(1-t)} dt,$$

a laquelle nous sommes conduits, n'est pas généralement exprimable au moyen des fonctions Γ; c'est une transcendante d'un ordre différent.

5. On obtient immédiatement deux relations entre les quatre intégrales définies (1), de telle sorte que, deux d'entre elles étant connues, on connaîtra aussi les deux autres. En effet, si dans les deux dernières on met $\frac{\pi}{2} - x$ au lieu de x, on a

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos nx \, dx &= \cos\frac{n\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos nx \, dx \\ &\quad + \sin\frac{n\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin(nx) \, dx, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \sin nx \, dx &= \sin\frac{n\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos nx \, dx \\ &\quad - \cos\frac{n\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin nx \, dx. \end{aligned} \right.$$

On voit donc que ces quatre intégrales sont généralement exprimables au moyen d'intégrales eulériennes, et de l'intégrale relative à t qui entre dans l'équation (12) : cela exige toutefois que n soit $< m + 2$; mais on verra plus haut qu'on peut ramener à ce cas tous les autres.

Un chose qu'il importe de remarquer ici, c'est que nos quatre intégrales sont immédiatement déterminées, et de la manière la plus simple, dans le cas limite $n = m + 2$, cas où l'équation (12) ne signifie plus rien. On a, en effet,

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos(m+2)\, x\, dx = 0, \\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin(m+2)\, x\, dx = \frac{1}{m+1}, \\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos(m+2)\, x\, dx = \frac{-\sin\frac{m\pi}{2}}{m+1}, \\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \sin(m+2)\, x\, dx = \frac{\cos\frac{m\pi}{2}}{m+1}, \end{aligned} \right.$$

formules qui ont lieu pour toutes les valeurs de m, telles que $m + 1 > 0$.

Du reste, on obtient les quatre formules précédentes en soumettant simplement les intégrales (1) à l'intégration par parties ; le même procédé fait même connaître leurs valeurs toutes les fois que la différence $n - m$ est un nombre entier pair et positif.

En soumettant à deux intégrations par parties successives les deux premières des intégrales (1), on trouve sans difficulté

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos nx dx = \frac{\overline{m+2}^2 - n^2}{(m+1)(m+2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} x \cos nx\, dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin nx\, dx = \frac{\overline{m+2}^2 - n^2}{(m+1)(m+2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} x \sin nx\, dx + \frac{n}{(m+1)(m+2)},$$

équations qui, dans le cas de $n = m + 2$, coïncident bien avec les formules (14).

On en déduit sans peine

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos nx \, dx$$

$$= \frac{(\overline{m+2}^2 - n^2)(\overline{m+4}^2 - n^2)\ldots(\overline{m+2k-2}^2 - n^2)(\overline{m+2k}^2 - n^2)}{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+2k-1)(m+2k)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2k} x \cos nx \, dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin nx \, dx$$

$$= \frac{(\overline{m+2}^2 - n^2)(\overline{m+4}^2 - n^2)\ldots(\overline{m+2k-2}^2 - n^2)(\overline{m+2k}^2 - n^2)}{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+2k-1)(m+2k)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2k} x \sin nx \, dx$$

$$+ n \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \frac{\overline{m+2}^2 - n^2}{(m+1)\ldots(m+4)} + \frac{(\overline{m+2}^2 - n^2)(\overline{m+4}^2 - n^2)}{(m+1)\ldots(m+6)} + \ldots \\ \qquad + \frac{(\overline{m+2}^2 - n^2)\ldots(\overline{m+2k-2}^2 - n^2)}{(m+1)(m+2)\ldots(m+2k)} \end{array} \right\}.$$

Si l'on fait $n = m + 2k$ dans ces deux formules, il viendra

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos(m+2k) x \, dx = 0,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin(m+2k) x \, dx$$

$$= (m+2k) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(m+1)(m+2)} - 2^2 \frac{(m+k+1)(k-1)}{(m+1)\ldots(m+4)} + 2^4 \frac{(m+k+1)(m+k+2)(k-1)(k-2)}{(m+1)\ldots(m+6)} - \ldots \\ \qquad \pm 2^{2k-2} \frac{(m+k+1)(m+k+2)\ldots(m+2k-1)(k-1)(k-2)\ldots3.2.1}{(m+1)(m+2)\ldots(m+2k)} \end{array} \right\}.$$

La première de ces deux formules avait été démontrée depuis longtemps par Poisson.

Il est bon de remarquer que le procédé qui conduit aux deux formules précédentes peut donner également les intégrales indéfinies

$$\int \cos^m x \cos(m+2k) x \, dx \quad \text{et} \quad \int \cos^m x \sin(m+2k) x \, dx.$$

Du reste, cette recherche présente peu d'intérêt.

6. Dans le cas de $n = m$, les trois dernières des intégrales (1) ne paraissent pas susceptibles d'une expression très-simple. L'équation (12) devient, dans ce cas,

$$(15) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin(mx)\, dx = \int_0^1 \frac{1-t^m}{(1-t)(1+t)^{m+1}}\, dt.$$

Si m est un entier, on peut donner de cette intégrale une valeur assez simple. L'intégration par parties, convenablement faite, conduit à l'équation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+1} x \sin(n+1)\, x\, dx = \frac{m+1}{m+n+2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin nx\, dx + \frac{1}{m+n+2},$$

qui devient, dans le cas de $n = m$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+1} x \sin(m+1)\, x\, dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin mx\, dx + \frac{1}{m+1}\right);$$

d'où l'on déduit aisément, dans le cas de m entier,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin mx\, dx = \frac{1}{2^{m+1}}\left(2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \frac{2^4}{4} + \ldots + \frac{2^m}{m}\right).$$

Cette valeur, qui n'est pas réductible à une forme plus simple, ne donne pas lieu de croire que les intégrales de l'équation (15) puissent être exprimées généralement au moyen des transcendantes connues.

7. Si l'on multiplie les deux membres de l'équation (5) par $\sin^{r-1} x \cos^{s-1} x\, dx$, et qu'on intègre ensuite de part et d'autre par rapport à x entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on aura, si $r + s = p + q$,

$$\mathrm{B}(p,q) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{r-1} (\cos x)^{s-1} e^{(q-p)x\sqrt{-1}}\, dx$$

$$= \int_0^1 t^{q-1}\, dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tang} x)^{r-1} \frac{dx}{\cos^2 x} \frac{e^{-(p+q)\sqrt{-1}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1-t}{1+t}\operatorname{tang} x\right)}}{[(1+t)^2 + (1-t)^2 \operatorname{tang}^2 x]^{\frac{p+q}{2}}}$$

$$+ \int_0^1 t^{p-1}\, dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tang} x)^{r-1} \frac{dx}{\cos^2 x} \frac{e^{(p+q)\sqrt{-1}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1-t}{1+t}\operatorname{tang} x\right)}}{[(1+t)^2 + (1-t)^2 \operatorname{tang}^2 x]^{\frac{p+q}{2}}};$$

puis si, comme on l'a déjà fait précédemment, on pose dans le second membre

$$\frac{1-t}{1+t}\operatorname{tang} x = \operatorname{tang}\varphi, \quad \text{d'où} \quad \frac{1-t}{1+t}\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

on aura

$$\begin{aligned}
&\mathrm{B}(p,q)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{r-1}(\cos x)^{s-1}\,e^{(q-p)x\sqrt{-1}}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{t^{q-1}\,dt}{(1-t)^r(1+t)^s}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi)^{r-1}(\cos\varphi)^{s-1}\,e^{-(p+q)\varphi\sqrt{-1}}\,d\varphi \\
&+ \int_0^1 \frac{t^{p-1}\,dt}{(1-t)^r(1+t)^s}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi)^{r-1}(\cos\varphi)^{s-1}\,e^{(p+q)\varphi\sqrt{-1}}\,d\varphi.
\end{aligned}$$

Égalant ensemble les parties réelles et les parties imaginaires, on aura

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{B}(p,q)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{r-1}(\cos x)^{s-1}\cos(q-p)x\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{t^{p-1}+t^{q-1}}{(1-t)^r(1+t)^s}\,dt\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi)^{r-1}(\cos\varphi)^{s-1}\cos(p+q)\varphi\,d\varphi, \\
&\mathrm{B}(p,q)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{r-1}(\cos x)^{s-1}\sin(q-p)x\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{t^{p-1}+t^{q-1}}{(1-t)^r(1+t)^s}\,dt\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi)^{r-1}(\cos\varphi)^{s-1}\sin(p+q)\varphi\,d\varphi.
\end{aligned}\right.$$

La première de ces formules sera en défaut si r est égal ou supérieur à 1; mais la seconde exige seulement que r soit moindre que 2. Les intégrales relatives à φ ne dépendent que de la somme $p+q$ et nullement de différence $(q-p)$, et cette remarque pourrait servir à les déterminer, ainsi que je l'ai fait voir précédemment; mais il vaut beaucoup mieux avoir recours à l'équation (5), qui nous donnera immédiatement les valeurs de ces deux intégrales.

Si dans l'équation (5) on fait $x = \frac{\pi}{4}$, et que, dans la premiere des intégrales du second membre, on pose

$$t = \operatorname{tang}\varphi, \quad \text{d'où} \quad \frac{1-t}{1+t} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right),$$

et dans la seconde

$$t = \operatorname{cotang}\varphi, \quad \text{d'où} \quad \frac{1-t}{1+t} = -\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right),$$

on a immédiatement

$$\mathrm{B}(p,q)\, e^{q\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi)^{q-1} (\cos\varphi)^{p-1} e^{(p+q)\varphi\sqrt{-1}}\, d\varphi;$$

d'où

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi)^{q-1} (\cos\varphi)^{p-1} \cos(p+q)\varphi d\varphi = \mathrm{B}(p,q) \cos\frac{q\pi}{2}, \\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi)^{q-1} (\cos\varphi)^{p-1} \sin(p+q)\varphi d\varphi = \mathrm{B}(p,q) \sin\frac{q\pi}{2}; \end{aligned} \right.$$

et les équations (16) deviendront

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{r-1} (\cos x)^{s-1} \cos(q-p)x\, dx \\ &= \frac{\mathrm{B}(r,s)}{\mathrm{B}(p,q)} \cos\frac{r\pi}{2} \int_0^1 \frac{t^{p-1} + t^{q-1}}{(1-t)^r (1+t)^s}\, dt, \\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{r-1} (\cos x)^{s-1} \sin(q-p)x\, dx \\ &= \frac{\mathrm{B}(r,s)}{\mathrm{B}(p,q)} \sin\frac{r\pi}{2} \int_0^1 \frac{t^{p-1} - t^{q-1}}{(1-t)^r (1+t)^s}\, dt. \end{aligned} \right.$$

On ne doit pas oublier que, dans ces formules, les quatre constantes p, q, r, s sont liées entre elles par la relation

$$r + s = p + q.$$

Les intégrales relatives à t, dans les équations (18), ne sont pas généralement exprimables au moyen des intégrales eulériennes, mais elles le deviennent de suite si $r = s = \frac{p+q}{2}$. On trouve, en effet, sans difficulté,

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1}+t^{q-1}}{(1-t^2)^{\frac{p+q}{2}}}\,dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right)\frac{\cos(q-p)\frac{\pi}{4}}{\cos(q+p)\frac{\pi}{4}},$$

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1}-t^{q-1}}{(1-t^2)^{\frac{p+q}{2}}}\,dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right)\frac{\sin(q-p)\frac{\pi}{4}}{\sin(q+p)\frac{\pi}{4}}.$$

D'après cela, les équations (18) deviennent

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x\cos x)^{\frac{p+q}{2}-1}\cos(q-p)x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\cos(q-p)\frac{\pi}{4}\,\frac{\mathrm{B}\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right)}{\mathrm{B}(p,q)}\,\mathrm{B}\left(\frac{p+q}{2},\frac{p+q}{2}\right),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x\cos x)^{\frac{p+q}{2}-1}\sin(q-p)x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\sin(q-p)\frac{\pi}{4}\,\frac{\mathrm{B}\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right)}{\mathrm{B}(p,q)}\,\mathrm{B}\left(\frac{p+q}{2},\frac{p+q}{2}\right).$$

Si, dans ces deux intégrales, on met $\frac{1}{2}x$ au lieu de x, puis qu'on fasse, pour abréger, $p+q=2m$, $q-p=2n$, et qu'on remplace les B par leurs valeurs en Γ, on aura

$$(19)\quad\left\{\begin{aligned}&\int_0^\pi \sin^{m-1}x\cos nx\,dx = 2^{m-1}\cos\frac{n\pi}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma(m-n)\,\Gamma(m+n)}\,\Gamma(m),\\&\int_0^\pi \sin^{m-1}x\sin nx\,dx = 2^{m-1}\sin\frac{n\pi}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma(m-n)\,\Gamma(m+n)}\,\Gamma(m).\end{aligned}\right.$$

Si l'on ajoute ces deux équations après avoir multiplié la premiere par $\frac{1}{2}\cos\frac{n\pi}{2}$, et la seconde par $\frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{2}$, on aura

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^{m-1} x \cos n\left(\frac{\pi}{2}-x\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x^{m-1} \cos nx\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1} x \cos nx\, dx = 2^{m-2}\, \frac{\Gamma\left(\frac{m-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma(m-n)\,\Gamma(m+n)}\, \Gamma(m), \end{aligned}\right.$$

formule qui est, au fond, la même chose que l'équation (2).

Chacune des intégrales définies des équations (19) est facilement exprimable au moyen de trois des intégrales (1). En joignant à ces équations les équations (13), on aura quatre relations entre les quatre intégrales (1); mais l'une de ces relations n'est qu'une conséquence des trois autres: on peut néanmoins, entre trois d'entre elles, éliminer les trois dernières des intégrales (1), et l'équation finale ainsi obtenue coïncide avec l'équation (20).

8. La seconde des équations (17) devient, en remplaçant l'intégrale B par sa valeur en Γ,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{q-1}\varphi \cos^{p-1}\varphi \sin(p+q)\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2\cos\frac{q\pi}{2}}\, \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)\Gamma(1-q)},$$

et, si l'on y fait $q=0$,

$$(21)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi^{p-1}) \frac{\sin p\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

En vertu de cette formule, la seconde des équations (16) deviendra, si l'on y fait $r=0$ et $s=p+q$,

$$(22)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+q-1} x \frac{\sin(q-p)x}{\sin x}\, dx = \frac{\pi}{2\mathrm{B}(p,q)} \int_0^1 \frac{t^{p-1}-t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\, dt,$$

et si, dans cette dernière, on pose $p + q = 1$, il viendra

$$(23) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(q-p)x}{\sin x}\,dx = \frac{\sin p\pi}{2} \int_0^1 \frac{t^{p-1} - t^{q-1}}{1+t}\,dt.$$

Les intégrales relatives à t, qui entrent dans les équations (21) et (22), seraient précisément les intégrales eulériennes désignées par B, si t y variait depuis 0 jusqu'à ∞.

9. On peut obtenir directement, et d'une manière très-simple, les formules (21), (22) et (23).

On a identiquement

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1}\,dt}{(1+t)^{p+q}} = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty \theta^{p+q-1} e^{-\theta}\,d\theta \int_0^1 t^{p-1} e^{-\theta t}\,dt.$$

D'ailleurs la quantité $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\theta z}{z}\cos(t\theta z)\,dz$ est égale à 1 ou à 0, suivant que t est moindre ou plus grand que 1; on aura donc

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1}\,dt}{(1+t)^{p+q}} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty \theta^{p+q-1} e^{-\theta}\,d\theta \int_0^\infty t^{p-1} e^{-\theta t}\,dt \int_0^\infty \frac{\sin\theta z}{z}\cos(t\theta z)\,dz;$$

et comme on peut effectuer les intégrations dans un ordre quelconque,

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1}\,dt}{(1+t)^{p+q}} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty \frac{dz}{z} \int_0^\infty \theta^{p+q-1} e^{-\theta} \sin z\theta.d\theta \int_0^\infty t^{q-1} e^{-\theta t}\cos(\theta z.t)\,dt.$$

L'intégrale relative à t, dans le second membre, a pour valeur

$$\frac{\Gamma(p)}{\theta^p(1+z^2)^{\frac{p}{2}}}\cos(p \operatorname{arc\,tang} z).$$

donc

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1}\,dt}{(1+t)^{p+q}} = \frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty \frac{dz}{z}\frac{\cos(p \operatorname{arc\,tang} z)}{(1+z^2)^{\frac{p}{2}}} \int_0^\infty \theta^{q-1} e^{-\theta}\sin z\theta.d\theta.$$

L'intégrale relative à θ a pour valeur

$$\frac{\Gamma(q)}{(1+z^2)^{\frac{q}{2}}}\sin(q \operatorname{arc\,tang} z),$$

donc

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1}\,dt}{(1+t)^{p+q}} = \frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\int_0^\infty \frac{dz}{z}\,\frac{\sin(q\,\text{arc tang}\,z)\cos(p\,\text{arc tang}\,z)}{(1+z^2)^{\frac{p+q}{2}}}.$$

Si, enfin, on pose

$$z = \text{tang}\,\varphi,$$

on aura

$$(24) \qquad \int_0^1 \frac{t^{p-1}\,dt}{(1+t)^{p+q}} = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{B}(p,q)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+q-1}\varphi\,\frac{\sin q\varphi\cos p\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi.$$

On aurait de même

$$(25) \qquad \int_0^1 \frac{t^{q-1}\,dt}{(1+t)^{p+q}} = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{B}(p,q)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+q-1}\varphi\,\frac{\sin p\varphi\cos q\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi.$$

Ajoutant ces deux équations, et remarquant que

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1}+t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt = \mathrm{B}(p,q),$$

on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+q-1}\varphi\,\frac{\sin(p+q)\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi}{2},$$

qui coïncide avec l'équation (21); la valeur de cette intégrale est assez remarquable: on voit qu'elle est indépendante du paramètre $(p+q)$.

Si l'on retranche les deux équations (24) et (25) l'une de l'autre, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+q-1}\varphi\,\frac{\sin(q-p)\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi}{2\mathrm{B}(p,q)}\int_0^1 \frac{t^{p-1}-t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt,$$

laquelle se confond avec l'équation (22), de laquelle on a déduit l'équation (23).

10. Le premier procédé qui conduit à la démonstration de l'équation (2) ne suppose nullement connue la formule fondamentale d'Euler

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi};$$

aussi cette dernière peut-elle se déduire de l'équation (2). Si l'on pose dans celle-ci

$$m = 0, \quad n = 2a,$$

il vient

$$\Gamma(1+a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2ax\,dx},$$

ou

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Cette équation, qui fait la base d'une théorie importante, est due à Euler. Depuis, on en a donné bien des démonstrations déduites de formules plus ou moins compliquées; la plus convenable, à mon avis, et en même temps la plus simple, est celle qui a été donnée par Euler et qui était fondée sur la décomposition en fractions simples de la fraction rationnelle $\frac{x^m}{1+x^n}$ [*].

---

[*] Cette démonstration, un peu compliquée dans l'ouvrage d'Euler, peut être presentée plus simplement de la manière suivante.

La méthode des fractions rationnelles conduit aisément à la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx = \sum_{k=0}^{k=n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{A}x + \mathrm{B}}{(x-\cos\nu)^2 + \sin^2\nu}\,dx,$$

où m et n sont des nombres entiers tels que $m < n$, et où l'on fait pour abreger

$$\nu = \frac{2k+1}{2n}\pi, \quad \mathrm{A} = \frac{-\cos(2m+1)\nu}{n} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \frac{\cos 2m\nu}{n}.$$

Effectuant par les règles ordinaires l'intégration sous le signe $\sum$, on trouve

$$\frac{\mathrm{A}}{2}\log\left[\frac{(x-\cos\nu)^2+\sin^2\nu}{(x+\cos\nu)^2+\sin^2\nu}\right] + \frac{\mathrm{A}\cos\nu+\mathrm{B}}{\sin\nu}\left[\text{arc tang}\,\frac{x-\cos\nu}{\sin\nu} + \text{arc tang}\,\frac{x+\cos\nu}{\sin\nu}\right],$$

expression qui se réduit à $\frac{\pi}{n}\sin(2k+1)a\pi$, dans le cas de $x = \infty$, en faisant, pour

11. Si dans l'équation (12) on pose

$$m = 0, \qquad n = 2 - 4a,$$

et que, dans l'intégrale du second membre, on mette $\sqrt{t}$ au lieu de t, on aura

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1} - t^{-a}}{1-t}\,dt = \pi \operatorname{cotang} a\pi.$$

Cette formule peut servir à trouver le développement de cotang $a\pi$; si, en effet, on remplace $\frac{1}{1-t}$ par sa valeur $\sum_0^\infty t^k$, et qu'on effectue les intégrations relatives à t, on aura

$$\pi \operatorname{cotang} a\pi = \sum_0^\infty \left(\frac{1}{k+a} - \frac{1}{k+1-a}\right).$$

De là on peut aussi déduire le développement en série de π^m. Si, en

---

abreger, $\frac{2m+1}{2n} = a$. D'après cela, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx = \frac{\pi}{n} \sum_0^{n-1} \sin(2k+1)a\pi.$$

Or on a

$$2 \sin a\pi \sin a\pi = 1 - \cos 2a\pi,$$
$$2 \sin a\pi \sin 3a\pi = \cos 2a\pi - \cos 4a\pi,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$2 \sin a\pi \sin(2n-1)a\pi = \cos(2n-2)a\pi - \cos 2na\pi;$$

d'où

$$2 \sin a\pi \sum_0^{n-1} \sin(2k+1)a\pi = 1 - \cos 2na\pi = 2,$$

et, par suite,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx = \frac{\pi}{n \sin a\pi} \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx = \frac{\pi}{2n \sin a\pi};$$

si, enfin, on met $x^{\frac{1}{2n}}$ au lieu de x, on aura

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

formule qui a évidemment lieu pour toute valeur de a comprise entre 0 et 1.

effet, on différentie $(m - 1)$ fois les deux membres de l'équation précédente par rapport à a et qu'on fasse ensuite $a = \frac{1}{4}$, on aura, si m est pair,

$$\frac{\mathrm{A}}{2^{2m}.1.2.3\ldots(m-1)}\pi^m = 1 + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{7^m} + \frac{1}{9^m} + \ldots,$$

et si m est impair,

$$\frac{\mathrm{A}}{2^{2m}.1.2\ldots(m-1)}\pi^m = 1 - \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} - \frac{1}{7^m} + \frac{1}{9^m} - \ldots.$$

Dans tous les cas A est la valeur absolue de la dérivée d'ordre $(m - 1)$ de cotang θ, dans laquelle on fait $\theta = \frac{\pi}{4}$. On trouve ainsi

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots,$$
$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots,$$
$$\frac{\pi^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \ldots,$$
$$\frac{\pi^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \ldots.$$

12. Je terminerai cette Note en indiquant un procédé extrêmement simple et analogue à ceux que j'ai déjà employés, pour donner la valeur de $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^n}dx$. Cette intégrale a déjà été traitée par Poisson, et plus récemment par M. Catalan qui en a fait l'objet d'une Note insérée dans le tome V de ce Journal.

On a identiquement

$$\frac{1}{(1 - x\sqrt{-1})^n} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty z^{n-1} e^{-z(1-x\sqrt{-1})}dz,$$
$$\frac{1}{(1 + x\sqrt{-1})^n} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty y^{n-1} e^{-y(1+x\sqrt{-1})}dy,$$

et, en multipliant,

$$\frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty z^{n-1} e^{-z}\,dz \int_0^\infty y^{n-1} e^{-y}\,dy\; e^{(z-y)x\sqrt{-1}},$$

et par suite

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1} e^{ax\sqrt{-1}}\,dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty z^{n-1} e^{-z}\,dz \int_0^\infty y^{n-1} e^{-y}\,dy \int_0^\infty x^{p-1} e^{(a+z-y)x\sqrt{-1}}\,dx\,;$$

dans le cas de $p = 0$, on en déduit

$$\int_0^\infty \frac{\left(\frac{\sin ax}{x}\right) dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty z^{n-1} e^{-z}\,dz \int_0^\infty y^{n-1} e^{-y}\,dy \int_0^\infty \frac{\sin(a+z-y)x}{x}\,dx.$$

D'ailleurs $\int_0^\infty \frac{\sin(a+z-y)x}{x}\,dx$ est égal à $+\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, suivant que y est inférieur ou supérieur à $a+z$; donc

$$\int_0^\infty \frac{\left(\frac{\sin ax}{x}\right)}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{\pi}{2[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty z^{n-1} e^{-z}\,dz \left(\int_0^{a+z} y^{n-1} e^{-y}\,dy - \int_{a+z}^\infty y^{n-1} e^{-y}\,dy\right).$$

Différentiant de part et d'autre par rapport à a, on aura

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{\pi}{2[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty z^{n-1} e^{-z}\,dz\,\frac{dZ}{da},$$

en posant, pour abréger,

$$Z = \int_0^{a+z} y^{n-1} e^{-y}\,dy - \int_{a+z}^\infty y^{n-1} e^{-y}\,dy.$$

Mais, par les règles ordinaires de la différentiation sous le signe $\int$, on trouve immédiatement

$$\frac{dZ}{da} = 2(a+z)^{n-1} e^{-(a+z)}.$$

Donc

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{\pi}{[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty e^{-(a+2z)} (z+a)^{n-1} z^{n-1}\,dz.$$

ou, en mettant $\frac{a}{2}(z-1)$ au lieu de z,

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^{2n-1}}{[\Gamma(n)]^2}\int_1^\infty e^{-az}(z^2-1)^{n-1}\,dz.$$

Les deux formules précédentes ont été données par M. Catalan; mais sa démonstration plus restreinte suppose que n est un nombre entier. Dans le cas de $n = 1$, on a la formule connue

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a}.$$

La démonstration que Poisson et M. Catalan ont donnée des formules précédentes, s'appuie sur l'équation

$$\int_0^\infty \cos ax\,dx = 0,$$

qu'il serait bon de ne pas employer, puisque la valeur de l'intégrale $\int_0^\infty \cos ax\,dx$ est évidemment indéterminée.

On pourrait aisément éviter cette difficulté en opérant de la maniere suivante.

Soit

$$z = \int_0^\infty \frac{\left(\frac{\sin ax}{x}\right)}{(1+x^2)^n}\,dx - \frac{\pi}{2};$$

on obtiendra l'équation

$$z - n\frac{d^2z}{da^2} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^4z}{da^4} - \ldots \pm n\frac{d^{2n-2}z}{da^{2n-2}} \mp \frac{d^{2n}z}{da^{2n}} = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx - \frac{\pi}{2},$$

et comme l'expression

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx - \frac{\pi}{2}$$

est rigoureusement nulle, on n'aura plus qu'à intégrer l'équation différentielle que l'on peut écrire symboliquement de la manière suivante

$$\left(1 - \frac{d^2z}{da^2}\right)^n = 0.$$

Cette équation étant intégrée et les constantes ayant été déterminées, on obtiendra l'intégrale cherchée

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^n}\,dx,$$

en prenant la dérivée de z par rapport à a.

Soit, par exemple, $n = 1$; on aura

$$z = \int_0^\infty \frac{\left(\frac{\sin ax}{x}\right)}{1+x^2}\,dx - \frac{\pi}{2}, \quad \text{et} \quad -\frac{d^2z}{da^2} = \int_0^\infty x^2\,\frac{\left(\frac{\sin ax}{x}\right)}{1+x^2}\,dx.$$

d'où

$$z - \frac{d^2z}{da^2} = 0,$$

équation rigoureusement établie. On en déduit

$$z = Ae^{-a} + Be^{a},$$

ou simplement

$$z = Ae^{-a},$$

puisque z ne peut croître indéfiniment avec a. Pour déterminer A, on remarquera que $z + \frac{\pi}{2}$ doit s'évanouir pour $a = 0$, ce qui donne

$$A = -\frac{\pi}{2},$$

et par suite

$$\int_0^\infty \frac{\left(\frac{\sin ax}{x}\right)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-a}),$$

et, en différentiant les deux membres par rapport à a,

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,e^{-a}.$$

Je pense que cette démonstration de la formule précédente remplacerait avec avantage celles qu'on donne habituellement dans les traités de calcul intégral.

NOUVEAU SYSTÈME
DE
FONTAINES INTERMITTENTES
SOUS-MARINES.

THÉORIE ET MODÈLE FONCTIONNANT;

Par Anatole de CALIGNY.

SUIVI D'UNE NOTE DE M. COMBES.

L'appareil que je vais décrire a pour but, abstraction faite des services qu'il pourra rendre:

1°. D'offrir un nouveau mode de transformation élémentaire du mouvement alternatif irrégulier d'une colonne liquide en mouvement continu, c'est-à-dire dans un même sens, *sans aucune pièce quelconque mobile;*

2°. De donner un moyen de faire des épuisements par l'action d'une force *irrégulière*, sans aucune pièce quelconque mobile;

3°. D'expliquer certains effets que les vagues de la mer produisent sur les puits artésiens ou sur les fontaines naturelles.

Cet appareil peut être expliqué sans figure, sa forme étant analogue à celle d'un grand T dont la tige serait horizontale. Il se compose, quant à sa partie essentielle, de deux tuyaux ouverts à toutes leurs extrémités et dont l'un est branché sur l'autre. Il n'est pas nécessaire qu'ils soient rectilignes, ni qu'ils fassent entre eux un angle droit. Un de ces tuyaux est enfoncé en partie dans un réservoir jusqu'à une certaine profondeur au-dessus du branchement. L'autre tuyau débouche dans un second réservoir dont le niveau est moins élevé que celui du premier.

Une cause quelconque fait osciller l'eau dans la première branche, que l'on peut nommer *branche verticale*, bien qu'elle puisse être inclinée, l'autre étant nommée aussi par convention *branche horizontale*. En vertu de ces oscillations, la pression moyenne de dedans en dehors est moindre que si le liquide était en repos, et il passe à chaque oscillation de l'eau du réservoir inférieur dans le tuyau vertical, d'où elle est périodiquement chassée dans le réservoir supérieur par le bas de ce tuyau. Il y a des époques où la pression de dedans en dehors est plus grande que s'il n'y avait pas d'oscillation; mais, en définitive, il sort, dans tous les cas, plus d'eau du réservoir inférieur qu'il n'y en rentre, jusqu'à ce que son niveau soit descendu à une certaine profondeur s'il n'est pas entretenu par de l'eau à épuiser.

Voici maintenant de quelle manière on rend continu, c'est-à-dire dans le même sens, le mouvement naturellement alternatif dans le tuyau horizontal. On donne à ce tuyau une certaine longueur, ou l'on diminue graduellement son diamètre sur une longueur suffisante de la partie intermédiaire, entre le tuyau vertical et le réservoir à épuiser, pour lui permettre d'emmagasiner de la force vive dans son intérieur, comme un volant en emmagasine par sa masse ou par sa vitesse. Il est facile de voir que, pour une vitesse donnée aux extrémités, il y a plus de force vive emmagasinée dans la masse totale du tuyau horizontal, si la partie intermédiaire est graduellement rétrécie. Il en résulte qu'ici, comme dans un volant, on peut emmagasiner de la force vive soit au moyen de la masse en mouvement, soit au moyen de la vitesse de certaines parties de cette masse. Par cette disposition, le mouvement est entretenu dans un même sens; il suffit qu'en définitive, la somme des actions dans un sens soit plus grande que dans l'autre. Ainsi voilà un mouvement *continu*, produit dans un tuyau horizontal par un mouvement alternatif *irrégulier*, abandonné à lui-même dans un tuyau vertical.

Dans les expériences que j'ai faites, je soufflais alternativement avec la bouche au sommet du tuyau vertical, et, malgré *l'augmentation* de pression qui en résultait évidemment de haut en bas, la diminution moyenne était encore assez grande pour faire baisser de 7 à 8 centimètres le niveau de l'eau dans le réservoir à épuiser avec un petit appareil ayant un tube vertical de 3 centimètres de diamètre, dont le branchement très-court était enfoncé à environ $0^{\text{m}},50$ au-dessous du niveau du réservoir.

Quand la force qui fait osciller la colonne liquide est une masse d'eau versée périodiquement sur le haut du tube vertical, si cette eau vient en trop grande quantité, elle enveloppe de l'air dont l'action change l'effet de l'appareil, qui alors refoule de l'eau par le tuyau horizontal au lieu d'en *aspirer*. Je me sers de cette dernière expression parce que l'appareil peut être considéré aussi comme une sorte de pompe aspirante *élévatoire*, sans aucune pièce quelconque mobile quand l'eau verse périodiquement par le sommet.

Cet appareil peut se présenter sous des formes très-irrégulieres, et, comme il ne faut pour le constituer qu'un cours d'eau souterrain et une sorte de bout de tuyau formé par une cavité, on doit penser qu'il se présente dans la nature des combinaisons de ce genre, beaucoup plus simples que la plupart de celles qui ont été imaginées pour expliquer les fontaines naturelles. Il est entendu que ma nouvelle explication n'a rien d'exclusif, non plus que celles du mouvement des eaux souterraines, que j'ai présentées dans mon dernier Mémoire, tome VI de ce Journal.

On peut considérer cet appareil, abstraction faite des principes de ceux que je viens de rappeler, comme mis en action au bord de la mer par des flots oscillants dans un creux vertical.

Les Mémoires de la Société géologique de Londres font mention de cours d'eau dans les îles Ioniennes, qui, selon toutes les apparences, se jettent dans la mer, et sont cependant à un niveau moins élevé qu'elle. On n'avait pas encore essayé de donner une explication de ce phénomène par les lois de l'hydrodynamique. Or il est essentiel de remarquer que j'ai fait fonctionner mon appareil en affectant de souffler avec une irrégularité analogue à celle du mouvement varié des flots entre deux rochers.

L'effet de cet appareil étant indépendant de la nature de la force motrice, pourvu que celle-ci n'ait pas pour effet immédiat de pousser de l'air à l'intérieur, il n'y a rien de plus simple que le mouvement dont on parle, et il aspire évidemment, dans certaines localités, l'eau des courants souterrains avec lesquels il est en communication. Il y a donc des circonstances où ces courants peuvent se décharger dans la mer avec plus de force pendant les tempêtes ou les agitations de la mer que pendant le calme. Il ne paraît pas même nécessaire de considérer un cylindre creux, puisque l'effet décrit ne dépend pas précisément de la nature des oscillations, et qu'entre deux rochers ordinaires il se présente souvent des oscillations d'une hauteur considérable.

Peu importe dans ce premier exposé que la succion se fasse comme nous l'avons dit, ou par le principe de la communication latérale du mouvement des fluides de Venturi, qui ne contribue, comme nous l'établirons plus loin, que pour une faible part à l'effet que nous venons de décrire.

Pour faire le calcul de la force de succion qui se présente dans cet appareil, nous supposerons d'abord la masse oscillante constante, comme dans un siphon renversé ordinaire, et nous commencerons par considérer les pressions d'une colonne liquide sur les parois de ce genre de siphon. Cela nous fournira ensuite un moyen d'apprécier la force de succion dont il s'agit dans un simple mouvement oscillatoire vertical.

h étant la hauteur variable du niveau du liquide au-dessus d'un point donné, sur une des parois *verticales* d'un siphon, pris au-dessous de la limite de l'oscillation dans les deux branches ou à cette limite, H la différence variable des niveaux dans les deux branches verticales au même instant, et L la longueur totale de la colonne oscillante; la pression qui serait exprimée par h (le diamètre étant constant), dans l'hypothèse de l'équilibre stable, sera diminuée ou augmentée dans l'état de mouvement, excepté à une seule époque. En effet, si la vitesse s'accélère de haut en bas dans une branche, c'est évidemment parce que la réaction inférieure est moindre dans cette branche que le poids représenté par h, et *vice versâ*, quand la vitesse se ralentit dans la même branche. Il n'y a qu'un instant de transition entre ces deux états du système, celui où les deux extrémités de la colonne arrivent au même niveau. Il est clair que l'influence de l'accélération sur le calcul des pressions est précisément en sens contraire du côté où la colonne monte, et qu'aux deux limites de hauteur la pression peut être sensiblement nulle au pied des branches verticales, si l'une des deux se vide sensiblement en entier à chaque période, tout le poids de la colonne étant employé dans le premier instant à engendrer de la vitesse ou à l'éteindre dans le dernier instant. La force accélératrice ou retardatrice étant exprimée à chaque instant par $\frac{H}{L}$, la pression sur un point donné des branches verticales, soit à la limite inférieure de la course de l'oscillation, soit *au-dessous* dans chaque branche verticale, sera exprimée à chaque instant par

$$h\left(1 \mp \frac{H}{L}\right).$$

Dans le cas où chaque tuyau vertical est périodiquement vidé, le rayon du coude étant supposé très-petit par rapport à la hauteur totale, on a, pour l'origine du mouvement,

$$h = H = L.$$

Soit x le chemin parcouru depuis le commencement de la descente jusqu'à chaque instant considéré, en comptant ce chemin depuis son origine jusqu'au moment où les deux extrémités de la colonne arrivent à un même niveau; on a, dans la première partie de la descente, en faisant $\frac{1}{2}L = R = 1$,

$$H = 2R - 2x. \quad \text{et} \quad h = 2R - x,$$

d'où l'on tire

$$h\left(1 - \frac{H}{L}\right) = (2R - x)\frac{x}{R} = 2x - \frac{x^2}{R} = 2x - x^2.$$

Quant à la dernière moitié de la descente, appelant, pour simplifier, x non plus le chemin parcouru, mais le chemin *qui reste à chaque instant à parcourir*, en considérant que cette quantité est parfaitement symétrique avec celle que nous venons de considérer pendant la première moitié de la descente et que nous avons nommée x, on a, d'apres cette seconde notation,

$$x = h \quad \text{et} \quad H = 2R - 2x;$$

on retrouve la même expression $2x - x^2$, en changeant le signe de H.

Or il ne s'agit pas seulement de connaître les pressions ou même leurs moyennes, parce qu'il ne faut pas perdre de vue que les pressions les moins fortes agissent ici plus longtemps que les autres. Le problème est facile à résoudre exactement au moyen de considérations particulières sur la force centrifuge. Il suffit de voir que la force vive varie comme la pression ou comme la quantité

$$2Rx - x^2 = 2x - x^2.$$

Cela étant très-facile à démontrer de la même manière que la formule analogue que j'ai donnée dans un précédent Mémoire, tome III de ce Journal, page 209, je ne m'étendrai pas davantage sur cet objet, pour éviter les répétitions, et je passerai au point essentiel [*].

On admet qu'une colonne liquide, quand elle se *retourne* parallèlement à elle-même comme dans un siphon à branches verticales, exerce à chaque instant des pressions dont la résultante verticale est ici *quadruple* de la pression représentée en hauteur d'eau par la *hauteur due* à sa vitesse actuelle. Or, à l'instant où les deux extrémités de la colonne arrivent au même niveau, la *hauteur due* à la vitesse, abstraction faite des résistances passives, dans le cas limite dont nous nous occupons, est exprimée par $\frac{1}{4}$ L, puisqu'une longueur égale à $\frac{1}{2}$ L est descendue de $\frac{1}{2}$ L, en entraînant une masse totale double, en quelque sorte comme dans une *machine d'Athwood*. Donc la résultante verticale des pressions exercées à cet instant par la force centrifuge est précisément égale au poids de la colonne totale de la longueur L, poids qui en cet instant exprime, comme nous l'avons dit, la pression verticale totale moins la force centrifuge, cet instant étant le seul où il n'y a ni augmentation ni diminution.

Or, ici la masse étant constante, la force vive est toujours proportionnelle au carré de la vitesse, ou à la *hauteur due* à la vitesse. Mais

---

[*] On peut d'ailleurs présenter ce résultat sous la forme suivante :

En vertu du principe des forces vives, le produit de la masse totale en mouvement par la *hauteur due* à la vitesse à chaque instant considéré, est proportionnel au produit de la longueur de la colonne partielle qui a abandonné le sommet du tube, par la hauteur dont est descendu son centre de gravité, quand on la considère en un instant donné comme ayant fourni la quantité d'eau passée dans l'autre branche. Or il serait facile de voir, au moyen d'une figure, que la force vive, et par suite le carré de la vitesse, puisque la masse est constante, varie comme le produit des deux segments de la course rectiligne de la colonne (un des deux segments étant la partie abandonnée par le liquide), ou comme le carré de l'ordonnée du cercle dont le diamètre égalerait la course totale de l'oscillation. Il est facile de voir que cela revient à la formule écrite dans le texte, en y conservant la lettre $R = 1$.

nous avons vu que cette *hauteur due,* à laquelle la force centrifuge est proportionnelle, est aussi toujours proportionnelle à la pression sur l'origine inférieure de la branche verticale; donc, *à tous les instants,* cette dernière pression est égale à la résultante verticale des forces centrifuges, puisqu'elle y est égale pendant un instant, et il en est ainsi à fortiori de leurs moyennes par rapport au temps. C'est la somme de ces deux espèces de pressions qui compose la pression totale, et si l'on admet, comme on va d'ailleurs le prouver, que la somme des deux moyennes est égale au poids de la colonne en repos absolu, il en résulte, puisque ces moyennes sont égales, que l'état d'oscillation diminue précisément de moitié le poids apparent, dont l'autre moitié se *retrouve en force centrifuge, mais n'agit que dans la partie courbe.*

Il n'est peut-être pas évident à priori que l'état de mouvement d'un système de corps ne peut pas changer son poids moyen, en ce sens qu'il se retrouve en forces centrifuges, percussions, etc., puisque l'opinion de Du Buat, et d'après lui, de quelques auteurs [*], sur la diminution des pressions dans les rivieres à mouvement uniforme, semble au fond tout à fait contraire à ce résultat, comme Bernard l'a remarqué dans son ouvrage intitulé : *Principes d'hydraulique,* page 172 : il n'est donc pas inutile de le démontrer.

Supposons qu'un vase soit tenu en équilibre au moyen de forces directement opposées à celles de la pesanteur. On sait, par le principe de la conservation du centre de gravité, que si l'on n'introduit pas de forces étrangères dans le système, le centre de gravité de son ensemble doit rester en repos malgré l'état d'ondulation quelconque de l'eau qu'il renferme. Si donc le centre de gravité de cette eau descend d'un mouvement accéléré, c'est parce qu'à cette époque, les forces qui agissent sur l'eau en tirant le vase de bas en haut sont moindres que le poids total du liquide en repos. Si le centre de gravité de cette eau monte d'un mouvement accéléré, c'est le contraire qui a lieu, et *vice versâ* si le mouvement est retardé. Il en résulte que si les mouvements de bas en haut et de haut en bas sont symétriques, et qu'en définitive,

---

[*] Du Buat n'avait établi son opinion que sur des experiences très-curieuses, mais incomplétement expliquées.

le mouvement du centre de gravité de tout l'ensemble solide et liquide soit nul, *le poids moyen* du liquide en mouvement sera le même que dans l'état de repos absolu.

Bien que l'on pût voir, au moyen de ce résultat, ce que devient la pression exercée par suite du mouvement du liquide sur le fond du vase, en supposant ce vase invariable de position, cela devient encore plus clair, abstraction faite des résistances passives, quand on considère les oscillations d'une colonne liquide dans un siphon renversé ordinaire à branches verticales, puisqu'alors tout est symétrique.

J'ai pensé que ces considérations générales sur le mouvement du centre de gravité pourraient donner plus d'évidence au principe que j'avais d'abord déduit des lois de la communication du mouvement. Il est d'ailleurs facile de voir directement que, si un corps isolé tombe d'une certaine hauteur sur un plan horizontal dans le vide, la somme totale des pressions ou réactions, par rapport au temps, exercées sur le plan, sera égale à la somme des pressions motrices ou retardatrices de la pesanteur, par rapport au temps, pendant que le corps ne touche pas le plan. Ainsi, en définitive, la pression moyenne n'aura pas changé sur le fond du système horizontal, si l'on considère le mouvement depuis l'instant où le corps a une vitesse donnée jusqu'à celui où il repasse par la même vitesse dirigée en sens contraire. Le raisonnement sera le même si l'on considère un système quelconque de corps en mouvement, quelles que soient les liaisons ou réactions mutuelles. Ainsi le *poids moyen* est le même que pour l'état de repos dans toutes les hypothèses, en considérant une durée assez longue et ayant égard à ce qui vient d'être dit.

Revenons maintenant au cas le plus général des oscillations dans un siphon renversé à branches verticales, abstraction faite des résistances passives. La solution du problème sur la diminution de la pression moyenne au point donné dans les branches verticales devient extrêmement simple, puisqu'il suffit d'apprécier la résultante moyenne verticale de la force centrifuge, cette résultante étant précisément la partie à déduire de la somme totale des deux espèces de pressions verticales moyennes qui doit être égale au poids de la colonne liquide en repos stable. Or nous savons que la pression moyenne de la force centrifuge varie comme la force vive moyenne, laquelle varie comme l'expression ci-dessus. Il suffit donc de déterminer le rapport de la force vive moyenne à la course de ces oscillations isochrones. Or, comme je l'ai dit dans mes précédents Mémoires, la partie soulevée au-dessus du niveau d'équilibre stable dans les deux branches étant précisément en raison du chemin que la force parcourt à chaque oscillation, la force vive moyenne est comme le carré de la course de chaque oscillation. Ainsi la quantité dont la pression moyenne est diminuée est en raison de ce carré. En définitive, si l'on nomme H_0 la différence de hauteur des niveaux à l'origine de l'oscillation, la quantité dont il faut diminuer, par suite de l'état du mouvement, la valeur de la pression moyenne dans l'état de repos absolu, ou d'équilibre stable dans les deux branches, est évidemment

$$\frac{H_0^2}{4L}.$$

Si l'on pose $H_0 = L$, cette quantité devient $\frac{1}{4}L$; c'est précisément ce que l'on trouve *pour cette limite* par le calcul ci-dessus, d'apres lequel la pression moyenne est diminuée de moitié à l'origine de chaque branche dont chacune a une hauteur égale à $\frac{1}{2}L$.

L'expression de la diminution de pression moyenne, provenant dans un siphon du mouvement d'une colonne liquide oscillante, peut servir à apprécier approximativement la diminution analogue résultant de l'oscillation d'une colonne liquide dans un simple tuyau rectiligne enfoncé en partie au milieu d'un réservoir. Il est facile de voir que si la masse en oscillation pouvait être considérée comme sensiblement constante, la force accélératrice étant sensiblement moitié moindre que dans un siphon, pour une masse donnée analogue, la diminution de pression dont il s'agit serait aussi moitié moindre, abstraction faite des résistances passives. Il semblerait assez difficile de tenir compte des résistances passives (pour ce cas particulier de diminution dans les pressions), si elles étaient considérables par rapport à la force accélératrice, la question se compliquant encore, surtout dans le cas où les tuyaux sont très-courts par rapport à la course de l'oscillation, de ce que la partie de la course comprise au-dessous du niveau du réservoir est d'abord bien plus grande que la partie comprise au-dessus. Il est clair que, dans cette hypothese, il serait impossible de regarder la masse oscillante comme assez sensiblement constante et que la moyenne serait même difficile à déterminer.

Les phénomènes de l'écrasement du pied de la colonne ne sont pas d'ailleurs encore assez connus pour que l'on puisse en conclure de combien une diminution donnée dans cette moyenne pourrait diminuer la pression moyenne de la colonne oscillante vers son extrémité inférieure[*].

L'appareil pour les épuisements, objet principal de la présente Note, pouvant peut-être offrir par la suite quelques avantages à l'industrie en utilisant le mouvement des flots sur des côtes, le long desquelles il paraît que leur agitation se transmet assez loin des régions où les vents les ont soulevés pour qu'on n'y puisse pas utiliser ces vents, nous ferons la remarque suivante sur les phénomènes de l'espèce d'écrasement dont on vient de parler. Quand on fait déboucher sous le niveau d'un réservoir un robinet d'où sort de l'eau colorée ayant un mouvement permanent, la veine prend une forme très-évasée à une petite distance de l'orifice, parce que le mouvement a le temps de se propager par communication latérale à l'eau du réservoir, de manière à produire cet effet. Mais l'évasement est plus allongé quand une colonne sort par le bas d'un tube, avec un mouvement alternatif, qui n'a pas le temps de se communiquer latéralement de la même manière que dans un mouvement permanent. Ainsi j'ai enfoncé en partie dans un réservoir un siphon renversé d'un diamètre analogue à celui du tube dont j'ai parlé plus haut, et dont les branches étaient très-inégales en hauteur. Ce siphon étant rempli d'eau et la longue branche étant bouchée avec la main,

---

[*] Si l'on faisait abstraction du mouvement de l'eau dans l'intérieur du réservoir, on trouverait, par des moyens qui ne sont pas assez rigoureux pour que je m'y arrête, que, dans la descente, la limite de la vitesse, à chaque instant, serait celle d'un corps grave tombant dans le vide, en supposant la gravité diminuée de moitié. On trouverait alors pour chaque instant donné que la pression de dedans en dehors du tube vertical serait exprimée par la moitié de la hauteur actuelle de la colonne liquide en ce point, et, en tenant compte de la durée de chaque pression élémentaire, on trouverait que la diminution de la pression moyenne à l'origine inférieure du tube serait exprimée par le tiers de la hauteur du niveau du réservoir au-dessous de cette origine inférieure. Cela s'obtient au moyen d'une intégrale algébrique facile à trouver; mais il est d'autant plus inutile d'insister sur ce calcul dont les bases ne sont pas d'ailleurs assez rigoureuses, que, par suite des résistances passives, la diminution de pression sera sans doute encore moindre que nous ne l'avons indiqué, ou que le quart de la hauteur du niveau du réservoir au-dessus de l'origine du tuyau.

tandis que la courte branche était enfoncée en entier au-dessous du niveau du réservoir, on débouchait subitement la première et la colonne liquide, se précipitant de bas en haut, venait couper par un *bouillon* assez régulier le niveau du réservoir. On avait ainsi un moyen d'apprécier l'évasement du tronc de cône liquide, dont l'angle dépend évidemment de la hauteur de la colonne de chasse. Je ne parle d'ailleurs ici de ce fait, que pour donner une idée des moyens dont on pourra se servir dans l'étude de cet appareil s'il doit plus tard être utile à l'industrie, et pour ajouter seulement que la masse en mouvement dans le réservoir ne peut pas être négligée dans les calculs; de sorte que l'expérience seule peut éclaircir complétement cette matière, comme on le verra dans un prochain travail sur les ajutages divergents. Ce qu'il y a de certain, c'est que la nouvelle force de succion, mise en jeu dans cet appareil, est assez puissante. On peut remarquer, qu'abstraction faite de ses applications, elle servira à varier encore les formes des appareils sans pièce mobile quelconque, que j'ai décrits dans le tome VI de ce Journal, et qui sont en forme de $\int$.

Pour étudier maintenant l'action d'un ensemble quelconque de colonnes liquides les unes sur les autres, il faut se bien rendre compte du principe de la succion dont il s'agit et du peu de puissance qu'exerce ici, relativement à cette succion, le phénomène de la communication latérale du mouvement simplement rectiligne des liquides observé par Venturi.

On sait par expérience qu'en général les surfaces mouillées exercent sur l'eau dans les canaux un frottement moindre que celles qui ne le sont pas encore; c'est du moins ce que dit Bossut d'après ses propres observations, et cela semble très-rationnel. La communication latérale du mouvement rectiligne dans les liquides provient de quelque chose d'analogue à ce qu'on est convenu d'appeler frottement des liquides. Quand il ne s'agira, comme dans le cas présent, que d'apprécier à beaucoup près ce frottement sur un point donné d'un tuyau, c'est-à-dire en craignant seulement de l'apprécier au-dessous de sa valeur réelle, il est clair qu'on pourra s'en former une idée au moyen du frottement connu de l'eau dans un tuyau de diamètre donné. En effet, s'il y avait une erreur à craindre, elle serait sans doute en sens contraire de celle que l'on commettra dans le cas présent, l'eau retenue aux parois fixes devant faire éprouver plus de résistance que si elle se laissait entraîner librement, surtout si l'on a égard à la chance quelconque de rencontrer des aspérités solides, malgré la couche d'eau qui les tapisse. Or l'abaissement du niveau de l'eau dans le réservoir latéral de notre appareil étant d'environ un sixième ou un septième de la course de la colonne oscillante au-dessous du niveau du réservoir supérieur, il est facile de voir que le frottement sur la seule section normale à l'axe du tube latéral, par laquelle la colonne verticale peut agir sur celle du tuyau horizontal, est tout à fait insuffisant pour donner lieu à un pareil abaissement. En effet, d'après les expériences de Dubuat sur des tuyaux de diamètres analogues à celui du tube dont je me suis servi, il faut un frottement sur une longueur d'une trentaine de fois ce diamètre pour perdre sur la hauteur du réservoir moteur, dans un mouvement uniforme, une fraction de cette hauteur égale à la *hauteur due* à la fraction de la vitesse (*due à la hauteur totale*), qui est observée dans le tuyau. D'après des expériences d'Eytelwein sur des tuyaux d'un diamètre analogue, *d'une petite longueur* analogue aussi à celle de notre tuyau, le coefficient du frottement est encore moindre; enfin, d'après mes propres expériences que j'ai rapportées dans mes précédents Mémoires, le coefficient est encore moindre dans le mouvement oscillatoire que dans le mouvement uniforme. On voit donc qu'il faudrait un frottement sur une étendue beaucoup plus grande que la seule section du tuyau latéral pour diminuer d'une quantité bien moins considérable que nous ne l'avons dit la hauteur du niveau dans le réservoir latéral, quand même la vitesse de la couche frottante serait égale à celle qu'un corps acquerrait en tombant dans le vide de toute la hauteur du niveau le plus élevé. Or il est évident que cette vitesse sera toujours bien moindre, puisqu'elle rencontre de l'eau à soulever. Si d'ailleurs on tenait compte des mouvements irréguliers sur la section frottante, ce serait plutôt une raison pour penser qu'il y aurait une action en sens contraire de la succion. Au reste, en faisant tomber une colonne liquide dans le tube vertical portant à angle droit sa tubulure latérale, alors assez courte pour que l'on vît passer l'eau s'il devait en jaillir de ce côté, j'ai constaté qu'il en passe fort peu par cette tubulure dans ce mouvement de chute rapide.

Il résulte de ce qui vient d'être dit que la succion opérée par ce nouvel appareil oscillant ne provient pas du principe de la communication latérale du mouvement dans les liquides, au moins quant à sa partie la plus considérable à beaucoup près. Voyons quel en est le véritable principe; bien qu'à la rigueur ce qui a été dit dans le théorème ci-dessus pût être suffisant, il est toujours utile de se rendre compte de la raison des choses, d'une manière en quelque sorte sensible.

Quand une pression agit sur un corps fixe, elle s'exerce, comme on sait, avec plus d'intensité que si ce corps cède. C'est par cette raison que pour le mouvement uniforme de l'eau dans les tuyaux de conduite. D. Bernoulli a trouvé la pression moindre que dans l'état de repos, et c'est aussi, par la même raison que, sans aucune déviation de filets fluides et abstraction faite de toute communication latérale du mouvement, nous avons trouvé une diminution de pression si notable provenant de l'état d'oscillation des colonnes liquides dans de simples tubes verticaux et dans des siphons renversés. Mais il faut bien faire attention que ce n'est pas *l'état de mouvement* en lui-même qui détermine ce phénomène provenant de ce que le point d'application d'une force *cède* en prenant du mouvement. Il faut prendre garde de mal interpréter la loi de D. Bernoulli, qui n'est établie que pour le mouvement permanent.

Pour nous former une idée bien nette sur ce sujet, supposons qu'un siphon renversé ordinaire, à branches verticales d'égales hauteurs, soit disposé sous le fond d'un réservoir avec lequel il est en communication, et dont la hauteur d'eau soit précisément égale à la *hauteur due* à la vitesse uniforme dans ce siphon où l'on fait abstraction des résistances, passives. D'apres le théorème de D Bernoulli, dans les branches verticales la pression sur un point donné de la paroi est exprimée par la hauteur du niveau du réservoir au-dessus de ce point moins la *hauteur due* à vitesse, hauteur égale, en vertu de l'hypothese, à celle du niveau de l'eau au-dessus de la naissance du siphon. Or, si l'on supprime instantanément ce réservoir, puisque la pression de celui-ci ne s'exerçait pas sur le siphon, il en résulte que les pressions dans les branches verticales seront partout égales à ce qu'elles seraient si dans cet instant le liquide était en repos. Ce qui se passe alors est parfaitement analogue à ce qui se présente à l'époque où, dans un siphon renversé, une colonne liquide oscillante arrive par ses deux extrémités à un même niveau. Comme il ne s'agit ici que d'un mode de démonstration, nous n'avons point considéré ce qui se passe dans le coude ou aux environs, par suite de la force centrifuge, non plus que le *bouillon* ou *champignon* de sortie, le tube étant d'ailleurs censé avoir un assez grand développement. Mais il nous a semblé que les considérations précédentes éclairciraient bien le principe de mécanique objet de ce travail, en s'accordant d'ailleurs avec le calcul ci-dessus.

Pour achever d'éclaircir le principe de l'appareil objet de cet article et son utilité dans l'étude des applications proposées, il faut considérer les expériences en variant de trois manières bien distinctes le mode de la succion sur lequel il repose, et pour cela reprendre l'appareil tel que nous l'avons d'abord décrit :

1°. Quand la partie du tube vertical qui est au-dessous du tube horizontal n'avait qu'environ deux fois la longueur de son diamètre et se terminait par des parois vives, il n'y avait, à proprement parler, rien de bien nouveau dans le mode de succion parfaitement analogue à celle que Venturi, et avant lui Bernoulli, ont observée dans les ajutages comme provenant de la contraction de la veine fluide. Seulement on n'avait pas observé cette succion dans le mouvement *oscillatoire* d'une veine liquide.

2°. Quand on augmentait la longueur de cette sorte d'ajutage (qui n'est que le prolongement du tube vertical au-dessous du tube horizontal) de deux fois environ la longueur de son diamètre, alors l'abaissement dans le réservoir latéral était diminué de plus de moitié. L'addition d'une si petite longueur produit cette diminution, évidemment parce que les filets liquides ont parcouru le chemin nécessaire pour se redresser beaucoup mieux avant de passer devant le tube latéral, ce qui modifie le phénomène de la succion par la contraction de la veine liquide.

3°. On conservait cette longueur d'ajutage ainsi augmentée, on le terminait inférieurement par un entonnoir convenablement évasé, au lieu de le terminer par de simples parois vives; alors, malgré la même augmentation de longueur, plus encore celle de la partie évasée, on obtenait cependant un abaissement de niveau dans le réservoir latéral aussi grand que dans le cas où l'ajutage à parois vives n'avait qu'une longueur d'environ deux fois le diamètre du tube vertical, bien que la colonne s'élevât plus haut dans le tube.

C'est en ceci que consiste le phénomène dont nous avons particulièrement à nous occuper ici, parce qu'il en résulte que l'état d'oscillation quelconque, même abstraction faite des phénomènes de succion dans les ajutages, diminue en général la moyenne des pressions à une certaine profondeur au-dessous du niveau d'équilibre stable d'une masse liquide. Pour mieux encore préciser cette idée, je ferai mention ici d'un phénomène parfaitement analogue dans un siphon renversé d'égal diamètre partout, et portant latéralement un tube normal à son axe, débouchant de la même manière dans un réservoir latéral. Je l'ai observé avec des tubes de même diamètre que ci-dessus. Mais il faut évidemment, pour bien faire l'expérience, que le réservoir n'ait qu'un diametre analogue à celui du siphon; l'eau de ce petit réservoir baissait jusqu'à une certaine profondeur au-dessous du niveau d'équilibre stable de la colonne oscillante, et cela pendant plusieurs périodes consécutives.

Il faut maintenant revenir sur un détail essentiel dans ce genre d'appareils, non-seulement dans le but de bien faire voir quelques-unes de leurs propriétés, mais dans celui de montrer les précautions à prendre pour que les expériences précédentes soient concluantes.

Quand le tube latéral est très-court, il y a des époques où l'eau est repoussée de dedans en dehors du tube vertical au lieu d'y être aspirée. Or, si l'on n'avait pas un moyen de se débarrasser de ce mouvement alternatif, il resterait quelque doute sur un point capital; il serait, en effet, difficile de savoir si une partie essentielle de la force de succion ne serait pas seulement apparente, et ne proviendrait pas tout simplement de ce que l'eau du tube latéral éprouverait moins de résistances passives dans un sens que dans l'autre.

Le moyen de se débarrasser de cette difficulté est, comme je l'ai dit plus haut, parfaitement analogue pour nos pièces fixes à celui que l'on emploie dans les machines à pièces mobiles où l'on *emmagasine* la force vive dans une masse, de manière à ce que son mouvement persiste toujours dans un même sens, bien que la résistance surpasse périodiquement la puissance.

Si le tuyau latéral a une longueur analogue a celle du tuyau vertical et un diamètre égal partout, cette longueur ne suffit pas pour que la force vive s'emmagasine dans la colonne horizontale de façon à ce que la vitesse persévère toujours dans un même sens. Mais si l'on rétrécit graduellement la partie intermédiaire, en disposant entre deux tubes coniques un tube plus étroit que leur plus grande base, alors il n'en est plus ainsi, pourvu que le diamètre de ce tube intermédiaire ne soit pas encore trop grand par rapport à celui de ces extrémités. Il n'est pas, du reste, nécessaire que les raccords soient exécutés d'une manière bien parfaite. Le tuyau intermédiaire n'ayant qu'un diamètre d'environ les deux cinquièmes de celui de ces extrémités, il y avait encore un mouvement de va-et-vient dans ce tuyau; mais, pour le rendre tout à fait sans oscillation rétrograde dans cette partie, il suffisait d'introduire dans ce tuyau un tube de verre à parois un peu épaisses, d'un diamètre environ moitié moindre.

La composante de la pression du vent qui s'exerce de haut en bas semblerait, au premier aperçu, devoir compenser les diminutions dans les pressions des colonnes liquides oscillantes entre les rochers, par suite du mouvement des flots. Je remarquerai d'abord, à ce sujet que la pression, motrice s'exerçait aussi précisément de haut en bas dans les expériences que j'ai rapportées, où cependant la succion latérale était très-puissante par rapport à la course verticale de la colonne en oscillation au-dessous d'un niveau extérieur. Je remarquerai, en second lieu, que la puissance de cette succion est d'autant plus évidente que les résistances passives sont moindres; or, dans les grandes masses liquides en oscillation entre les rochers, les résistances passives seront, en général, bien moindres par rapport à la force vive que dans des tubes d'un petit diamètre.

Pour se rendre compte de la manière dont les choses se passent, il faut faire attention que les flots ne se soulèvent pas instantanément. Ils s'élèvent graduellement sous l'action de la force motrice, en augmentant de grandeur comme toutes les oscillations sur lesquelles une force motrice agit alternativement. Il en résulte qu'en définitive le poids des flots est très-considérable par rapport à celui auquel on pourrait comparer la force du vent sur une surface d'une grandeur analogue à leur base. La Coudraye, pour en donner une idée très-imparfaite et vraisemblablement bien au-dessous de la vérité, a trouvé dans un essai de calcul que le poids des flots est plus de cent soixante-seize fois plus grand que la force du vent qui les entretient, estimée en poids d'une manière analogue. Or, en supposant avec lui les oscillations sensiblement isochrones, on pourait obtenir un résultat plus approché de la vérité en observant de combien les flots baissent en un temps donné apres la cessation du vent. On sait d'ailleurs que la mer est assez longtemps à se calmer pour que la différence de deux élévations consécutives soit en général très-faible. La force du vent qui maintenait les flots à une hauteur donnée, en faisant équilibre aux résistances passives, était donc aussi très-faible par rapport au poids de la masse liquide soulevée au-dessus du niveau de l'eau tranquille. On voit, d'aprés cela, que s'il en est ainsi jusqu'à un certain point pour les masses liquides en balancement dans les rochers qui d'ailleurs abritent plus ou moins le sommet de ces masses liquides, il y a nécessairement des localités où elles exercent une assez puissante succion à l'embouchure des cours d'eau souterrains qui se jettent dans la mer ou dans les grands lacs.

Tout ce que nous venons de dire suppose seulement que les colonnes liquides se balancent entre les rochers, abstraction faite encore du système de mouvements intérieurs qui se présente dans les flots. Mais il résulte des expériences que j'ai faites sur le mouvement des flots dans un canal rectangulaire, que sur le fond du canal les molécules ont un mouvement de va-et-vient analogue à celui de l'eau dans la branche horizontale d'un siphon renversé. Ces expériences ne pouvant être bien décrites que dans une Note séparée, j'énonce seulement ici ce fait, afin de faire pressentir que les considérations objet de cet article ne doivent pas être négligées dans le calcul des actions mutuelles des grandes masses d'eau, et que du moins, même abstraction faite des longues colonnes liquides en balancement dans les rochers, il y a lieu de penser que les vagues les plus régulières doivent, dans les détroits, donner lieu à des succions sur l'embouchure des cours d'eau souterrains. Dans les régions supérieures des masses liquides en ondulation, il se présente des espèces de tourbillons elliptiques dans des plans verticaux ; nous verrons de quelle manière on doit y avoir égard.

CONCLUSIONS.

Il résulte des expériences et des considérations précédentes, que le mouvement oscillatoire des liquides présente une nouvelle cause de succion, bien distincte des phénomènes de succion dans les ajutages et de communication latérale du mouvement dans les liquides.

L'appareil objet de cette Note offre un nouveau principe de transformation élémentaire du mouvement alternatif *irrégulier* en mouvement *continu sans pièce mobile*, qui pourra être appliqué aux appareils décrits dans mes précédents Mémoires. Toutes les nouvelles transformations élémentaires peuvent d'ailleurs être susceptibles d'applications ultérieures, abstraction faite de celles que l'inventeur peut proposer lui-même.

Il serait sans doute difficile de prévoir le degré d'utilité que ce nouvel appareil sans pièce mobile pourra avoir dans l'application de la puissance des flots ou *d'un moteur quelconque irrégulier;* mais on peut au moins le considérer comme le premier essai qui ait été proposé pour expliquer par les lois de l'hydraulique les phénomènes curieux du mouvement des eaux qui, partant d'un niveau inférieur à celui de la mer autour des îles où elles se trouvent, semblent cependant ne s'écouler que dans la mer. On verra, dans un prochain Mémoire sur les ondes, comment les principes précédents modifient de diverses manières les actions mutuelles des masses liquides en ondulation [*].

---

[*] Le principe de la puissance de succion qui vient d'être developpé ayant, comme on le verra dans un prochain Mémoire, beaucoup plus d'utilité qu'on ne pourrait le penser au premier aperçu, M. Combes a bien voulu, à ma prière, le verifier par des moyens analytiques differents de ceux que j'avais employes; il est parvenu au même resultat que moi et m'a autorisé à publier la Note suivante à la fin du présent travail. L'accord des resultats obtenus par des methodes si différentes est un sûr garant de leur exactitude.

Calcul de la pression exercée dans le sens vertical par une colonne liquide d'un diamètre uniforme oscillant dans un siphon à branches verticales; par M. Combes.

Si une colonne fluide *amb* oscille dans un siphon à branches verticales, la pression que le liquide exerce sur le siphon dans le sens vertical varie à chaque instant, avec la position et la vitesse de la colonne liquide. Si l'on désigne par q le poids spécifique du liquide, par a la section constante de la colonne, par L sa longueur développée, par H la distance verticale variable entre le niveau du fluide, dans les deux branches, par P la pression que le fluide exerce sur le siphon dans le sens vertical, on a

$$P = qaL + \frac{qa}{L}(H_0^2 - 2H^2),$$

H_0 désignant la valeur initiale de H, la hauteur sous laquelle l'oscillation a commencé.

Le poids de la colonne liquide est qaL. Il est augmenté, pendant la durée de l'oscillation, de $\frac{qa}{L}(H_0^2 - 2H^2)$, quantité qui peut être négative, positive ou nulle.

Ainsi, au commencement de l'oscillation, on a

$$H = H_0, \quad P = qaL - \frac{qa}{L}H_0^2;$$

le poids est diminué de celui d'une colonne liquide ayant pour hauteur $\frac{H_0^2}{L}$.

A la fin de l'oscillation, on a également

$$H = -H_0, \quad H^2 = H_0^2, \quad P = qaL - \frac{qa}{L}H_0^2.$$

Au milieu de l'oscillation, quand le fluide est de niveau dans les deux branches, $H = 0$; le poids est augmenté de $\frac{qaH_0^2}{L}$, autant qu'il est diminué au commencement et à la fin de l'oscillation. C'est le maximum de l'augmentation, comme le maximum de la diminution.

Le poids moyen, pendant toute la durée d'une oscillation, est égal au poids de la colonne liquide elle-même.

Ce poids moyen est l'intégrale $\frac{\int_0^T P\,dt}{T}$, T désignant la durée d'une oscillation complète. Or on a

$$T = \frac{\pi\sqrt{L}}{\sqrt{2g}},$$

et il est facile de voir que l'intégrale

$$\int_0^T H^2 dt = \frac{\pi}{2}\frac{H_0^2\sqrt{L}}{\sqrt{2g}},$$

de sorte que

$$H_0^2 T = 2\int_0^T H^2\,dt,$$

T désignant toujours la durée complète d'une oscillation.

L'équation multipliée par dt et intégrée entre les limites o et T, se réduit, en conséquence, à

$$\int_0^T P\,dt = qaL \times T,$$

d'où

$$\frac{\int_0^T P\,dt}{T} = qaL,$$

poids de la colonne liquide en équilibre.

Si les branches du siphon n'étaient point verticales, on aurait pour la pression sur le siphon, dans le sens de la verticale,

$$P = qaL + \frac{qa}{g}u^2(\cos\gamma_0 - \cos\gamma_1) - qa\frac{H^2}{L},$$

équation dans laquelle u est la vitesse du liquide à l'instant que l'on considère, γ_0, γ les angles respectifs que forment avec la verticale les tangentes aux deux extrémités de l'axe de la colonne liquide oscillante. Si le tube est recourbé, γ_1 est toujours un angle obtus dont le cosinus est négatif. Quand les deux branches sont verticales, on a

$$\cos\gamma_0 - \cos\gamma_1 = 1 + 1 = 2;$$

et comme on a aussi

$$u^2 = \frac{g}{2L}(H_0^2 - H^2),$$

on retombe sur la formule donnée d'abord.

Si l'appareil se réduit à un simple tube vertical, dans lequel une colonne d'eau tombe librement, on a

$$\gamma_0 = 0, \quad \gamma_1 = 0, \quad \cos\gamma_0 - \cos\gamma_1 = 1 - 1 = 0.$$

D'ailleurs $H = L$, et l'on trouve $P = 0$, ce qui est évident.

Ces formules sont une conséquence du principe de d'Alembert, ou du principe des forces vives.

Quand un corps pesant, soumis à des liaisons quelconques, prend un mouvement, le *poids moyen* de ce corps, dans le système dont il fait partie, est égal à son propre poids, toutes les fois que l'on prend ce poids moyen pendant un intervalle de temps, au commencement et à la fin duquel les vitesses du corps pesant dans le *sens vertical*, sont égales et de même sens. Cette proposition est une conséquence des premières notions sur les forces. En effet, soient Q le poids réel d'un corps, P son poids dans le système, c'est-à-dire l'action que ce corps exerce sur le système, dans le sens vertical, de haut en bas, et que le système exerce à son tour sur lui dans le sens vertical de bas en haut,

u_0, u_1 les vitesses du corps, dans le sens vertical, au commencement et à la fin d'un temps donné T. On a, conformément aux principes de la proportionnalité des forces aux quantités de mouvement qu'elles impriment, et de l'indépendance de l'action des forces, ou de leurs composantes,

$$QT - \int_0^T P\,dt = \frac{Q}{g}(u_1 - u_0).$$

Si donc $u_1 = u_0$,

$$\int_0^T P\,dt = QT; \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ce principe, vrai pour un corps pesant, s'étend à un ensemble quelconque de corps pesants, même quand on suppose que ces corps sont liés entre eux d'une manière quelconque, ou même s'attirent et se repoussent mutuellement.

Le poids moyen de l'ensemble dans le système sera égal au poids réel de l'ensemble, toutes les fois que ce poids moyen sera pris pendant un intervalle de temps aux extrémites duquel les sommes algébriques des quantités de mouvement de tous les corps pesants, *dans le sens vertical*, seront égales entre en elles. En effet, pour un seul corps pesant, on a

$$QT - \int_0^T P\,dt = \frac{Q}{g}(u_1 - u_0),$$

P designant ici la resultante de toutes les forces de liaison appliquées au poids Q, estimées dans le sens vertical de bas en haut, y compris les actions des autres corps sur le corps Q.

On a, de même, pour un autre corps qui pèse Q',

$$Q'T - \int_0^T P'\,dt = \frac{Q'}{g}(u'_1 - u'_0);$$

pour un troisieme, dont le poids est Q'',

$$Q''T - \int_0^T P''\,dt = \frac{Q'}{g}(u''_1 - u''_0);$$

etc.

Ajoutant toutes ces equations,

$$(Q + Q' + Q'' + \ldots)\,T - \int_0^T (P + P' + P'' + \ldots)\,dt$$
$$= \frac{Q}{g}u_1 + \frac{Q'}{g}u'_1 + \frac{Q''}{g}u''_1 + \ldots - \left(\frac{Q}{g}u_0 + \frac{Q'}{g}u'_0 + \frac{Q''}{g}u''_0 + \ldots\right).$$

Si le second membre est nul, le premier l'est aussi. Donc

$$(Q + Q' + Q'' + \ldots) T = \int_0^T (P + P' + P'' + \ldots)\, dt.$$

Or, dans la somme $P + P' + P'' + \ldots$, les forces d'attraction et de répulsion mutuelle disparaissent naturellement, parce qu'elles sont deux à deux egales et directement opposées (action et réaction); il ne reste donc plus que la somme des actions des points fixes du système sur l'ensemble des poids. Donc, etc.

Ainsi, dans l'oscillation d'un pendule, le poids moyen du pendule dans le système est egal à son poids réel, si l'on prend ce poids moyen pendant une demi-oscillation descendante, ou pendant une demi-oscillation montante, parce que, au commencement et à la fin de ces intervalles, les vitesses verticales du pendule sont égales (elles sont nulles).

Dans une colonne liquide qui oscille, quelle que soit sa forme, le poids moyen de la colonne est égal à son poids réel, en prenant ce poids moyen pendant une demi-oscillation, c'est-à-dire depuis le moment où la colonne commence à se mouvoir jusqu'au moment où son centre de gravité est au point le plus bas, ou pendant une oscillation entière.

Lorsqu'une colonne liquide oscille dans un siphon à branches verticales, la pression sur un point m de la paroi verticale est donnée par l'équation

$$p = h - \frac{h}{g} \frac{du}{dt};$$

h exprimant la hauteur actuelle du niveau du liquide au-dessus du point considéré, et u la vitesse de la colonne liquide. Comme on a

$$\frac{du}{dt} = g \frac{H}{L},$$

cette expression devient

$$p = h \left(1 - \frac{H}{L}\right),$$

L étant la longueur totale de la colonne et H la différence variable du niveau dans les deux branches, qui est d'abord positive, et ensuite négative.

En appelant h_0 et H_0 les valeurs de h et H au commencement de l'oscillation, on a la relation

$$h_0 - h = \frac{1}{2}(H_0 - H),$$

d'où

$$h = h_0 - \frac{1}{2} H_0 + \frac{1}{2} H,$$

et

$$p = \left(h_0 - \frac{1}{2} H_0 + \frac{1}{2} H\right)\left(1 - \frac{H}{L}\right);$$

la pression moyenne pendant l'oscillation

$$\frac{\int_0^T p dt}{T} = h_0 - \frac{1}{2} H_0 + \frac{1}{2} \frac{\int_0^T H dt}{T} - \frac{h_0 - \frac{1}{2} H}{LT} \int_0^T H dt - \frac{1}{2LT} \int_0^T H^2 dt.$$

T désignant la durée complète d'une oscillation.

Or, l'intégrale

$$\int_0^T H dt = 0,$$

car on a

$$\int_0^T H dt = \int_0^T \frac{L}{g} du,$$

et la vitesse devient nulle à l'origine et à la fin de l'oscillation : d'un autre côté

$$\int_0^T H^2 dt = \frac{TH_0^2}{2};$$

on a donc, pour la pression moyenne,

$$h_0 - \frac{1}{2} H_0 - \frac{H_0^2}{4L}.$$

La pression sur le point m, dans le cas où le liquide aurait été stagnant et de niveau dans les deux branches, serait évidemment mesurée par la hauteur $h_0 - \frac{1}{2} H$. La pression moyenne, dans l'état de mouvement, est donc inférieure à la pression qui aurait lieu, dans l'état de repos, d'une quantité mesurée par une hauteur de colonne liquide égale à $\frac{H_0^2}{4L}$.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CENTRES DE GRAVITÉ;

Par E. BRASSINE,

Professeur à l'École d'Artillerie de Toulouse

Théorème I^{er}. — *Les centres de gravité de l'aire et du contour, d'un polygone circonscrit à une circonférence, sont toujours situés sur une droite qui passe par le centre de cette circonférence.*

Théorème II. *Les distances des centres de gravité de l'aire et du contour du polygone, au centre de la circonférence inscrite, sont entre elles dans le rapport de* 2 *à* 3.

Ces théorèmes, qui ont lieu pour un triangle quelconque, s'appliqueraient aussi à un polygone gauche, dont les côtés seraient tangents à une sphère; seulement il faudrait, dans ce cas, remplacer l'aire polygonale par la somme des aires triangulaires qui ont leur sommet commun au centre de la sphère, et pour base les côtés du polygone circonscrit.

Observons que si le centre de gravité du contour polygonal coïncide avec le centre de circonférence qui lui est inscrite, il en sera de même du centre de gravité de l'aire du polygone.

Théorème III. *Le centre de gravité d'un polyèdre circonscrit à une sphère est situé sur la droite qui joint le centre de gravité de l'aire de ce polyèdre avec le centre de la sphère inscrite.*

Théorème IV. *Les distances du centre de gravité du polyèdre et du centre de gravité de son aire au centre de la sphère inscrite, sont entre elles dans le rapport de* 3 *à* 4.

Ces théorèmes, qui sont vrais pour une pyramide triangulaire quelconque, font voir clairement que si le centre de gravité de la surface du polyedre coïncide avec le centre de la sphère inscrite, il en sera de même du centre de gravité du polyedre lui-même.

Théorème V. — Il est aisé de démontrer que si l'on circonscrit un cône à un ellipsoïde quelconque, la droite qui joint le sommet de ce cône avec le centre de la courbe de contact passe toujours par le centre de l'ellipsoïde, d'où il résulte évidemment que, si l'on regarde la courbe de contact comme la base qui termine le cône circonscrit, *les centres de gravité du cône, de l'ellipsoïde et de l'ellipse de contact seront en ligne droite.*

Pour démontrer les quatre premiers théorèmes, il suffit de décomposer le polygone ou le polyèdre en triangles, ou en pyramides triangulaires ayant leurs sommets communs au centre du cercle inscrit ou de la sphère inscrite. On placera ensuite aux trois sommets de chaque triangle, ou aux quatre sommets de chaque pyramide, des masses sphériques égales, ayant leurs centres à ces sommets, et proportionnelles à leurs aires ou leurs volumes, c'est-à-dire à leurs bases; en composant les poids de ces masses, on arrivera aisément aux théorèmes énoncés.

Nous observerons en terminant que ce mode de démonstration fait trouver, d'une manière immédiate, toutes les constructions qu'on a imaginées pour déterminer les centres de gravité des polygones ou des polyèdres quelconques Nous nous contenterons de citer les exemples suivants :

1°. Les constructions employées par M. Poinsot, dans la sixième édition de sa *Statique*, pour déterminer les centres de gravité du trapèze ou du tronc de pyramide triangulaire, deviennent évidentes si l'on décompose le trapèze en deux triangles, et qu'on place à leurs sommets respectifs des sphères égales proportionnelles à leurs aires ou aux bases du trapèze, ou si l'on décompose le tronc en trois pyramides triangulaires, aux sommets de chacune desquelles on placera des sphères égales, ayant leurs centres à ces sommets et leurs masses proportionnelles aux volumes respectifs des pyramides.

2°. Le théorème de Monge relatif au centre de gravité de la pyramide triangulaire, et qui consiste en ce que le centre de gravité de la pyramide est le milieu de la droite qui joint les milieux des aretes opposées, devient une conséquence évidente de la composition de quatre poids égaux placés aux quatre sommets de la pyramide, en ayant soin de composer deux à deux les poids placés aux extrémités des aretes opposées.

3°. Considérons enfin un quadrilatere plan, dont les sommets successifs soient A, B, C, D: la diagonale AC coupe la diagonale BD en deux segments, que nous appellerons m, m', et qui sont proportionnels aux aires des triangles ACB, ACD. Cela posé, en plaçant aux sommets du premier triangle trois masses sphériques égales, ayant leurs centres en ces points, et représentées en grandeur par m, et aux sommets du second trois masses sphériques égales représentées par m', on arrivera immédiatement à cette conséquence, savoir, *que le centre de gravité du quadrilatère se trouve sur la droite qui joint le milieu de la diagonale* AC *avec le point de la diagonale* BD, *qui sépare les deux segments* m *et* m' *placés dans un ordre inverse.*

Ces exemples suffisent pour montrer la simplicité des considérations précédentes et l'usage qu'on peut en faire pour la détermination des centres de gravité.

THÉORÈMES NOUVEAUX

SUR L'ÉQUATION INDÉTERMINÉE

$$x^5 + y^5 = az^5;$$

Par M. LEBESGUE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Si dans cette équation on fait $a = AB^5$, B^5 étant la plus grande cinquième puissance qui divise a, on la remplacera, en posant $Bz = u$, par l'équation

$$x^5 + y^5 = Au^5,$$

où l'on pourra supposer x, y premiers entre eux, et par conséquent à u et à A. Dans cette équation, x est positif, mais y peut être positif ou négatif. Si l'on suppose maintenant A sans diviseur premier de forme $10m + 1$, il paraît probable que l'équation

$$x^7 + y^5 = Au^5$$

est impossible, ou du moins n'a que les solutions qui se présentent immédiatement; telles sont

$$u = 0, \quad x = -y = 1,$$

et pour $A = 2$,

$$x = y = u = 1.$$

Voici ce que M. Dirichlet a démontré à cet égard (*Journal de M. Crelle*, tome III, page 354) :

1°. Si A est multiple de 5, et que la plus haute puissance de 5 qui divise A ne soit pas $5^2 = 25$, l'équation est impossible;

2°. Si A n'est pas divisible par 5, et que la division par 25 donne un des restes ± 3, ± 4, ± 9, ± 12, l'équation est impossible;

3°. L'équation est impossible pour $A = 1$.

Voici ce que j'ai ajouté aux propositions connues :

1°. L'équation est toujours impossible quand A est divisible par 5;

2°. Si A n'est pas divisible par 5, et que la division par 25 donne un des huit restes ± 2. ± 6, ± 8, ± 11, l'équation est impossible.

Le cas de A non divisible par 5, et donnant, quand on le divise par 25, un des restes ± 1, ± 7, reste à examiner, et ne paraît pas pouvoir se traiter comme les précédents, si ce n'est pour le cas de l'équation

$$x^{10} \pm y^{10} = Az^5,$$

qui est généralement impossible quand A n'a point de facteurs premiers de forme $10m + 1$.

Dans un premier paragraphe je rappellerai diverses propositions connues; dans un second je démontrerai synthétiquement les anciens théorèmes et les nouveaux. Le premier paragraphe indique clairement ce qui m'a guidé dans l'ordre établi entre les diverses propositions du second.

§ I.

Propositions préliminaires.

1°. Si n représente un nombre premier impair, on sait que l'équation

$$x^n + y^n = Az^n$$

se ramène à une équation semblable où x, y, z sont premiers entre eux. (Ici nous supposons x, z positifs; le signe de y est quelconque.) Pour le faire voir, il suffit de remplacer a par Ab^n; A n'étant plus divisible par aucune $n^{ième}$ puissance, on fera $bz = u$, et l'on aura

$$x^n + y^n = Au^n;$$

sous cette forme on voit que le facteur commun à x, u; y, u; x, y disparaît par la division.

2°. On a

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1}).$$

Si l'on fait $x + y = s$, le second facteur devient

$$\frac{x^n + y^n}{x + y} = \frac{x^n + (s - x)^n}{s} = s^{n-1} - ns^{n-2}x + \ldots + nx^n.$$

Sous cette forme on voit de suite que les deux facteurs de $x^n + y^n$, savoir,

$$x + y \quad \text{et} \quad (x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1}),$$

seront premiers entre eux quand $x^n + y^n$ ne sera pas multiple de n; mais que, si cela arrive, ils seront tous les deux divisibles par n, de sorte que $x^n + y^n$ le sera par n^2. De plus

$$x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1}$$

ne sera divisible que par la première puissance de n.

3°. Euler a prouvé (voyez la *Théorie des nombres* de Legendre) que le facteur

$$x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1},$$

nombre essentiellement impair, outre le facteur n, qui peut s'y trouver à la première puissance seulement, n'a que des facteurs premiers de forme $2kn + 1$. On suppose n premier [*].

---

[*] Je remarquerai en passant qu'on déduit de là qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $2kn + 1$. Si, en effet, il n'y en avait qu'un nombre limité $p_1, p_2, \ldots, p_k$, le nombre

$$z^{n-1} - z^{n-2} + \ldots + z + 1$$

serait divisible par quelqu'un des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_k$; or si l'on fait

$$z = p_1 p_2 \ldots p_k,$$

cette quantité devenant

$$p_1 p_2 \ldots p_k Q + 1,$$

ne sera divisible par aucun des nombres $p_1 p_2 p_3 \ldots p_k$. Cette proposition est un cas particulier de celle-ci : Toute proposition arithmétique a, $a + b$, $a + 2b, \ldots$ (ou bien la formule $a + bx$) renferme une infinité de nombres premiers, quand a est premier à b. (*Voyez* la démonstration de M. Dirichlet, dans ce Journal, tome IV, page 393

4°. Donc l'équation

$$x^n + y^n = Az^n,$$

où les inconnues sont premières entre elles, pour le cas de A sans facteur premier de forme $2kn+1$, se décomposera ainsi, en faisant $z = uv$ (u, v premiers entre eux, le second impair) :

1°. Pour Az^n divisible par n,

$$n(x+y) = Au^n, \quad x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1} = nv^n;$$

2°. Pour Az^n non divisible par n,

$$x+y = Au^n, \quad x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1} = v^n.$$

Par conséquent, si l'on fait $n = 5$, l'équation

$$x^5 + y^5 = Az^5,$$

où les inconnues sont premières entre elles et A sans facteur premier de forme $10k+1$, se décompose ainsi :

1°. $x^5+y^5 = Az^5$, Az^5 multiple de 5, $z = uv$, v impair, premier à u.

(A) $5(x+y) = Au^5, \quad x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = 5v^5;$

2°. $x^5+y^5 = Az^5$, Az^5 non multiple de 5, $z = uv$, v impair, premier à u,

(B) $x+y = Au^5, \quad x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = v^5.$

L'impossibilité de l'équation

$$x^5 + y^5 = Az^5$$

résulte donc de l'impossibilité des systèmes (A), (B). M. Dirichlet a prouvé l'impossibilité du système (A), mais seulement dans le cas de $x+y$ divisible par 25. Il reste à examiner le cas de $x+y$ divisible par 5, sans l'être par 25. Si le système (A) était impossible, dans ce cas il serait prouvé que l'équation

$$x^5 + y^5 = Az^5$$

est impossible toutes les fois que A est divisible par 5, car alors il faut avoir $x + y$ divisible par 5. La démonstration de M. Dirichlet exclut les nombres $A = 25B$, B n'étant pas divisible par 5. Le cas $A = 5B$ (B non divisible par 5) n'est pas exclu, car, comme $5(x+y)$ est divisible par 25, il faut supposer u divisible par 5, d'où $x + y$ divisible par 5^4 au moins. Voici donc le théorème de M. Dirichlet :

« L'équation

$$x^5 + y^5 = Az^5,$$

» où x est premier à y positif ou négatif, et A sans facteur premier » de forme $10k + 1$, est impossible quand A, multiple de 5, est tel » que la plus haute puissance de 5 qui divise A n'est pas la seconde. »

Pour la démonstration, telle que l'a donnée M. Dirichlet dans un Mémoire qui devait être inséré dans le *Recueil des Savants étrangers*, et qui a paru, avec un Supplément, dans le tome III du *Journal de M. Crelle*, il faut consulter cet ouvrage. J'ai changé un peu l'énoncé, pour réunir en une seule deux propositions du Mémoire cité.

Une conséquence du théorème précédent, c'est l'impossibilité de

$$x^5 + y^5 = z^5;$$

tout nombre ayant l'une des formes $5a$, $5a \pm 1$, $5a \pm 2$, les cinquièmes puissances auront les formes $25A$, $25A \pm 1$, $25A \pm 7$, d'où il suit qu'une des inconnues x, y, z est divisible par 5; et comme on peut isoler cette inconnue, on aura l'équation impossible

$$x^5 + y^5 = 5^{5a}u^5.$$

Quand A n'est pas divisible par 5, l'équation

$$x^5 + y^5 = Az^5$$

est impossible pour z multiple de 5; ainsi, z n'étant pas multiple de 5, on aura

$$z^5 = 25k \pm 1, \quad \text{ou} \quad 25k \pm 7.$$

De là

$$z^{10} = 25k + 1, \quad \text{ou} \quad 25k - 1.$$

L'équation

$$x^5 + y^5 = \mathrm{A} z^5,$$

étant multipliée par z^5, donne donc

$$\pm \mathrm{A} = (xz)^5 + (yz)^5 + 25\mathrm{Q}.$$

Comme on ne peut supposer $x + y$ multiple de 5, on ne pourra prendre

$$x = 5x' + r, \quad y = 5y' - r \quad (r \text{ étant } \pm 1, \text{ ou } \pm 2);$$

voici donc les seules hypothèses à faire :

1°. x ou y divisible par 5, il en résulte

$$\mathrm{A} = 25\mathrm{Q} \pm 1, \quad \mathrm{A} = 25\mathrm{Q} \pm 7:$$

2°. $x = 5k + r$, $y = 5k + r$ (r étant ± 1 ou ± 2); il en résulte $x - y$ divisible par 5 et $\pm \mathrm{A} = 2(rz)^5 + 25\mathrm{Q}$, d'où

$$\mathrm{A} = 25\mathrm{Q} \pm 2, \quad \mathrm{A} = 25\mathrm{Q} \pm 11;$$

3°. $x = 5k \pm 1$, $y = 5k \pm 2$, les signes étant pris comme on voudra; il en résulte $x^2 + y^2$ divisible par 5, et

$$\mathrm{A} = 25\mathrm{Q} \pm 6, \quad \mathrm{A} = 25\mathrm{Q} \pm 8.$$

On voit donc que les formes

$$\mathrm{A} = 25\mathrm{Q} \pm 3, \ \pm 4, \ \pm 9, \ \pm 12$$

ne se présentent point; d'où ce théorème :

« L'équation

$$x^5 + y^5 = \mathrm{A} z^5,$$

» où les inconnues x, y sont premières entre elles, A n'ayant aucun
» facteur premier de forme $10k + 1$, est impossible quand A, divisé
» par 25, donne un des huit restes ± 3, ± 4, ± 6, ± 12. »

Ce théorème est de M. Dirichlet, qui l'a démontré de même.

En examinant ces questions, j'ai été porté à penser que les équations

$$(C) \qquad x^4 - xy^3 + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = z^5,$$
$$(D) \qquad x^4 - xy^3 + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = 5z^5,$$

sont impossibles, sauf quelques solutions qui se présentent immédiatement.

Je n'ai pu jusqu'ici prouver cette impossibilité (qui peut-être n'existe que sous certaines conditions). Voici ce que j'ai trouvé pour l'équation (C). Elle peut prendre l'une des formes

$$(x+y)^4 - 5xy(x+y)^2 + 5x^2y^2 = r^5.$$
$$x(x-y)(x^2+y^2) = r^5 - y^4 = 5Q.$$

La première montre que $x + y$ et par suite r n'est pas divisible par 5; la seconde prouve qu'un des trois nombres x, $x - y$, $x^2 + y^2$ est divisible par 5, quand on suppose que y ne l'est pas.

J'ai prouvé l'impossibilité dans les deux derniers cas et j'en ai tire ces deux théorèmes, qui renferment ceux de M. Dirichlet :

« L'équation

$$x^5 + y^5 = Az^5,$$

» où les inconnues x, y (dont la seconde peut être négative) sont pre-
» mières entre elles, et où A n'a pas de facteur premier de forme
» $10k + 1$, est impossible :

» 1°. Quand A est divisible par 5;

» 2°. Quand A, divisé par 25, donne un des seize restes

$$\pm 2, \ \pm 3, \ \pm 4, \ \pm 6, \ \pm 8, \ \pm 9, \ \pm 11, \ \pm 12. \text{ »}$$

N. B. On voit que le cas des restes ± 1, ± 7 reste à examiner, et que, si l'équation (C) était impossible pour x divisible par 5, on aurait ce théorème plus général :

« L'équation

$$x^5 + y^5 = Az^5$$

» est impossible quand A n'a aucun facteur premier de forme
» $10m + 1$. »

J'emploierai dans mes démonstrations les deux propositions suivantes, qui forment la partie principale du travail de M. Dirichlet :

« I. Les nombres P et Q devant être premiers entre eux, l'un pair,
» l'autre impair, et le dernier devant être de plus divisible par 5, je dis
» que, pour égaler le binôme $P^2 - 5Q^2$ de la manière la plus générale
» à une cinquième puissance, il suffira de poser

$$P + Q\sqrt{5} = (f + g\sqrt{5})^5,$$

» ou

$$P = f(f^4 + 50f^2 g^2 + 125 g^4), \qquad Q = 5g(f^4 + 10f^2g^2 + 5g^4 ;$$

» les indéterminées f et g étant premières entre elles, l'une paire.
» l'autre impaire, et la première non divisible par 5. » (Journal de M. Crelle, tome III, page 361.)

« II. Les nombres P et Q devant être premiers entre eux et impairs
» l'un et l'autre et le dernier devant être divisible par 5, je dis que,
» pour égaler le binôme $P^2 - 5Q^2$ au quadruple d'une cinquième
» puissance avec toute la généralité convenable, il suffira de poser

$$16(P + Q\sqrt{5}) = (f + g\sqrt{5})^5,$$

» ou

$$16P = f(f^4 + 50f^2g^2 + 125g^4), \quad 16Q = 5g(f^4 + 10f^2g^2 + 5g^4);$$

» les nombres indéterminés f et g étant premiers entre eux, impairs
» l'un et l'autre, et le premier de plus non divisible par 5. » (Journal de M. Crelle, tome III, page 371.)

J'ajouterai qu'en posant

$$f = u + v, \quad g = u - v,$$

de sorte qu'un des nombres u, v soit pair et l'autre impair, on trouvera

$$P = (u + v)(11u^4 - 31u^3v + 41u^2v^2 - 31uv^3 + 11v^4),$$
$$Q = 5(u - v)(u^4 - u^3v + u^2v^2 - uv^3 + v^4).$$

Cette transformation servira plus loin.

§ II.

Proposition I. L'équation indéterminée

$$a^2 = b^4 + 50 b^2 c^2 + 125 c^4$$

est impossible.

Démonstration. On commence par faire disparaître le facteur θ, commun à b et à c, en remplaçant a par $\frac{a}{\theta^2}$; puisque a^2 se trouve divisible par θ^4, supposons donc de suite b, c premiers entre eux, il en résulte que a et c sont premiers entre eux; autrement b et c auraient un facteur commun. Il en sera de même pour a et b, car si θ était un diviseur premier commun, θ^2 diviserait $125\, c^4$ et par suite 125: donc θ serait 5: mais alors le deuxième membre étant divisible par 5^3 seulement, n'est pas carré. Ainsi a, b, c sont premiers entre eux; a et b sont premiers à 5.

Cela posé, distinguons plusieurs cas :

1°. b pair, c impair, le deuxième membre prenant la forme $8k+5$, l'équation est impossible;

2°. b impair, c pair. On fera $c = 2^i d$, d étant impair, il viendra

$$a^2 = b^4 + 2^{2i+1} 25 b^2 d^2 + 2^{4i} 125 d^4,$$

ou

$$a^2 = (b^2 + 2^{2i} 25 d^2)^2 - 2^{4i+2} 5^3 d^4,$$

ou

$$(b^2 + 2^{2i} 25 d^2)^2 - a^2 = 2^{4i+2} 5^3 d^4.$$

ou

$$(b^2 + 2^{2i} 25 d^2 + a)(b^2 + 2^{2i} 25 d^2 - a) = 2^{4i+2} 5^3 d^4.$$

Or a, b sont impairs et premiers à 5; de là résulte que les facteurs

$$b^2 + 2^{2i} 25 d^2 + a, \quad b^2 + 2^{2i} 25 d^2 - a.$$

ont 2 pour diviseur commun et n'en ont pas d'autre; on décomposera d en deux facteurs f, g premiers entre eux, et il faudra poser l'une des équations suivantes :

$$\begin{array}{lllll} b^2 + 2^{2i} 25 d^2 + a = 2 f^4, & & = 2^{4i+1} 5^3 g^4, & = 2.5^3 f^4, & = 2^{4i-1} g^4. \\ b^2 + 2^{2i} 25 d^2 - a = 2^{4i+1} 5^3 g^4. & = 2^{2i+1} f^4. & & = 2^{4i+1} g^4. & = 2.5^3 2 f^4. \end{array}$$

les deux derniers donnent par addition, puisque $d = fg$,

$$b^2 = 5^5 f^4 - 2^{2i} 25 f^2 g^2 + 2^{4i} g^4 = 8k + 5, \text{ impossible};$$

les deux premiers

$$b^2 = f^4 - 2^{2i} 25 f^2 g^2 + 2^{4i} 5^3 g^4 \quad \text{où} \quad i > 1,$$

ou bien

$$(f^2 - 2^{2i-1} 5^2 g^2)^2 - b^2 = 2^{4i-2} 5^3 g^4;$$

et comme

$$f^2 - 2^{2i-1} 5^2 g + b, \quad f^2 - 2^{2i-1} 5^2 g^2 - b,$$

ont 2 pour diviseur commun, ou posera, pour $f^2 - 2^{2i-1} 5^2 g$ positif, en faisant $g = hk$,

$$\begin{aligned} f^2 - 2^{2i-1} 5^2 g^2 \pm b &= 2h^4, & &= 2.5^3 h^4, \\ f^2 - 2^{2i-1} 5^2 g^2 \mp b &= 2^{4i-3} 5 k^4, & &= 2^{4i-3} k^4; \end{aligned}$$

pour $f^2 - 2^{2i-1} 5^2 g^2$ négatif, on aura, au contraire,

$$\begin{aligned} 2^{2i-1} 5^2 g^2 - f^2 \pm b &= 2h^4, & &= 2.5^3 h^4, \\ 2^{2i-1} 5^2 g^2 - f^2 \mp b &= 2^{4i-3} 5^3 k^4, & &= 2^{4i-3} k^4; \end{aligned}$$

on a donc, par addition, les quatre équations

$$\begin{aligned} f^2 &= h^4 + 2^{2i-1} 5^2 h^2 k^2 + 2^{4i-4} 5^3 k^4, \\ f^2 &= 5^3 h^4 + 2^{2i-1} 5^2 h^2 k^2 + 2^{4i-4} k^4 = 8k + 5, \\ -f^2 &= h^4 - 2^{2i-1} 5^2 h^2 k^2 + 2^{4i-4} 5^3 k^4 = 8k + 1, \\ -f^2 &= 5^3 h^4 - 2^{2i-1} 5^2 h^2 k^2 + 2^{4i-4} k^4 = 8k + 5; \end{aligned}$$

les trois dernières sont impossibles; la première peut s'écrire

$$f^2 = h^4 + 2^{2(i-1)+1} 5^2 h^2 k^2 + 2^{4(i-1)} 5^3 k^4,$$

qui diffère de

$$a^2 = b^4 + 2^{2i+1} 5^2 b^2 c^2 + 2^{4i} 5^3 b^4$$

par le changement de i en $i - 1$. On finira donc par tomber sur une équation toute semblable à l'équation proposée, où les inconnues du deuxième membre seront impaires.

3°. b, c impairs. L'équation devient alors, à cause de $i = 0$,

$$(b^2 + 5^2 c^2)^2 - a^2 = 4.5^3 c^4,$$

d'où, en faisant $c = df$, on tirera

$$b^2 + 5^2 c^2 \pm a = 2 d^4,$$
$$b^2 + 5^2 c^2 \mp a = 2.5^3 f^4,$$

et par suite

$$b^2 = d^4 - 5^2 d^2 f^2 + 5^3 f^4 = 8k + 5, \text{ impossible.}$$

L'équation est donc impossible dans tous les cas. On rejette la solution $c = 0$, $a = b = 1$.

Proposition II. L'équation

$$a^2 = b^4 + 10 b^2 c^2 + 5 c^4$$

se ramène toujours à une équation semblable où b, c sont impairs.

Démonstration. On démontre, comme plus haut, que a, b, c peuvent être considérés comme premiers entre eux, et que a et b sont premiers à 5. L'impossibilité est manifeste pour b pair et c impair; pour c pair $= 2^i d$, d étant impair, on aura, par des decompositions semblables aux précédentes,

$$a^2 = b^4 + 2^{2i+1} 5 b^2 d^2 + 2^{4i} 5 d^4,$$
$$(b^2 + 2^{2i} 5 d^2)^2 - a^2 = 2^{4i+2} 5 d^4;$$

et si l'on fait $d = fg$, f et g premiers entre eux, on aura

$$b^2 + 2^{2i} 5 d^2 \pm a = 2 f^4, \qquad = 2.5 f^4,$$
$$b^2 + 2^{2i} 5 d^2 \mp a = 2^{4i+1} 5 g^4, \quad = 2^{4i+1} g^4.$$

d'où

$$b^2 = f^4 - 2^{2i} 5 f^2 g^2 + 2^{4i} 5 g^4, \quad i > 1.$$
$$b^2 = 5 f^4 - 2^{2i} 5 f^2 g^2 + 2^{4i} \ g^4, \quad i = 1.$$

Cette dernière équation, multipliée par 4, revient à

$$(8 g^2 - 5 f^2)^2 - 4 b^2 = 5 f^4.$$

Soit $f = hk$; il viendra, en supposant successivement $8 g^2 - 5 f^2$ positif ou négatif,

$$8 g^2 - 5 f^2 \pm 2b = h^4, \quad 5 f^2 - 8 g^2 \pm 2b = h^4,$$
$$8 g^2 - 5 f^2 \mp 2b = 5 k^4, \quad 5 f^2 - 8 g^2 \mp 2b = 5 k^4;$$

d'où

$$\begin{aligned} 16g^2 &= h^4 + 10h^2k^2 + 5k^4, \\ -16g^2 &= h^4 - 10h^2k^2 + 5k^4 = 16Q - 4, \text{ impossible.} \end{aligned}$$

On est donc parvenu à l'équation

$$16g^2 = h^4 + 10h^2k^2 + 5k^4,$$

semblable à la proposée, mais où les inconnues du deuxième membre sont impaires.

L'équation

$$b^2 = f^4 - 2^{2i}5f^2g^2 + 2^{4i}5g^4, \quad (i > 1)$$

reste à considérer. Elle donne

$$(f^2 - 2^{2i-1}5g^2) - b^2 = 2^{4i-2}5g^4,$$

et si l'on fait $g = hk$, il en résulte

$$\begin{aligned} f^2 - 2^{2i-1}5g^2 \pm b &= 2h^4, & &= 2.5h^4, \\ f^2 - 2^{2i-1}5g^2 \mp b &= 2^{4i-3}5k^4, & &= 2^{4i-3}k^4; \\ 2^{2i-1}5g^2 - f^2 \pm b &= 2h^4, & &= 2.5h^4, \\ 2^{2i-1}5g^2 - f^2 \mp b &= 2^{4i-3}5k^4, & &= 2^{4i-3}k^4; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} f^2 &= h^4 + 2^{2i-1}5h^2k^2 + 2^{4i-4}5k^4, \\ f^2 &= 5h^4 + 2^{2i-1}5h^2k + 2^{4i-4}k^4 = 8k + 5, \\ -f^2 &= h^4 - 2^{2i-1}5h^2k^2 + 2^{4i-4}5k^4 = 8k + 1, \\ -f^2 &= 5h^4 - 2^{2i-1}5h^2k^2 + 2^{4i-4}k^4 = 8k + 5. \end{aligned}$$

Les trois dernières équations sont impossibles; la première revient à

$$f^2 = h^4 + 2^{2(i-1)+1}5h^2k^2 + 2^{4(i-1)}5k^4,$$

qui diffère de l'équation donnée par le changement de i en $i - 1$. On finira donc par tomber sur une équation semblable à la proposée, mais où les inconnues du second membre seront impaires

Une telle équation

$$a^2 = b^4 + 10b^2c^2 + 5c^4$$

est possible; la solution $b = c = 1$, $a = 4$ se présente de suite, et, au moyen de cette solution, on peut en trouver d'autres par la méthode de Fermat. J'indiquerai ailleurs le moyen de les trouver toutes.

Proposition III. L'équation

$$a^2 = b^4 + 10\,b^2c^2 + 5c^4$$

est impossible quand on suppose $c = 5h^2$ ou $10h^2$, ou plus généralement $c = 2^i 5h^2$.

Démonstration. On fera tous les calculs de la proposition précédente; dans chaque décomposition un des facteurs sera multiple de 5, il entrera dans le terme dont le coefficient est 5, de sorte que l'on finira par tomber sur une équation

$$a^2 = b^4 + 10\,b^2c^2 + 5c^4,$$

où b, c seront impairs et $c = 5d^2$, ou sur l'équation

$$a^2 = b^4 + 250\,b^2d^4 + 5^5d^8,$$

d'où

$$\begin{aligned}(b^2 + 125\,d^4)^2 - a^2 &= 4.5^5d^8, \quad d = gf,\\ b^2 + 125\,d^4 \pm a &= 2f^8,\\ b^2 + 125\,d^4 \mp a &= 2.5^5g^8;\end{aligned}$$

par suite

$$b^2 = f^8 - 5^3f^4g^4 + 5^5g^8,$$

ou

$$\begin{aligned}(2f^4 - 5^3g^4)^2 - 4b^2 &= 5^5g^8, \quad g=hk,\\ 2f^4 - 5^3g^4 \pm 2b &= h^8,\\ 2f^4 - 5^3g^4 \mp 2b &= 5^5k^8,\\ 5^3g^4 - 2f^4 \pm 2b &= h^8,\\ 5^3g^4 - 2f^4 \mp 2b &= 5^5k^8;\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}4f^4 &= h^8 + 2.5^3h^4k^4 + 5^5k^8 = 16\mathrm{Q},\\ -4f^4 &= h^8 - 2.5^3h^4k^4 + 5^5k^8.\end{aligned}$$

La première équation étant impossible, puisque f est impair, on n'aura que la seconde, qui revient à

$$4(h^8 - f^4) = 5\,(h^4 - 5^2k^4)^2.$$

Comme $h^4 - 5^2 k^4$, à cause de h^4 et k^4 de forme $16Q + 1$, est seulement divisible par 8, on aura

$$4(h^8 - f^4) = 5.64\, l^2;$$

en supposant l impair et $h^4 - 5^2 k^4 = 8l$, on aura donc

$$\begin{array}{lll} h^8 - f^4 = 80 l^2, & \text{soit } l = mn, & \\ h^4 + f^2 = 2l^2, & = 10 l^2, & \\ h^4 - f^2 = 40m^2, & = 8m^2. & \end{array}$$

Comme la différence de deux carrés impairs est divisible par 8 au moins, il faut rejeter la première décomposition, qui donne

$$h^4 = l^2 + 20m^2,$$

ou une différence de deux carrés impairs divisible par 4 seulement.

La seconde décomposition donne l'équation

$$h^4 = 4m^2 + 5l^2,$$

et si l'on fait $l = pq$, p et q étant des nombres impairs premiers entre eux, il en résultera la décomposition

$$h^2 \pm 2m = p^2, \quad h^2 \mp 2m = 5q^2, \quad \text{d'où} \quad 2h^2 = p^2 + 5q^2.$$

équation impossible, car $2h^2 - p^2$ n'est jamais divisible par 5 (autrement 2 n'est pas résidu quadratique de 5).

L'équation

$$a^2 = b^4 + 10 b^2 c^2 + 5c^4$$

est donc impossible dans l'hypothèse de $c = 5h^2$ et dans celle de $c = 10h^2$.

Proposition IV. Si x et y sont des nombres premiers entre eux dont le second peut être négatif, l'équation

$$x^4 - xy^3 + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = z^5$$

est impossible, quand on suppose $x - y$ divisible par 5, ou bien $x^2 + y^2$ divisible par 5.

Démonstration. Un des nombres x, y n'est pas divisible par 5, soit y, l'équation pourra s'écrire

$$x(x-y)(x^2+y^2) = z^5 - y^4.$$

Or z n'ayant que des facteurs premiers de forme $10k+1$, on a

$$z^5 = 1 + 50k.$$

On a, par le théorème de Fermat,

$$y^4 = 1 + 5Q,$$

donc $z^5 - y^4$ est divisible par 5; il faut donc qu'un des nombres x, $x-y$, y^2+x^2 le soit. On a supposé ici z non divisible par 5. ce qui résulte de ce qu'on a

$$(x+y)^2 - 5xy(x+y)^2 + 5x^2y^2 = z^5;$$

or si z était divisible par 5, $x+y$ le serait, et le premier membre, au lieu d'être divisible par 5^5, ne le serait que par 5.

Examinons d'abord le cas de $x-y$ divisible par 5 : on a

$$(3x^2 - 4xy + 3y^2)^2 - 5(x-y)^4 = 4z^5.$$

1°. Si $x-y$ est impair, il faudra poser

$$16(x-y)^2 = 5g(f^4 + 10f^2g^2 + 5g^4);$$

or $5g$ est premier à $f^4 + 10f^2g^2 + 5g^4$, donc

$$5g = 5^2k^2, \quad \text{d'où} \quad g = 5k^2, \quad \text{et} \quad l^2 = f^4 + 10f^2g^2 + 5g^4.$$

Or on sait que cette dernière équation est impossible pour $g = 5h^2$.

2°. Si $x-y$ est pair, comme on a

$$\left(\frac{3x^2 - 4xy + 3y^2}{2}\right)^2 - 5\left[2\left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right]^2 = z^5,$$

il faudra poser

$$z = f^2 - 5g^2 \quad \text{et} \quad 2\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = 5g(f^4 + 10f^2g^2 + 5g^4);$$

ainsi

$$5g = 2.25k^2,$$

ou

$$g = 10k^2, \quad l^2 = f^4 + 10f^2g^2 + 5g^4;$$

or cette équation est impossible pour $g = 10k^2$.

N. B. On excepte le cas $x = y$, qui donne $z = 1$.

Examinons maintenant le cas de $x^2 + y^2$ divisible par 5 ; on a

$$(x + y)^4 - 5(x^2 + y^2)^2 = 4(-z)^5.$$

Or comme les deux théorèmes de M. Dirichlet sur l'équation

$$P^2 - 5Q^2 = z^5$$

laissent le signe de z arbitraire, pour le cas de $x + y$ impair il faudra poser

$$(x + y)^2 = f(f^4 + 50f^2g^2 + 125g^4).$$

Comme f et $f^4 + 50f^2g^2 + 125g^4$ sont premiers entre eux, on devra avoir

$$f^4 + 50f^2g^2 + 125g^4 \text{ carré},$$

ou bien

$$h^2 = f^4 + 50f^2g^2 + 125g^4,$$

ce qui est impossible.

Si $x + y$ est pair, comme on a

$$\left[\frac{(x+y)^2}{2}\right] - 5\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 = (-z)^5,$$

il faudra poser

$$\frac{(x+y)^2}{2} = f(f^4 + 50f^2g^2 + 125g^2),$$

ou

$$(x + y)^2 = 2f(f^4 + 50f^2g^2 + 125g^4);$$

comme le deuxième facteur est impair et premier à $2f$, il faudra avoir

$$f^4 + 50f^2g^2 + 125g^4 \text{ carré},$$

ce qui a été démontré impossible.

Remarque. Pour démontrer généralement l'impossibilité de l'équation

$$x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = z^5,$$

il resterait à prouver l'impossibilité dans le cas de x divisible par 5.

Proposition V. L'équation

$$x^5 + y^5 = AB^5 z^5$$

est impossible quand A, multiple de 5, n'a pas de facteurs premiers de forme $10m + 1$.

Démonstration. On peut remplacer l'équation donnée par cette autre

$$x^5 + y^5 = Au^5,$$

où x et y sont premiers entre eux; comme $x + y$ est nécessairement divisible par 5, l'équation, si l'on y fait $u = pq$, se décomposera ainsi

$$5(x+y) = Ap^5, \quad x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = 5q^5;$$

p, q sont des nombres premiers entre eux dont le second est impair et non divisible par 5.

La seconde équation revient à

$$5(x^2 + y^2)^2 - (x + y)^4 = 20p^5,$$

ou

$$(x^2 + y^2)^2 - 5\left[5\left(\frac{x+y}{5}\right)^2\right]^2 = 4p^5;$$

pour $x + y$ pair, on lui donnera la forme

$$\left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right]^2 - 5\left[\frac{5}{2}\left(\frac{x+y}{5}\right)^2\right]^2 = p^5.$$

On aura donc pour $x + y$ impair

$$16\left(\frac{x+y}{5}\right)^2 = g(f^4 + 10f^2g^2 + 5g^4),$$

qui devient, en posant $f = u + v$, $g = u - v$,

$$\left(\frac{x+y}{5}\right)^2 = (u - v)(u^4 - u^3v + u^2v^2 - uv^3 + v^4),$$

et pour $x + y$ pair,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{5}\right)^2 = g(f^4 + 10f^2g^2 + 5g^4),$$

ou bien. en multipliant par 32, et posant $2f = u + v$, $2g = u - v$.

$$\left(\frac{x+y}{5}\right)^2 = (u - v)(u^4 - u^3 v + u^2 v^2 - u v^3 + v^4).$$

Or on a

$$\frac{x+y}{5} = \frac{Ap^5}{25};$$

si A est divisible par 25, et qu'on pose

$$A = 25B,$$

on aura

$$\left(\frac{x+y}{5}\right)^2 = B^2 p^{10} = (u - v)(u^4 - u^3 v - u^2 v^2 - u v^3 + v^4),$$

et comme

$$u^4 - u^2 v + u^2 v^2 - u v^3 + v^4.$$

qui n'est pas divisible par 5, puisque $u + v$ ne l'est pas, est premier à B, il faudra poser

$$u^4 - u^3 v + u^2 v^3 - u v^4 + v^4 = t^{10}, \quad \text{ou} \quad = w^5.$$

Si A est divisible par 5 seulement, il faudra faire

$$p = 5^\alpha q, \quad \text{d'où} \quad \frac{x+y}{5} = A\,5^{5\alpha-2} q^5,$$

et par suite

$$\left(\frac{x+y}{5}\right)^2 = A^2\,5^{10\alpha-4} q^{10} = (u - v)(u^4 - u^3 v + u^2 v^2 - u v^3 + v^4),$$

qui conduit à la même équation

$$u^4 - u^3 v + u^2 v^2 - u v^3 + v^4 = t^{10} \quad \text{ou} \quad = w^5.$$

Il suffit donc de montrer que l'équation précédente est impossible, par la raison que le cas de u ou v divisible par 5 ne peut se présenter.

1°. Le cas de $x + y$ divisible par 25 (celui traité par M. Dirichlet) exige que l'on ait $u - v$ divisible par 5; on sait qu'alors

$$u^4 - u^3 v + u^2 v^2 - u v^3 + v^4 = w^5$$

est impossible.

2°. Le cas de $x+y$, divisible par 5 seulement; revient à f^2+g^2, divisible par 5, et par suite à u^2+v^2, divisible par 5, puisqu'on a, dans le cas de $x+y$ impair,

$$f^2+g^2=2(u^2+v^2),$$

et dans celui de $x+y$ pair

$$2(f^2+g^2)=u^2+v^2.$$

En effet, dans le premier cas $(x+y)$ impair, on a

$$16(x^2+y^2)=f^5+5Q,\qquad \text{d'où}\quad 16^2(x^2+y^2)^2=f^{10}+5Q'.$$

$$16\left(\frac{x+y}{5}\right)^2=gf^4+5Q'',\quad \text{d'où}\quad 16^2\left(\frac{x+y}{5}\right)^4=g^2f^8+5Q''',$$

et par conséquent

$$16^2\left[(x^2+y^2)^2+\left(\frac{x+y}{5}\right)^2\right]=f^8(f^2+g^2)+5R.$$

Pour que f^2+g^2 soit divisible par 5, il faut et il suffit que

$$(x^2+y^2)^2+\left(\frac{x+y}{5}\right)^4$$

le soit. Posons

$$x+y=5s,$$

s n'étant pas divisible par 5.

$$x^2+y^2=5^2s^2-2xy,$$

il faudra donc avoir

$$(25s^2-2xy)^2+s^4,$$

divisible par 5, ou bien encore

$$4x^2y^2+s^4,$$

divisible par 5, mais

$$x=5s-y$$

donne

$$x^2=y^2+5R',\quad x^2y^2=y^4+5R'',$$

c'est donc $4y^4+s^4$ qui sera divisible par 5; or cela arrive toujours, puisque, y et s n'étant pas divisibles par 5, s^4 et y^4 ont la forme $5m+1$.

La démonstration reste la même pour $x+y$ pair, seulement la quantité $4x^2y^2+s^4$ se trouve divisée par 16.

On aurait pu prouver directement que le cas de u ou v divisible par 5 ne peut se présenter, car il répond à f^2-g^2 divisible par 5, ce qui conduit à $4y^4-s^4$ divisible par 5, y et s ne l'étant pas.

Proposition V. L'équation

$$x^5+y^5=AB^5z^5.$$

où A n'a pas de facteur premier de forme $10m+1$, est toujours impossible quand A, non divisible par 5, étant divisé par 25, donne un des seize restes

$$\pm 2.\ \pm 3,\ \pm 4.\ \pm 6,\ \pm 8.\ \pm 9,\ \pm 11,\ \pm 12,$$

plus simplement un reste autre que ± 1, ± 7).

Démonstration. On ramènera l'équation à cette autre

$$x^5+y^5=Au^5.$$

où x. y sont premiers entre eux, et, posant

$$u=pq,$$

on décomposera ainsi l'équation :

$$(x+y)=Ap^5,\quad x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4=q^5.$$

Or la dernière équation, qui suppose x, y, $x-y$, ou x^2+y^2, divisible par 5, est impossible dans les deux derniers cas, qui donnent. l'un A de forme $25B\pm 2$, ± 11 ; l'autre A de forme $25B\pm 6$, ± 8. Pour x ou y multiple de 5, A est de forme $25B\pm 1$, ± 7. Quant aux formes

$$A=25B\pm 3,\ \pm 4,\ \pm 9.\ \pm 12,$$

elles ne peuvent se présenter. On suppose u non divisible par 5. car pour ce cas l'équation est impossible.

Remarque I. Le cas $A=1$ ou de l'équation

$$x^5+y^5=u^5$$

est aussi impossible, parce qu'une des inconnues est divisible par 5, et l'on a une équation de forme

$$p^5 + q^5 = 5^{5a} v^5,$$

en transposant s'il est nécessaire.

Pour $A = 2$, l'équation

$$x^5 + y^5 = 2z^5$$

a la solution

$$x = y = z = 1;$$

elle n'en a pas d'autre.

Remarque II. Pour le cas de $A = 25B \pm 1, \pm 7$, ou, ce qui revient au même, quand l'un des nombres x, y est divisible par 5, l'équation

$$x^4 - x^3 y + x^2 y^2 - xy^3 + y^4 = q^5$$

se mettra sous la forme

$$(2x^2 - xy + 2y^2)^2 - 5(xy)^2 = 4q^5$$

pour xy impair, et sous la forme

$$\left(x^2 - \frac{xy}{2} + y^2\right)^2 - 5\left(\frac{xy}{2}\right)^2 = q^5,$$

pour xy pair.

Dans le premier cas, il faudra poser

$$(C) \quad \left\{ \begin{aligned} 16(2x^2 - xy + 2y^2) &= f(f^4 + 50f^2g^2 + 125g^4), \\ 16\,xy &= 5g(f^4 + 10f^2g^2 + 5g^4); \end{aligned} \right.$$

dans le second, il faudra poser

$$(D) \quad \left\{ \begin{aligned} x^2 - \frac{xy}{2} + y^2 &= f(f^4 + 50f^2g^2 + 125g^4), \\ \frac{xy}{2} &= 5g(f^4 + 10f^2g^2 + 5g^4). \end{aligned} \right.$$

Il reste donc à montrer l'incompatibilité des équations (C) et celle des équations (D).

Il est un cas où l'impossibilité de la seconde des équations (C), (D), se présente de suite, c'est celui de x et y carré (ou de l'équation $x^{10} \pm y^{10} = Az^5$); ici il faudra rendre carré

$$f^4 + 10f^2g^2 + 5g^4.$$

en supposant que g soit de la forme $5h^2$. ou $10h^2$. ce qui est démontré impossible dans la proposition III ; on a donc ce théorème :

« *Proposition* VI. L'équation

$$x^{10} \pm y^{10} = \mathrm{A}z^5$$

» est impossible quand A n'a point de facteur premier de forme
» $10m + 1$. »

Car l'équation, déjà démontrée impossible pour A, multiple de 5 et pour A divisé par 25, donnant un des huit restes

$$\pm 2, \ \pm 3, \ \pm 6. \ \pm 8, \ \pm 9, \ \pm 11. \ \pm 12,$$

l'est encore pour le cas des restes ± 1, ± 7. ce qui épuise tous les cas possibles.

* * *

NOTE

SUR LE MOUVEMENT

D'UNE CHAINE PESANTE INFINIMENT MINCE SUR LA CYCLOÏDE;

Par M. PUISEUX,

Ancien Élève de l'École normale.

Nous prendrons pour origine des coordonnées le sommet de la cycloïde, pour axe des x l'axe de la courbe supposé vertical, pour axe des y la tangente au sommet. Le premier de ces axes est dirigé en sens contraire de la pesanteur, dans la concavité de la cycloïde.

Concevons maintenant qu'une chaîne pesante se meuve sur cette courbe. Nous nommerons centre de la chaîne le point de celle-ci qui jouit de la propriété d'être son centre de gravité lorsqu'elle est tendue en ligne droite, et nous désignerons par les lettres σ et s les arcs compris, l'un entre ce centre et le sommet de la cycloïde, l'autre entre ce même centre et un point quelconque de la chaîne. Si donc on appelle m la masse de l'élément qui répond à l'arc s, on aura

$$\sum ms = 0.$$

Cela posé, si l'on remarque que $\frac{d\sigma}{dt}$ est la vitesse commune de tous les points de la chaîne, on aura, par le principe des forces vives,

$$\frac{d\sigma^2}{dt^2}\sum m = \text{constante} - 2g\sum mx.$$

Or, d'après une propriété connue de la cycloïde, on a, en désignant par a le diamètre du cercle générateur,

$$s + \sigma = 2\sqrt{ax},$$

d'ou

$$x = \frac{(s+\sigma)^2}{4a}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation précédente, on trouve

$$\frac{d\sigma^2}{dt^2}\sum m = \text{constante} - \frac{g}{2a}\sum ms^2 - \frac{g\sigma}{a}\sum ms - \frac{g\sigma}{2a}\sum m.$$

Comme on l'a déja remarqué, $\sum ms = 0$; de plus le terme $\frac{g}{2a}\sum ms^2$ est constant. Si donc on désigne par h^2 une constante, l'équation précédente pourra s'écrire

$$\frac{d\sigma^2}{dt^2} = \frac{g}{2a}(h^2 - \sigma^2),$$

ce qui est l'équation du mouvement d'un point pesant isolé sur la cycloïde. Ainsi le centre de la chaîne oscillera sur cette courbe, comme s'il était seul.

NOTE

SUR LA CONVERGENCE ET LA DIVERGENCE DES SÉRIES;

PAR M. OSSIAN **BONNET**,

Ancien Élève de l'École Polytechnique.

M. Augustus de Morgan et M. Bertrand ont trouvé, chacun de leur côté [*], plusieurs systèmes de règles servant à reconnaître d'une manière certaine la convergence ou la divergence des séries à termes positifs. Je suis parvenu depuis à quelques autres règles du même genre qui sont d'une application assez simple. L'exposition de ces nouvelles règles est le principal objet de cette Note.

I.

J'avertis, une fois pour toutes, que dans ce qui va suivre les séries sont toujours supposées à termes positifs.

Lemme I. Soient deux séries

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$
$$V = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

1°. Si la série U est convergente, et que, pour toutes les valeurs de m qui surpassent un nombre donné, on ait

$$v_m < cu_m,$$

c étant une constante finie, la série V sera aussi convergente.

---

[*] Voyez le *Traité de calcul différentiel* de M. de Morgan, publié à Londres en 1839, et un Mémoire de M. Bertrand, inséré dans le tome VII de ce Journal.

2°. Si la série U est divergente, et que, pour toutes les valeurs de m qui surpassent un nombre donné, on ait

$$v_m > cu_m,$$

c étant une constante finie, la série V sera aussi divergente.

Lemme II. Soient deux séries

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots.$$
$$V = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

1°. Si la série U est convergente, et que l'on ait

$$\frac{v_{m+1}}{v_m} < \frac{u_{m+1}}{u_m},$$

pour toutes les valeurs de m qui surpassent un nombre donné, la série V sera aussi convergente.

2°. Si la série U est divergente, et que l'on ait

$$\frac{v_{m+1}}{v_m} > \frac{u_{m+1}}{u_m};$$

pour toutes les valeurs de m qui surpassent un nombre donné, la série V sera aussi divergente.

Ces deux lemmes sont trop simples pour que nous nous arrêtions à les démontrer.

Lemme III. Les séries

$$(1)\qquad 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \ldots,$$

$$(2)\qquad 1 + \frac{1}{2(l2)^\alpha} + \frac{1}{3(l3)^\alpha} + \frac{1}{4(l4)^\alpha} + \ldots,$$

$$(3)\qquad 1 + \frac{1}{2l2(ll2)^\alpha} + \frac{1}{3l3(ll3)^\alpha} + \frac{1}{4l4(ll4)^\alpha} + \ldots,$$

$$(4)\qquad 1 + \frac{1}{2l2ll2(lll2)^\alpha} + \frac{1}{3l3ll3(lll3)^\alpha} + \frac{1}{4l4ll4(lll4)^\alpha} + \ldots,$$

. . . .
. . . .

sont, toutes, convergentes ou divergentes, suivant que α est ou n'est pas plus grand que 1.

Démonstration. Je me servirai de la proposition suivante due à M. Cauchy.

« Les deux séries

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_m + \ldots,$$

$$u_1 + \nu u_\nu + \nu^2 u_{\nu^2} + \ldots + \nu^{m-1} u_{\nu^{m-1}} + \ldots,$$

» où ν est un nombre entier positif quelconque, sont en même temps
» convergentes ou divergentes, pourvu que les termes de la première
» soient, à partir d'une certaine limite, positifs et décroissants. »

1°. La série (1) est convergente ou divergente en même temps que

$$1 + \frac{\nu}{\nu^\alpha} + \frac{\nu}{\nu^{2\alpha}} + \ldots + \frac{\nu^m}{\nu^{m\alpha}} + \ldots,$$

ou

$$1 + \frac{1}{\nu^{\alpha-1}} + \frac{1}{\nu^{2(\alpha-1)}} + \ldots + \frac{1}{\nu^{m(\alpha-1)}} + \ldots$$

Or cette dernière série est une progression géométrique qui a $\frac{1}{\nu^{\alpha-1}}$ pour raison, elle est donc convergente, ou divergente, suivant que α est ou n'est pas plus grand que 1 ; par conséquent il en est de même de la série (1).

2°. La série (2) est convergente ou divergente en même temps que

$$1 + \frac{1}{(l\nu)^\alpha} + \frac{1}{(l\nu^2)^\alpha} + \frac{1}{(l\nu^3)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(l\nu^m)^\alpha} + \ldots,$$

ou

$$1 + \frac{1}{(l\nu)^\alpha}\left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{m^\alpha} + \ldots\right).$$

Or, d'après ce que nous venons de démontrer, cette dernière série est convergente ou divergente, suivant que α est ou n'est pas plus grand que 1 ; il en est donc de même de la série (2).

3°. La série (3) est convergente ou divergente en même temps que

$$1 + \frac{1}{l\nu(ll\nu)^\alpha} + \frac{1}{l\nu^2(ll\nu^2)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{l\nu^m(ll\nu^m)^\alpha} + \ldots,$$

ou

$$1 + \frac{1}{l\nu(ll\nu)^{\alpha}} + \frac{1}{l\nu}\left[\frac{1}{2(l2+ll\nu)^{\alpha}} + \frac{1}{3(l3+ll\nu)^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{m(lm+ll\nu)^{\alpha}} + \ldots\right].$$

Or, en laissant de côté les deux premiers, les termes de cette série sont, à partir d'une certaine limite, respectivement plus petits que ceux de la série

$$\frac{1}{l\nu}\left[\frac{1}{2(l2)^{\alpha}} + \frac{1}{3(l3)^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{m(lm)^{\alpha}} + \ldots\right],$$

et respectivement plus forts que ceux de la série

$$\frac{1}{l\nu}\left[\frac{1}{2(l2+l2)^{\alpha}} + \frac{1}{3(l3+l3)^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{m(lm+lm)^{\alpha}} + \ldots\right],$$

ou

$$\frac{1}{2^{\alpha}l\nu}\left[\frac{1}{2(l2)^{\alpha}} + \frac{1}{3(l3)^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{m(lm)^{\alpha}} + \ldots\right].$$

pourvu, toutefois, que l'on ait

$$ll\nu > 0, \quad \text{ou} \quad \nu > e.$$

ce que l'on peut toujours supposer. D'un autre côté, d'apres ce que nous avons démontré, la première de ces séries est convergente quand α est plus grand que 1, et la seconde est divergente quand α n'est pas plus grand que 1; la série (3) est donc convergente ou divergente, suivant que α est ou n'est pas plus grand que 1.

4°. La série (4) est convergente ou divergente en même temps que

$$1 + \frac{1}{l\nu\, ll\nu(lll\nu)^{\alpha}} + \frac{1}{l\nu^{2}\, ll\nu^{2}(lll\nu^{2})^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{l\nu^{m}\, ll\nu^{m}(lll\nu^{m})^{\alpha}} + \ldots,$$

ou

$$1 + \frac{1}{l\nu\, ll\nu(lll\nu)^{\alpha}} + \frac{1}{l\nu}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{2(l2+ll\nu)(ll2+lll\nu)^{\alpha}} + \dfrac{1}{3(l3+ll\nu)(ll3+lll\nu)^{\alpha}} + \ldots \\ \qquad + \dfrac{1}{m(lm+ll\nu)(llm+lll\nu)^{\alpha}} + \ldots\end{array}\right\}.$$

Or, en laissant de côté les deux premiers, les termes de cette série sont, à partir d'une certaine limite, respectivement plus petits que ceux de la série

$$\frac{1}{l\nu}\left[\frac{1}{2l2(ll2)^\alpha}+\frac{1}{3l3(ll3)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{mlm(llm)^\alpha}+\ldots\right],$$

et respectivement plus forts que ceux de la série

$$\frac{1}{l\nu}\left[\frac{1}{2(l2+l2)(ll2+ll2)^\alpha}+\frac{1}{3(l3+l3)(ll3+ll3)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{m(lm+lm)(llm+llm)^\alpha}+\ldots\right],$$

ou

$$\frac{1}{2^{\alpha+1}l\nu}\left[\frac{1}{2l2(ll2)^\alpha}+\frac{1}{3l3(ll3)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{mlm(llm)^\alpha}+\ldots\right],$$

pourvu, toutefois, que l'on ait

$$lll\nu > 0. \quad \text{ou} \quad \nu > e^e,$$

ce que l'on peut toujours supposer. D'un autre côté, d'après ce que nous avons démontré, la première de ces séries est convergente quand α est plus grand que 1, et la seconde est divergente quand α n'est pas plus grand que 1; la série (4) est donc convergente ou divergente, suivant que α est ou n'est pas plus grand que 1.

On emploierait le même raisonnement pour les séries (5), (6), etc.

Le lemme précédent a été démontré par M. Bertrand, mais la démonstration qui précède est, je crois, plus simple et plus élémentaire que la sienne.

II.

Soit, actuellement, une série

$$\mathrm{U} = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$

dont il faut reconnaître la convergence ou la divergence.

Règle. Considérez les deux expressions

$$m^{1+\varepsilon}u_m, \quad mu_m,$$

où ε représente un nombre positif aussi petit qu'on veut, mais différent de zéro, et déterminez les valeurs

$$a_0, \quad a'_0,$$

qu'elles prennent quand $m = \infty$; la série sera convergente si a_0 n'est pas infini, et divergente si a'_0 n'est pas zéro. Si a_0 est infini et qu'en même temps a'_0 soit zéro, considérez les deux expressions

$$m(lm)^{1+\varepsilon} u_m, \quad mlm\, u_m,$$

où ε représente un nombre positif aussi petit qu'on veut, mais différent de zéro, et déterminez les valeurs

$$a_1, \quad a'_1,$$

qu'elles prennent quand $m = \infty$; la série sera convergente si a_1 n'est pas infini, et divergente si a'_1 n'est pas zéro. Si a_1 est infini et qu'en même temps a'_1 soit zéro, considérez les deux expressions

$$mlm(llm)^{1+\varepsilon} u_m, \quad mlmllm\, u_m,$$

où ε représente un nombre positif aussi petit qu'on veut, mais différent de zéro, et calculez les valeurs

$$a_2, \quad a'_2,$$

qu'elles prennent quand $m = \infty$; la série sera convergente si a_2 n'est pas infini, et divergente si a'_2 n'est pas zéro. Si a_2 est infini et qu'en même temps a'_2 soit zéro, considérez les deux expressions

$$mlmllm(lllm)^{1+\varepsilon} u_m, \quad mlmllmlllm\, u_m,$$

et continuez de la même manière.

Démonstration. Supposons, en premier lieu, qu'une des limites a_0, a_1, a_2,... soit différente de l'infini; on aura alors, pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini, une des inégalités

$$m^{1+\varepsilon} u_m < k, \quad m(lm)^{1+\varepsilon} u_m < k, \quad mlm(llm)^{1+\varepsilon} u_m < k, \ldots,$$

où k est un nombre déterminé et fini. Or on déduit successivement de ces inégalités,

$$u_m < \frac{k}{m^{1+\varepsilon}}, \quad u_m < \frac{k}{m(lm)^{1+\varepsilon}}, \quad u_m < \frac{k}{mlm(llm)^{1+\varepsilon}}, \ldots.$$

Cela prouve (*lemmes* I et III) que, dans chacun des cas supposés, la série est convergente.

Supposons, en second lieu, qu'une des limites a'_0, a'_1, a'_2, ... soit différente de zéro; on aura alors, pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini, une des inégalités

$$mu_m > k, \quad mlmu_m > k, \quad mlmllmu_m > k, \ldots,$$

où k est un nombre déterminé positif et différent de zéro. Or on deduit successivement de ces inégalités,

$$u_m > \frac{k}{m}, \quad u_m > \frac{k}{mlm}, \quad u_m > \frac{k}{mlmllm}, \ldots.$$

Cela prouve (*lemmes* I et III) que, dans chacun des cas supposés, la série est divergente.

Remarque. Les règles précédentes doivent, dans tous les cas, faire connaître si une série est convergente ou divergente, car le terme général u_m de la série considérée sera toujours une certaine fonction de m, dont le degré, quel qu'il soit, finira par être plus grand ou plus petit que celui de la fraction $\frac{1}{mlmllm\ldots}$, où le nombre des facteurs du dénominateur croît toujours. Il ne peut y avoir doute que dans le cas infiniment rare d'une série dont le terme général aurait le même degré par rapport à m que la fraction $\frac{1}{mlmllm\ldots}$, où le nombre des facteurs du dénominateur est infini. Ce cas est en quelque sorte le point de jonction des séries convergentes et des séries divergentes.

III.

Faisons quelques applications des règles précédentes.

Exemple I. Soit la série

$$U = 1 + \frac{1}{\sqrt[2]{2^3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3^4}} + \frac{1}{\sqrt[4]{4^5}} + \ldots.$$

On a, dans ce cas,

$$u_m = \frac{1}{\sqrt[m]{m^{m+1}}} = \frac{1}{m^{1+\frac{1}{m}}},$$

par conséquent,

$$m^{1+\varepsilon} u_m = \frac{m^\varepsilon}{m^{\frac{1}{m}}}, \quad \text{et} \quad m u_m = \frac{1}{m^{\frac{1}{m}}}.$$

Or.

$$m^{\frac{1}{m}} = 1, \quad \text{pour} \quad m = \infty;$$

la série est donc divergente.

Exemple II. Soit la série

$$U = 1 + \frac{1^n}{2^{n+\alpha}} + \frac{2^n}{3^{n+\alpha}} + \frac{3^n}{4^{n+\alpha}} + \dots$$

On a

$$u_m = \frac{(m-1)^n}{m^{n+\alpha}} = \left(\frac{m-1}{m}\right)^n \frac{1}{m^\alpha},$$

par conséquent,

$$m^{1+\varepsilon} u_m = \left(\frac{m-1}{m}\right)^n \frac{1}{m^{\alpha-1-\varepsilon}}, \quad \text{et} \quad m u_m = \left(\frac{m-1}{m}\right)^n \frac{1}{m^{\alpha-1}}.$$

Or, supposons d'abord $\alpha > 1$, nous aurons

$$\left(\frac{m-1}{m}\right)^n \frac{1}{m^{\alpha-1-\varepsilon}} = 0, \quad \text{pour } m = \infty,$$

ε étant pris suffisamment petit; la série est donc alors convergente.

Soit, en second lieu, $\alpha \leqq 1$; on aura

$$\left(\frac{m-1}{m}\right)^n \frac{1}{m^{\alpha-1}} = \infty, \text{ ou } 1, \quad \text{pour} \quad m = \infty;$$

la série est donc alors divergente: ainsi la série proposée est convergente ou divergente suivant que α est ou n'est pas plus grand que 1.

Exemple III. Considérons la série

$$U = \left(\frac{l2}{1}\right)^\alpha + \left(\frac{l3}{2}\right)^\alpha + \left(\frac{l4}{3}\right)^\alpha + \dots$$

On a, dans ce cas,

$$u_m = \left[\frac{l(m+1)}{m}\right]^\alpha,$$

par conséquent,

$$m^{1+\varepsilon} u_m = \frac{[l(m+1)]^\alpha}{m^{\alpha-1-\varepsilon}} \quad \text{et} \quad mu_m = \frac{[l(m+1)]^\alpha}{m^{\alpha-1}};$$

or, supposons d'abord $\alpha > 1$, nous aurons

$$\frac{[l(m+1)]^\alpha}{m^{\alpha-1-\varepsilon}} = 0, \quad \text{pour} \quad m = \infty,$$

ε étant pris suffisamment petit; la série est donc alors convergente.

Soit, en second lieu, $\alpha \leqq 1$, on aura

$$\frac{[l(m+1)]^\alpha}{m^{\alpha-1}} = \infty, \quad \text{pour} \quad m = \infty;$$

la série est donc alors divergente. Ainsi, dans ce cas comme dans le précédent, la série est convergente ou divergente suivant que α est ou n'est pas plus grand que 1.

Exemple IV. 1°. Soit la série

$$\mathrm{U} = \frac{1}{p_1^\alpha} + \frac{1}{p_2^\alpha} + \frac{1}{p_3^\alpha} + \ldots,$$

les nombres $p_1, p_2, p_3, \ldots$ vérifiant, à partir d'une certaine limite, la relation

$$m = \frac{p_m}{\mathrm{A}\, l p_m + \mathrm{B}},$$

où A et B sont des constantes.

C'est ce qui a lieu très-probablement pour les nombres premiers [*].

On a, dans ce cas,

$$u_m = \frac{1}{p_m^\alpha},$$

---

[*] Legendre, *Théorie des nombres*, tome II, page 65.

par conséquent,

$$m^{1+\varepsilon} u_m = \frac{m^{1+\varepsilon}}{p_m^\alpha} = \frac{1}{(\mathrm{A}\,lp_m + \mathrm{B})^{1+\varepsilon}\, p_m^{\alpha-1-\varepsilon}}$$

et

$$mu_m = \frac{m}{p_m^\alpha} = \frac{1}{(\mathrm{A}\,lp_m + \mathrm{B})\, p_m^{\alpha-1}};$$

Or, soit $\alpha > 1$, on aura

$$\frac{1}{(\mathrm{A}lp_m + \mathrm{B})^{1+\varepsilon}\, p_m^{\alpha-1-\varepsilon}} = 0, \quad \text{pour} \quad m = \infty,$$

ε étant pris suffisamment petit; la série est donc alors convergente.

Soit ensuite $\alpha < 1$, on aura

$$\frac{1}{(\mathrm{A}lp_m + \mathrm{B})\, p_m^{\alpha-1}} = \infty, \quad \text{pour} \quad m = \infty;$$

la série est donc alors divergente.

Si $\alpha = 1$, on aura

$$\frac{1}{(\mathrm{A}\,lp_m + \mathrm{B})^{1+\varepsilon}\, p_m^{\alpha-1-\varepsilon}} = \infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{(\mathrm{A}\,lp_m + \mathrm{B})\, p_m^{\alpha-1}} = 0, \quad \text{pour} \quad m = \infty,$$

il y a donc incertitude; mais on a alors

$$m(lm)^{1+\varepsilon} u_m = \frac{m(lm)^{1+\varepsilon}}{p_m} = \frac{(lp_m - k)^{1+\varepsilon}}{\mathrm{A}\,lp_m + \mathrm{B}}$$

et

$$mlm\, u_m = \frac{mlm}{p_m} = \frac{lp_m - k}{\mathrm{A}\,lp_m + \mathrm{B}},$$

k étant un nombre infiniment petit par rapport à lp_m quand $p_m = \infty$; or

$$\frac{lp_m - k}{\mathrm{A}lp_m + \mathrm{B}} = \frac{1}{\mathrm{A}}, \quad \text{pour} \quad m = \infty;$$

la série est donc encore divergente dans ce cas. Ainsi elle est convergente ou divergente, suivant que α est ou n'est pas plus grand que 1.

2°. Soit la série

$$\mathrm{U} = \frac{1}{p_1(lp_1)^\alpha} + \frac{1}{p_2(lp_2)^\alpha} + \frac{1}{p_3(lp_3)^\alpha} + \dots,$$

les nombres p_1, p_2, $p_3, \dots$ étant les mêmes que dans la série précédente.

On a

$$u_m = \frac{1}{p_m(lp_m)^\alpha},$$

donc

$$m^{1+\varepsilon} u_m = \frac{m^{1+\varepsilon}}{p_m(lp_m)^\alpha} = \frac{p_m^\varepsilon}{(\mathrm{A}lp_m + \mathrm{B})^{1+\varepsilon}(lp_m)^\alpha}$$

et

$$mu_m = \frac{m}{p_m(lp_m)^\alpha} = \frac{1}{(\mathrm{A}lp_m + \mathrm{B})(lp_m)^\alpha};$$

or

$$\frac{p_m^\varepsilon}{(\mathrm{A}lp_m + \mathrm{B})^{1+\varepsilon}(lp_m)^\alpha} = \infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{(\mathrm{A}lp_m + \mathrm{B})(lp_m)^\alpha} = 0, \quad \text{pour} \quad m = \infty,$$

il y a donc incertitude; mais

$$m(lm)^{1+\varepsilon} u_m = \frac{m(lm)^{1+\varepsilon}}{p_m(lp_m)^\alpha} = \frac{(lp_m - k)^{1+\varepsilon}}{(\mathrm{A}lp_m + \mathrm{B})(lp_m)^\alpha}$$

et

$$mlm\,u_m = \frac{mlm}{p_m(lp_m)^\alpha} = \frac{lp_m - k}{(\mathrm{A}lp_m + \mathrm{B})(lp_m)^\alpha},$$

d'un autre côté, quelque soit α pourvu qu'il soit positif,

$$\frac{(lp_m - k)^{1+\varepsilon}}{(\mathrm{A}lp_m + \mathrm{B})(lp_m)^\alpha} = 0, \quad \text{pour} \quad m = \infty,$$

ε étant pris suffisamment petit; la série est donc toujours convergente.

3°. Soit la série

$$\mathrm{U} = \frac{1}{p_1(llp_1)^\alpha} + \frac{1}{p_2(llp_2)^\alpha} + \frac{1}{p_3(llp_3)^\alpha} + \dots,$$

p_1, p_2, p_3,... étant encore les mêmes nombres que précédemment.

On a

$$u_m = \frac{1}{p_m (llp_m)^\alpha},$$

donc,

$$m^{1+\varepsilon} u_m = \frac{m^{1+\varepsilon}}{p_m (llp_m)^\alpha} = \frac{p^{\varepsilon}}{(\mathrm{A}lp_m + \mathrm{B})^{1+\varepsilon} (llp_m)^\alpha}$$

et

$$mu_m = \frac{m}{p_m (llp_m)^\alpha} = \frac{1}{(\mathrm{A}lp_m + \mathrm{B})(llp_m)};$$

or

$$\frac{p_m^\varepsilon}{(\mathrm{A}lp_m + \mathrm{B})^{1+\varepsilon} (llp_m)} = \infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{(\mathrm{A}lp_m + \mathrm{B})(llp_m)^\alpha} = 0, \quad \text{pour} \quad m = \infty:$$

il y a donc incertitude; mais

$$m(lm)^{1+\varepsilon} u_m = \frac{m(lm)^{1+\varepsilon}}{p_m (llp_m)^\alpha} = \frac{(lp_m - k)^{1+\varepsilon}}{(\mathrm{A}lp_m + \mathrm{B})(llp_m)^\alpha}$$

et

$$mlmu_m = \frac{mlm}{p_m (llp_m)^\alpha} = \frac{lp_m - k}{(\mathrm{A}lp_m + \mathrm{B})(llp_m)^\alpha},$$

or

$$\frac{(lp_m - k)^{1+\varepsilon}}{(\mathrm{A}lp_m + \mathrm{B})(llp_m)^\alpha} = \infty \quad \text{et} \quad \frac{lp_m - k}{(\mathrm{A}lp_m + \mathrm{B})(llp_m)^\alpha} = 0, \quad \text{pour} \quad m = \infty,$$

il y a donc encore incertitude; mais

$$mlm(llm)^{1+\varepsilon} u_m = \frac{mlm(llm)^{1+\varepsilon}}{p_m (llp_m)^\alpha} = \frac{(lp_m - k)(llp_m - k')^{1+\varepsilon}}{(\mathrm{A}lp_m + \mathrm{B})(llp_m)^\alpha}$$

et

$$mlm\,llm\,u_m = \frac{mlm\,llm}{p_m (llp_m)^\alpha} = \frac{(lp_m - k)(llp_m - k')}{(\mathrm{A}lp_m + \mathrm{B})(llp_m)^\alpha},$$

k' étant un nombre infiniment petit par rapport à llp_m quand $p_m = \infty$; or, si α est > 1,

$$\frac{(lp_m - k)(llp_m - k')^{1+\varepsilon}}{(\mathrm{A}lp_m + \mathrm{B})(llp_m)^\alpha} = 0, \quad \text{pour} \quad m = \infty,$$

ε étant pris suffisamment petit; la série est donc alors convergente. Si α est $\leqq 1$,

$$\frac{(lp_m - k)(llp_m - k')}{(\mathrm{A}lp_m + \mathrm{B})(llp_m)^\alpha} = \infty \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\mathrm{A}}, \quad \text{pour} \quad m = \infty;$$

la série est donc alors divergente. Ainsi la série proposée est convergente ou divergente, suivant que α est ou n'est pas plus grand que 1.

On verrait de même que les séries

$$\frac{1}{p_1 llp_1 (lllp_1)^\alpha} + \frac{1}{p_2 llp_2 (lllp_2)^\alpha} + \frac{1}{p_3 llp_3 (lllp_3)^\alpha} + \ldots,$$

$$\frac{1}{p_1 llp_1 lllp_1 (llllp_1)^\alpha} + \frac{1}{p_2 llp_2 lllp_2 (llllp_2)^\alpha} + \frac{1}{p_3 llp_3 lllp_3 (llllp_3)^\alpha} + \ldots,$$

. . . .

. . . .

où $p_1, p_2, p_3, \ldots$ représentent toujours des nombres qui, à partir d'une certaine limite, vérifient la condition

$$m = \frac{p_m}{\mathrm{A}lp_m + \mathrm{B}},$$

sont, toutes, convergentes ou divergentes, suivant que α est ou n'est pas plus grand que 1.

Il serait intéressant de vérifier par un procédé direct si les résultats que nous venons d'obtenir sont exacts lorsqu'on substitue les nombres premiers aux nombres représentés par $p_1, p_2, p_3, \ldots$; on pourrait, je crois, déduire de cette vérification une démonstration rigoureuse de la loi de Legendre.

IV.

Les règles précédentes sont d'une application tres-simple: cependant quand les termes de la série contiennent un nombre indéfiniment croissant de facteurs, comme cela arrive, par exemple, dans la série

$$1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\delta(\delta+1)}x^2 + \ldots\ldots,$$

on ne peut les appliquer qu'en prenant plusieurs précautions souvent embarrassantes : il vaut beaucoup mieux employer alors, soit les regles de M. de Morgan, soit les secondes règles de M. Bertrand. Je vais donner des démonstrations nouvelles de ces dernières regles.

V.

Règles de M. de Morgan.

Enoncé. Soit $u_m = \frac{1}{\varphi(m)}$ le terme général d'une série.

Considérez l'expression

$$p_0 = \frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)},$$

où $\varphi'(m)$ représente la dérivée de $\varphi(m)$ par rapport à m, et déterminez la valeur

$$a_0$$

qu'elle prend quand $m = \infty$; la série sera convergente si a_0 est plus grand que 1, et divergente si a_0 est plus petit que 1. Si $a_0 = 1$, considérez l'expression

$$p_1 = \left[\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} - 1\right] lm = (p_0 - 1)\, lm,$$

et déterminez la valeur

$$a_1$$

qu'elle prend quand $m = \infty$; la série sera convergente si a_1 est plus grand que 1, et divergente si a_1 est plus petit que 1. Si $a_1 = 1$, considérez l'expression

$$p_2 = (p_1 - 1)\, llm,$$

et déterminez la valeur

$$a_2$$

qu'elle prend quand $m = \infty$: la série sera convergente si a_2 est plus grand que 1, et divergente si a_2 est plus petit que 1. Si $a_2 = 1$, considérez l'expression

$$p_3 = (p_2 - 1)\,llm,$$

et continuez de la même manière.

Démonstration. Supposons, en premier lieu, qu'une des limites a_0, a_1, $a_2, \ldots$ soit plus grande que 1 : on aura alors, pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini, une des inégalités

$$\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} > k,\quad \left[\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} - 1\right] lm > k,\quad \left\{\left[\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} - 1\right] lm - 1\right\} llm > k,\ldots,$$

où k est un nombre plus grand que 1. Or on déduit successivement de ces inégalités,

$$\frac{\varphi'(m)}{\varphi(m)} > \frac{k}{m},\quad \frac{\varphi'(m)}{\varphi(m)} > \frac{1}{m} + \frac{k}{mlm},\quad \frac{\varphi'(m)}{\varphi(m)} > \frac{1}{m} + \frac{1}{mlm} + \frac{k}{mlm\,llm},\ldots\ldots$$

puis en multipliant par dm et intégrant de m à $m+1$,

$$l\,\frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)} > l\,\frac{(m+1)^k}{m^k},\quad l\,\frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)} > l\,\frac{(m+1)[l(m+1)]^k}{m(lm)^k}.$$

$$l\,\frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)} > l\,\frac{(m+1)\,l(m+1)[ll(m+1)]^k}{mlm(llm)^k},\ldots\ldots,$$

d'où

$$\frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)} > \frac{(m+1)^k}{m^k},\qquad \frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)} > \frac{(m+1)[l(m+1)]^k}{m(lm)^k},$$

$$\frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)} > \frac{(m+1)\,l(m+1)[ll(m+1)]^k}{mlm(llm)^k},\ldots\ldots,$$

ou

$$\frac{\dfrac{1}{\varphi(m+1)}}{\dfrac{1}{\varphi(m)}} < \frac{\dfrac{1}{(m+1)^k}}{\dfrac{1}{m^k}},\qquad \frac{\dfrac{1}{\varphi(m+1)}}{\dfrac{1}{\varphi(m)}} < \frac{\dfrac{1}{(m+1)[l(m+1)]^k}}{\dfrac{1}{m(lm)^k}},$$

$$\frac{\dfrac{1}{\varphi(m+1)}}{\dfrac{1}{\varphi(m)}} < \frac{\dfrac{1}{(m+1)\,l(m+1)[ll(m+1)]^k}}{\dfrac{1}{mlm(llm)^k}},\ldots\ldots$$

Cela prouve (*lemmes* II et III) que, dans chacun des cas supposés, la série est convergente.

Supposons, en second lieu, qu'une des limites a_0, a_1, a_2,... soit plus petite que 1; on aura alors, pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini, une des inégalités

$$\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} < k, \quad \left[\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} - 1\right] lm < k, \quad \left\{\left[\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} - 1\right] lm - 1\right\} llm < k, \ldots,$$

où k est un nombre plus petit que 1. Or on déduit successivement de ces inégalités.

$$\frac{\varphi'(m)}{\varphi(m)} < \frac{k}{m}, \quad \frac{\varphi'(m)}{\varphi(m)} < \frac{1}{m} + \frac{k}{m\,lm}, \quad \frac{\varphi'(m)}{\varphi(m)} < \frac{1}{m} + \frac{1}{mlm} + \frac{k}{mlm\,llm} \ldots\ldots\ldots$$

puis en multipliant par dm et intégrant de m à $m+1$,

$$l\frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)} < l\frac{(m+1)^k}{m^k}, \quad l\frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)} < l\frac{(m+1)[l(m+1)]^k}{m(lm)^k},$$

$$l\frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)} < l\frac{(m+1)\,l(m+1)[ll(m+1)]^k}{mlm(llm)^k}, \ldots\ldots\ldots,$$

d'ou

$$\frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)} < \frac{(m+1)^k}{m^k}, \qquad \frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)} < \frac{(m+1)[l(m+1)]^k}{m(lm)^k}.$$

$$\frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)} < \frac{(m+1)l(m+1)[ll(m+1)]^k}{mlm(llm)^k}, \ldots\ldots\ldots,$$

ou

$$\frac{\frac{1}{\varphi(m+1)}}{\frac{1}{\varphi(m)}} > \frac{\frac{1}{(m+1)^k}}{\frac{1}{m^k}}, \qquad \frac{\frac{1}{\varphi(m+1)}}{\frac{1}{\varphi(m)}} > \frac{\frac{1}{(m+1)[l(m+1)]^k}}{\frac{1}{m(lm)^k}},$$

$$\frac{\frac{1}{\varphi(m+1)}}{\frac{1}{\varphi(m)}} > \frac{\frac{1}{(m+1)\,l(m+1)[ll(m+1)]^k}}{\frac{1}{mlm(llm)^k}} \ldots\ldots\ldots$$

Cela prouve (*lemmes* II et III) que, dans chacun des cas supposés, la série est divergente.

VI.

Règles de M. Bertrand.

Énoncé. Soit u_m le terme général d'une série dans laquelle le rapport $\frac{u_{m+1}}{u_m}$ est égal à l'unité pour $m = \infty$. Mettez ce rapport sous la forme

$$\frac{1}{1+r},$$

et calculez la valeur

$$a_0$$

que prend mr quand $m = \infty$; la série sera convergente si a_0 est plus grand que 1, et divergente si a_0 est plus petit que 1. Si $a_0 = 1$, mettez le rapport $\frac{u_{m+1}}{u_m}$ sous la forme

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{m} + r'},$$

et calculez la valeur

$$a_1$$

que prend $mlmr'$ quand $m = \infty$; la série sera convergente si a_1 est plus grand que 1, et divergente si a_1 est plus petit que 1. Si $a_1 = 1$, mettez le rapport $\frac{u_{m+1}}{u_m}$ sous la forme

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{mlm} + r'},$$

et calculez la valeur

$$a_2$$

que prend $mlmllmr''$ quand $m = \infty$; la série sera convergente si a_2 est plus grand que 1, et divergente si a_2 est plus petit que 1. Si $a_2 = 1$, mettez le rapport $\frac{u_{m+1}}{u_m}$ sous la forme

$$\frac{1}{1+\frac{1}{m}+\frac{1}{mlm}+\frac{1}{mlm\,llm}+r'''},$$

et continuez de la même manière.

Démonstration. Commençons par transformer les rapports

$$\frac{m+1}{m},\quad \frac{l(m+1)}{lm},\quad \frac{ll(m+1)}{llm},\ldots.$$

1°. $\frac{m+1}{m}=1+\frac{1}{m}.$

2°. Soit

$$\frac{l(m+1)}{lm}=x,\quad \text{d'où}\quad l(m+1)=xlm,\quad \text{d'où}\quad m+1=m^x;$$

x sera plus grand que l'unité ; posant

$$x=1+\frac{1}{y},$$

il viendra

$$m+1=m^{1+\frac{1}{y}},\quad \text{d'où}\quad \left(\frac{m+1}{m}\right)^y=\left(1+\frac{1}{m}\right)^y=m,$$

d'où

$$yl\left(1+\frac{1}{m}\right)=lm\quad \text{ou}\quad y\left(\frac{1}{m}+\frac{\varepsilon}{m^2}\right)=lm,$$

ε étant un nombre fini quelque grand que soit m ; de là on tire

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{mlm}+\frac{1}{\omega m^2},$$

et par conséquent

$$\frac{l(m+1)}{lm}=x=1+\frac{1}{y}=1+\frac{1}{mlm}+\frac{1}{\omega m^2},$$

ω ne devenant pas nul pour $m=\infty$.

3°. Soit

$$\frac{ll(m+1)}{llm} = x, \quad \text{d'où} \quad ll(m+1) = x\,llm, \quad \text{d'où} \quad l(m+1) = (lm)^x;$$

x sera plus grand que l'unité; posant

$$x = 1 + \frac{1}{y},$$

il viendra

$$l(m+1) = (lm)^{1+\frac{1}{y}}, \quad \text{d'où} \quad \left[\frac{l(m+1)}{lm}\right]^y = \left(1 + \frac{1}{mlm} + \frac{1}{\omega m^2}\right)^y = lm,$$

d'où

$$yl\left(1 + \frac{1}{mlm} + \frac{1}{\omega m^2}\right) = llm,$$

ou

$$y\left[\frac{1}{mlm} + \frac{1}{\omega m^2} + \varepsilon\left(\frac{1}{mlm} + \frac{1}{\omega m^2}\right)^2\right] = llm,$$

ε étant un nombre fini quelque grand que soit m; de là on tire

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{mlmllm} + \frac{1}{\omega m^2},$$

et par conséquent

$$\frac{ll(m+1)}{llm} = x = 1 + \frac{1}{y} = 1 + \frac{1}{mlm\,llm} + \frac{1}{\omega m^2},$$

ω ne devenant pas nul pour $m = \infty$.

4°. Soit

$$\frac{lll(m+1)}{lllm} = x, \quad \text{d'où} \quad lll(m+1) = x\,lllm, \quad \text{d'où} \quad ll(m+1) = (llm)^x;$$

x sera plus grand que 1; posant

$$x = 1 + \frac{1}{y},$$

il viendra

$$ll(m+1) = (llm)^{1+\frac{1}{y}}, \quad \text{d'où} \quad \left[\frac{ll(m+1)}{llm}\right]^y = \left(1 + \frac{1}{mlm\,llm} + \frac{1}{\omega m^2}\right)^y = llm,$$

d'où

$$yl\left(1+\frac{1}{mlmllm}+\frac{1}{\omega m^2}\right)=lllm,$$

ou

$$y\left[\frac{1}{mlmllm}+\frac{1}{\omega m^2}+\varepsilon\left(\frac{1}{mlmllm}+\frac{1}{\omega m^2}\right)^2\right]=lllm,$$

ε étant un nombre fini quelque grand que soit m; de là on tire

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{mlm\,llmlllm}+\frac{1}{\omega m^2},$$

et par conséquent

$$\frac{lll(m+1)}{lllm}=x=1+\frac{1}{y}=1+\frac{1}{mlmllmlllm}+\frac{1}{\omega m^2},$$

ω ne devenant pas nul pour $m=\infty$.

On continuerait de la même manière.

Des résultats que nous venons d'obtenir on déduit sans peine,

$$\left(\frac{m+1}{m}\right)^k=1+\frac{k}{m}+\frac{1}{\omega m^2},\qquad\left[\frac{l(m+1)}{lm}\right]^k=1+\frac{k}{mlm}+\frac{1}{\omega m^2},$$

$$\left[\frac{ll(m+1)}{llm}\right]^k=1+\frac{k}{mlm\,llm}+\frac{1}{\omega m^2},\quad\left[\frac{lll(m+1)}{lllm}\right]^k=1+\frac{k}{mlmllmlllm}+\frac{1}{\omega m^2},$$

. . . .

k étant un nombre positif quelconque et ω représentant un nombre qui ne devient pas nul pour $m=\infty$.

Par suite, on a

$$\left(\frac{m+1}{m}\right)^k=1+\frac{k}{m}+\frac{1}{\omega m^2},\quad\frac{m+1}{m}\left[\frac{l(m+1)}{lm}\right]^k=1+\frac{1}{m}+\frac{k}{mlm}+\frac{1}{\omega m^2},$$

$$\frac{m+1}{m}\,\frac{l(m+1)}{lm}\left[\frac{ll(m+1)}{llm}\right]^k=1+\frac{1}{m}+\frac{1}{mlm}+\frac{k}{mlm\,llm}+\frac{1}{\omega m},$$

$$\frac{m+1}{m}\,\frac{l(m+1)}{lm}\,\frac{ll(m+1)}{llm}\left[\frac{lll(m+1)}{lllm}\right]^k=1+\frac{1}{m}+\frac{1}{mlm}+\frac{1}{mlmllm}$$
$$+\frac{k}{mlm\,llmlllm}+\frac{1}{\omega m^2},$$

. . . .

ω étant encore un nombre qui ne devient pas nul pour $m=\infty$.

Revenons maintenant à la démonstration des regles.

Supposons, en premier lieu, qu'une des limites a_0, a_1, a_2,.... soit plus grande que 1; je dis que l'on aura, pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini, une des inégalités

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} 1+r > \left(\frac{m+1}{m}\right)^k, \quad 1+\frac{1}{m}+r' > \frac{m+1}{m}\left[\frac{l(m+1)}{lm}\right]^k, \\ 1+\frac{1}{m}+\frac{1}{mlm}+r'' > \frac{m+1}{m}\,\frac{l(m+1)}{lm}\left[\frac{ll(m+1)}{llm}\right]^k, \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

où k est un nombre plus grand que 1.

En effet, substituant aux seconds membres leurs valeurs obtenues ci-dessus, ces inégalités deviennent

$$r > \frac{k}{m} + \frac{1}{\omega m^2}, \qquad r' > \frac{k}{mlm} + \frac{1}{\omega m^2}, \qquad r'' > \frac{k}{mlmllm} + \frac{1}{\omega m^2}, \ldots\ldots\ldots$$

d'où

$$mr > k + \frac{1}{\omega m}, \quad mlmr' > k + \frac{lm}{\omega m}, \quad mlmllmr'' > k + \frac{lmllm}{\omega m}, \ldots\ldots\ldots$$

Si l'on fait croître m jusqu'à l'infini, les premiers membres des dernières inégalités convergent respectivement vers a_0, a_1, a_2,..., tandis que les seconds membres ont tous pour limite k; or k étant assujetti à la seule condition d'être plus grand que 1, peut, en outre, être supposé plus petit qu'une des limites a_0, a_1, a_2,..., si, comme nous le supposons, parmi ces limites il y en a une plus grande que 1; cela étant, une des dernières égalités ne peut pas manquer d'avoir lieu, à partir d'une certaine valeur de m; donc aussi, une des inégalités (1 aura lieu pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini.

On déduit maintenant des inégalités (1),

$$\frac{1}{1+r} < \frac{m^k}{(m+1)^k}, \qquad \frac{1}{1+\frac{1}{m}+r'} < \frac{m(lm)^k}{(m+1)[l(m+1)]^k},$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{m}+\frac{1}{mlm}+r''} < \frac{mlm\,(llm)^k}{(m+1)\,l(m+1)\,[ll(m+1)]^k}, \ldots\ldots\ldots$$

ou

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} < \frac{\dfrac{1}{(m+1)^k}}{\dfrac{1}{m^k}}, \quad \frac{u_{m+1}}{u_m} < \frac{\dfrac{1}{(m+1)[l(m+1)]^k}}{\dfrac{1}{m(lm)^k}},$$

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} < \frac{\dfrac{1}{(m+1)l(m+1)[ll(m+1)]^k}}{\dfrac{1}{mlm(llm)^k}}, \ldots\ldots\ldots$$

Cela prouve (*lemmes* II et III) que, dans chacun des cas supposés, la série est convergente.

Supposons, en second lieu, qu'une des limites a_0, a_1, $a_2, \ldots$, soit plus petite que 1; je dis que l'on aura, pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini, une des inégalités

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + r < \left(\dfrac{m+1}{m}\right)^k, \quad 1 + \dfrac{1}{m} + r' < \dfrac{m+1}{m}\left[\dfrac{l(m+1)}{lm}\right]^k, \\ 1 + \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{mlm} + r'' < \dfrac{m+1}{m}\,\dfrac{l(m+1)}{lm}\left[\dfrac{ll(m+1)}{llm}\right]^k, \ldots\ldots, \end{array} \right.$$

où k est un nombre plus petit que 1.

En effet, substituant aux seconds membres leurs valeurs obtenues ci-dessus, ces inégalités deviennent

$$r < \frac{k}{m} + \frac{1}{\omega m^2}, \qquad r' < \frac{k}{mlm} + \frac{1}{\omega m^2}, \qquad r'' < \frac{k}{mlm\,llm} + \frac{1}{\omega m^2}, \ldots\ldots,$$

d'où

$$mr < k + \frac{1}{\omega m}, \quad mlmr' < k + \frac{lm}{\omega m}, \quad mlmllmr'' < k + \frac{lmllm}{\omega m}, \ldots\ldots$$

Si l'on fait croître m jusqu'à l'infini, les premiers membres des dernières inégalités convergent respectivement vers a_0, a_1, $a_2, \ldots$, tandis que les seconds membres ont tous pour limite k; or k étant assujetti à la seule condition d'être plus petit que 1, peut, en outre, être supposé plus grand qu'une des limites a_0, a_1, $a_2, \ldots$, si, comme nous l'avons supposé, parmi ces limites il y en a une plus petite que 1; cela étant, une des dernières inégalités ne peut pas manquer d'avoir lieu à partir d'une certaine valeur de m, donc aussi une des inégalités (2) aura lieu pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini.

On déduit maintenant des inégalités (2),

$$\frac{1}{1+r} > \frac{m^k}{(m+1)^k}, \qquad \frac{1}{1+\frac{1}{m}+r'} > \frac{m(lm)^k}{(m+1)[l(m+1)]^k},$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{m}+\frac{1}{mlm}+r''} > \frac{mlm(llm)^k}{(m+1)l(m+1)[ll(m+1)]^k}, \ldots\ldots,$$

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} > \frac{\frac{1}{(m+1)^k}}{\frac{1}{m^k}}, \qquad \frac{u_{m+1}}{u_m} > \frac{\frac{1}{(m+1)[l(m+1)]^k}}{\frac{1}{m(lm)^k}},$$

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} > \frac{\frac{1}{(m+1)l(m+1)[ll(m+1)]^k}}{\frac{1}{mlm(llm)^k}}, \ldots\ldots$$

Cela prouve (*lemmes* II et III) que, dans chacun des cas supposés, la série est divergente.

VII.

On pourrait substituer aux règles de M. Bertrand les règles suivantes. qui ont avec elles une grande analogie, mais qui sont peut-être un peu plus simples.

Énoncé. Soit u_m le terme général d'une série dans laquelle le rapport $\frac{u_{m+1}}{u_m}$ est égal à l'unité pour $m = \infty$. Mettez ce rapport sous la forme

$$1 - r,$$

et calculez la valeur

$$a_0$$

que prend mr quand $m = \infty$; la série sera convergente si a_0 est plus grand que 1, et divergente si a_0 est plus petit que 1. Si $a_0 = 1$, mettez le rapport $\frac{u_{m+1}}{u_m}$ sous la forme

$$1 - \frac{1}{m} - r',$$

et calculez la valeur

$$a_1$$

que prend $mlmr'$ quand $m=\infty$; la série sera convergente si a_1 est plus grand que 1, et divergente si a_1 est plus petit que 1. Si $a_1=1$, mettez le rapport $\frac{u_{m+1}}{u_m}$ sous la forme

$$1-\frac{1}{m}-\frac{1}{mlm}-r'',$$

et calculez la valeur

$$a_2$$

que prend $mlmllmr''$ quand $m=\infty$; la série sera convergente si a_2 est plus grand que 1, et divergente si a_2 est plus petit que 1. Si $a_2=1$, mettez le rapport $\frac{u_{m+1}}{u_m}$ sous la forme

$$1-\frac{1}{m}-\frac{1}{mlm}-\frac{1}{mlm\,llm}-r''',$$

et continuez de la même manière [*].

Démonstration. Nous avons vu, dans la démonstration des règles précédentes, que

$$\left(\frac{m+1}{m}\right)^k=1+\frac{k}{m}+\frac{1}{\omega m^2},\qquad \left[\frac{l(m+1)}{lm}\right]^k=1+\frac{k}{mlm}+\frac{1}{\omega m^2},$$

$$\left[\frac{ll(m+1)}{llm}\right]^k=1+\frac{k}{mlmllm}+\frac{1}{\omega m^2}.\qquad \left[\frac{lll(m+1)}{lllm}\right]^k=1+\frac{k}{mlmllmlllm}+\frac{1}{\omega m^2},$$

. . . .

et que

$$\left(\frac{m+1}{m}\right)^k=1+\frac{k}{m}+\frac{1}{\omega m^2},\quad \frac{m+1}{m}\left[\frac{l(m+1)}{lm}\right]^k=1+\frac{1}{m}+\frac{k}{mlm}+\frac{1}{\omega m^2},$$

$$\frac{m+1}{m}\,\frac{l(m+1)}{lm}\left[\frac{ll(m+1)}{llm}\right]^k=1+\frac{1}{m}+\frac{1}{mlm}+\frac{k}{mlmllm}+\frac{1}{\omega m^2},$$

$$\frac{m+1}{m}\,\frac{l(m+1)}{lm}\,\frac{ll(m+1)}{llm}\left[\frac{lll(m+1)}{lllm}\right]^k=1+\frac{1}{m}+\frac{1}{mlm}+\frac{1}{mlmllm}+\frac{k}{mlmllmlllm}+\frac{1}{\omega m^2},$$

. . . .

---

[*] On pourrait établir ces règles d'une manière assez simple en prouvant que les limites que l'on vient d'appeler a_0, a_1, a_2,... sont égales à celles qu'on a désignées de la même manière dans les règles de M. Bertrand; mais nous préférons donner une démonstration directe.

ω représentant un nombre qui ne devient pas nul pour $m = \infty$. k était supposé positif, mais il est clair que rien n'empêche de le prendre négatif; mettons donc $-k$ en place de k en explicitant le signe, cela nous donnera

$$\left(\frac{m}{m+1}\right)^k = 1 - \frac{k}{m} + \frac{1}{\omega m^2}, \qquad \left[\frac{lm}{l(m+1)}\right]^k = 1 - \frac{k}{mlm} + \frac{1}{\omega m^2},$$

$$\left[\frac{llm}{ll(m+1)}\right]^k = 1 - \frac{k}{mlmllm} + \frac{1}{\omega m^2}, \quad \left[\frac{lllm}{lll(m+1)}\right]^k = 1 - \frac{k}{mlmllmlllm} + \frac{1}{\omega m^2},$$

. . . .

et

$$\left(\frac{m}{m+1}\right)^k = 1 - \frac{k}{m} + \frac{1}{\omega m^2}, \quad \frac{m}{m+1}\left[\frac{lm}{l(m+1)}\right]^k = 1 - \frac{1}{m} - \frac{k}{mlm} + \frac{1}{\omega m^2},$$

$$\frac{m}{m+1}\,\frac{lm}{l(m+1)}\left[\frac{llm}{ll(m+1)}\right]^k = 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{mlm} - \frac{k}{mlmllm} + \frac{1}{\omega m^2},$$

$$\frac{m}{m+1}\,\frac{lm}{l(m+1)}\,\frac{llm}{ll(m+1)}\left[\frac{lllm}{lll(m+1)}\right]^k = 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{mlm} - \frac{1}{mlmllm} - \frac{k}{mlmllmlllm} + \frac{1}{\omega m^2},$$

. . . .

ω représentant toujours un nombre qui ne devient pas nul pour $m = \infty$

Cela posé, supposons, en premier lieu, qu'une des limites a_0, a_1, a_2,..., soit plus grande que 1; je dis que l'on aura, pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini, une des inégalités

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} 1 - r < \left(\frac{m}{m+1}\right)^k, \qquad 1 - \frac{1}{m} - r' < \frac{m}{m+1}\left[\frac{lm}{l(m+1)}\right]^k, \\ 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{mlm} - r'' < \frac{m}{m+1}\,\frac{lm}{l(m+1)}\left[\frac{llm}{ll(m+1)}\right]^k, \ldots\ldots, \end{array}\right.$$

où k est un nombre plus grand que 1.

En effet, substituant aux seconds membres leurs valeurs obtenues ci-dessus, ces inégalités deviennent

$$-r < -\frac{k}{m} + \frac{1}{\omega m^2},\quad -r' < -\frac{k}{mlm} + \frac{1}{\omega m^2},\quad -r'' < -\frac{k}{mlmllm} + \frac{1}{\omega m^2},\ldots\ldots$$

d'où

$$mr > k - \frac{1}{\omega m},\qquad mlmr' > k - \frac{lm}{\omega m},\quad mlmllmr'' > k - \frac{lm\,llm}{\omega m},\ldots\ldots$$

Si l'on fait croître m jusqu'à l'infini, les premiers membres des dernieres inégalités convergent respectivement vers a_0, a_1, a_2,..., tandis que les seconds membres ont tous pour limite k; or k étant assujetti à la seule condition d'être plus grand que 1, peut, en outre, être supposé plus petit qu'une des limites a_0, a_1, a_2,..., si, comme nous le supposons, parmi ces limites, il en est une plus grande que 1; cela étant, une des dernières inégalités ne peut pas manquer d'avoir lieu, à partir d'une certaine valeur de m, donc aussi, une des inégalités (1) a lieu, pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini.

On déduit, maintenant, des inégalités (1),

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} < \frac{\frac{1}{(m+1)^k}}{\frac{1}{m^k}},\qquad \frac{u_{m+1}}{u_m} < \frac{\frac{1}{(m+1)[l(m+1)]^k}}{\frac{1}{m(lm)^k}},$$

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} < \frac{\frac{1}{(m+1)\,l(m+1\ [ll(m+1)]^k}}{\frac{1}{mlm(llm)^k}},\ldots\ldots\ldots$$

Cela prouve (*lemmes* II et III) que, dans chacun des cas supposés, la série est convergente.

Supposons, en second lieu, qu'une des limites a_0, a_1, a_2,.., soit plus petite que 1; je dis que l'on aura, pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini, une des inégalités

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} 1 - r > \left(\frac{m}{m+1}\right)^k,\quad 1 - \frac{1}{m} - r' > \frac{m}{m+1}\left[\frac{lm}{l(m+1)}\right]^k, \\ 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{mlm} - r'' > \frac{1}{m+1}\,\frac{lm}{l(m+1)}\left[\frac{llm}{ll(m+1)}\right]^k,\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

où k est un nombre plus petit que 1.

En effet, substituant aux seconds membres leurs valeurs obtenues ci-dessus, ces inégalités deviennent

$$-r > -\frac{k}{m}+\frac{1}{\omega m^2},\quad -r' > -\frac{k}{mlm}+\frac{1}{\omega m^2},\quad -r'' > -\frac{k}{mlmllm}+\frac{1}{\omega m^2},\ldots\ldots,$$

d'où

$$mr < k-\frac{1}{\omega m},\quad mlmr' < k-\frac{lm}{\omega m},\quad mlmllmr' < k-\frac{lmllm}{\omega m},\ldots\ldots$$

Si l'on fait croître m jusqu'à l'infini, les premiers membres des dernières inégalités convergent respectivement vers a_0, a_1, a_2,..., tandis que les seconds membres ont tous pour limite k; or k étant assujetti à la seule condition d'être plus petit que 1, peut, en outre, être supposé plus grand qu'une des limites a_0, a_1, a_2,..., si, comme nous le supposons, parmi ces limites il y en a une plus petite que 1; cela étant, une des dernières inégalités ne peut pas manquer d'avoir lieu, à partir d'une certaine valeur de m, donc aussi, une des inégalités (2) a lieu, pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini.

On déduit maintenant des inégalités (2),

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} > \frac{\dfrac{1}{(m+1)^k}}{\dfrac{1}{m^k}},\quad \frac{u_{m+1}}{u_m} > \frac{\dfrac{1}{(m+1)[l(m+1)]^k}}{\dfrac{1}{m(lm)^k}},$$

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} > \frac{\dfrac{1}{(m+1)l(m+1)[ll(m+1)]^k}}{\dfrac{1}{mlm(llm)^k}},\ldots\ \ldots$$

Cela prouve (*lemmes* II et III) que, dans chacun des cas supposés, la série est divergente.

VIII.

On peut enfin joindre aux règles précédentes une série d'autres règles analogues, mais de forme différente, et qui peuvent être préférables dans plusieurs cas.

Enoncé. Soit u_m le terme général d'une série dans laquelle la racine

$\sqrt[m]{u_m}$ est égale à l'unité quand $m = \infty$. Mettez cette racine sous la forme

$$1 - r,$$

et calculez la valeur

$$a_0$$

que prend $\frac{mr}{lm}$ quand $m = \infty$; la série sera convergente si a_0 est plus grand que 1, et divergente si a_0 est plus petit que 1. Si $a_0 = 1$, mettez la racine $\sqrt[m]{u_m}$ sous la forme

$$1 - \frac{lm}{m} - r',$$

et calculez la valeur

$$a_1$$

que prend $\frac{mr'}{llm}$ quand $m = \infty$; la série sera convergente si a_1 est plus grand que 1, et divergente si a_1 est plus petit que 1. Si $a_1 = 1$, mettez la racine $\sqrt[m]{u_m}$ sous la forme

$$1 - \frac{lm}{m} - \frac{llm}{m} - r'',$$

et calculez la valeur

$$a_2$$

que prend $\frac{mr''}{lllm}$ quand $m = \infty$; la série sera convergente si a_2 est plus grand que 1, et divergente si a_2 est plus petit que 1. Si $a_2 = 1$, mettez la racine $\sqrt[m]{u_m}$ sous la forme

$$1 - \frac{lm}{m} - \frac{llm}{m} - \frac{lllm}{m} - r'',$$

et continuez de la même manière.

Démonstration. Commençons par transformer les racines

$$\sqrt[m]{\frac{1}{m}}, \quad \sqrt[m]{\frac{1}{lm}}, \quad \sqrt[m]{\frac{1}{llm}} \cdots,$$

1°. Soit

$$\sqrt[m]{\frac{1}{m}} = x, \quad \text{d'où} \quad x^m = \frac{1}{m};$$

x sera plus petit que 1 ; posant

$$x = 1 - y,$$

il viendra

$$(1-y)^m = \frac{1}{m}, \quad \text{d'ou} \quad ml(1-y) = -lm, \quad \text{d'où} \quad l(1-y) = -\frac{lm}{m}.$$

ou

$$y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \ldots = y + \varepsilon y^2 = \frac{lm}{m},$$

ε étant un nombre fini quelque grand que soit m; de là on tire

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\varepsilon \frac{lm}{m}}}{2\varepsilon} = \frac{-1 \pm \left[1 + 2\varepsilon \frac{lm}{m} + \omega \left(\frac{lm}{m}\right)^2\right]}{2\varepsilon},$$

ω étant un nombre fini quelque grand que soit m ; on ne doit évidemment prendre que le signe supérieur, car on a

$$y = 0 \quad \text{pour } m = \infty;$$

on a donc

$$y = \frac{lm}{m} + \omega \left(\frac{lm}{m}\right)^2,$$

et par conséquent

$$\sqrt[m]{\frac{1}{m}} = x = 1 - y = 1 - \frac{lm}{m} + \omega \left(\frac{lm}{m}\right)^2,$$

ω étant un nombre fini quelque grand que soit m.

2°. Soit

$$\sqrt[m]{\frac{1}{lm}} = x, \quad \text{d'où} \quad x^m = \frac{1}{lm};$$

x sera plus petit que 1 ; posant

$$x = 1 - y.$$

il viendra

$$(1-y)^m = \frac{1}{lm}, \quad \text{d'où} \quad ml(1-y) = -llm, \quad \text{d'où} \quad l(1-y) = -\frac{llm}{m},$$

ou

$$y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \ldots = y + \varepsilon y^2 = \frac{llm}{m},$$

ε étant un nombre fini quelque grand que soit m; de là on tire

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\varepsilon \frac{llm}{m}}}{2\varepsilon} = \frac{-1 \pm \left[1 + 2\varepsilon \frac{llm}{m} + \omega \left(\frac{llm}{m}\right)^2\right]}{2\varepsilon},$$

ω étant un nombre fini quelque grand que soit m; on ne doit prendre évidemment que le signe supérieur, car on a

$$y = 0, \quad \text{pour} \quad m = \infty:$$

on a donc

$$y = \frac{llm}{m} + \omega \left(\frac{llm}{m}\right)^2,$$

et par conséquent

$$\sqrt[m]{\frac{1}{lm}} = x = 1 - y = 1 - \frac{llm}{m} + \omega \left(\frac{llm}{m}\right)^2,$$

ω étant un nombre fini quelque grand que soit m.

3°. Soit

$$\sqrt[m]{\frac{1}{llm}} = x, \quad \text{d'où} \quad x^m = \frac{1}{llm};$$

x sera plus petit que 1; posant

$$x = 1 - y,$$

il viendra

$$(1-y)^m = \frac{1}{llm}, \quad \text{d'où} \quad ml(1-y) = -lllm, \quad \text{d'où} \quad l(1-y) = -\frac{lllm}{m},$$

ou

$$y + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{3} + \ldots = y + \varepsilon y^2 = \frac{lllm}{m},$$

ε étant un nombre fini quelque grand que soit m; de là on tire

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\varepsilon \frac{lllm}{m}}}{2\varepsilon} = \frac{-1 \pm \left[1 + 2\varepsilon \frac{lllm}{m} + \omega \left(\frac{lllm}{m}\right)^2\right]}{2\varepsilon}.$$

ω étant un nombre fini quelque grand que soit m; on ne doit prendre évidemment que le signe supérieur, car on doit avoir

$$y = 0, \quad \text{pour} \quad m = \infty;$$

on a donc

$$y = \frac{lllm}{m} + \omega \left(\frac{lllm}{m}\right)^2,$$

et par conséquent

$$\sqrt[m]{\frac{1}{llm}} = x = 1 - y = 1 - \frac{lllm}{m} + \omega \left(\frac{lllm}{m}\right)^2.$$

ω étant un nombre fini quelque grand que soit m.

4°. On trouverait de la même manière

$$\sqrt[m]{\frac{1}{lllm}} = 1 - \frac{llllm}{m} + \omega \left(\frac{llllm}{m}\right)^2,$$

ω étant un nombre fini quelque grand que soit m, et ainsi de suite.

Des résultats que nous venons d'obtenir on déduit sans peine

$$\sqrt[m]{\frac{1}{m^k}} = 1 - k\frac{lm}{m} + \omega \left(\frac{lm}{m}\right)^2,$$

$$\sqrt[m]{\frac{1}{(lm)^k}} = 1 - k\frac{llm}{m} + \omega \left(\frac{llm}{m}\right)^2,$$

$$\sqrt[m]{\frac{1}{(llm)^k}} = 1 - k\frac{lllm}{m} + \omega \left(\frac{lllm}{m}\right)^2,$$

$$\sqrt[m]{\frac{1}{(lllm)^k}} = 1 - k\frac{llllm}{m} + \omega \left(\frac{llllm}{m}\right)^2,$$

. . . .

k étant un nombre positif quelconque et ω représentant un nombre fini quelque grand que soit m.

Par suite, on a

$$\sqrt[m]{\frac{1}{m^k}} = 1 - k\frac{lm}{m} + \omega\left(\frac{lm}{m}\right)^2,$$

$$\sqrt[m]{\frac{1}{m(lm)^k}} = 1 - \frac{lm}{m} - k\frac{llm}{m} + \omega\left(\frac{lm}{m}\right)^2,$$

$$\sqrt[m]{\frac{1}{mlm(llm)^k}} = 1 - \frac{lm}{m} - \frac{llm}{m} - k\frac{lllm}{m} + \omega\left(\frac{lm}{m}\right)^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ω étant encore un nombre fini quelque grand que soit m.

Revenons maintenant à la démonstration des règles.

Supposons, en premier lieu, qu'une des limites a_0, a_1, a_2,.... soit plus grande que 1 ; je dis que l'on aura, pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini, une des inégalités

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned} & 1 - r < \sqrt[m]{\frac{1}{m^k}}, \quad 1 - \frac{lm}{m} - r' < \sqrt[m]{\frac{1}{m(lm)^k}}, \\ & 1 - \frac{lm}{m} - \frac{llm}{m} - r'' < \sqrt[m]{\frac{1}{mlm(llm)^k}}, \ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

où k est un nombre plus grand que 1.

En effet, substituant aux seconds membres leurs valeurs obtenues précédemment, ces inégalités deviennent

$$-r < -k\frac{lm}{m} + \omega\left(\frac{lm}{m}\right)^2. \quad -r' < -k\frac{llm}{m} + \omega\left(\frac{lm}{m}\right)^2.$$

$$-r'' < -k\frac{lllm}{m} + \omega\left(\frac{lllm}{m}\right)^2, \ldots,$$

d'où

$$\frac{mr}{lm} > k - \omega\frac{lm}{m}, \qquad \frac{mr'}{llm} > k - \omega\frac{(lm)^2}{mllm}, \qquad \frac{mr'}{lllm} > k - \omega\frac{(lm)^2}{mlllm}, \ldots\ldots$$

Si l'on fait croître m jusqu'à l'infini, les premiers membres des dernieres inegalités convergent respectivement vers a_0, a_1, a_2,..., tandis que les seconds membres ont tous pour limite k; or k étant assujetti à la seule condition d'être plus grand que 1, peut, en outre, être supposé plus petit qu'une des limites a_0, a_1, a_2,..., si, comme nous le supposons, parmi ces limites il y en a une plus grande que 1 ; cela étant, une des dernières inégalités ne peut pas manquer d'avoir lieu à partir d'une certaine valeur de m, donc aussi, une des inégalités (1) a lieu pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini.

On déduit maintenant des inégalités (1),

$$u_m < \frac{1}{m^k}, \quad u_m < \frac{1}{m(lm)^k}, \quad u_m < \frac{1}{mlm(llm)^k} \ldots.$$

Cela prouve (*lemmes* I et III) que, dans chacun des cas supposés, la série est convergente.

Supposons, en second lieu, qu'une des limites a_0, a_1, a_2,..., soit plus petite que 1; je dis que l'on aura, pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini, une des inégalités

$$(2)\left\{\begin{array}{l} 1 - r > \sqrt[m]{\frac{1}{m^k}}, \quad 1 - \frac{lm}{m} - r' > \sqrt[m]{\frac{1}{m(lm)^k}}, \\ 1 - \frac{lm}{m} - 1\frac{llm}{m} - r'' > \sqrt[m]{\frac{1}{mlm(llm)^k}}, \ldots\ldots, \end{array}\right.$$

où k est un nombre plus petit que 1.

En effet, substituant aux seconds membres leurs valeurs obtenues ci-dessus, ces inégalités deviennent

$$-r > -k\frac{lm}{m} + \omega\left(\frac{lm}{m}\right)^2, \quad -r' > -k\frac{llm}{m} + \omega\left(\frac{lm}{m}\right)^2,$$
$$-r > -k\frac{lllm}{m} + \omega\left(\frac{lm}{m}\right)^2, \ldots\ldots,$$

d'où

$$\frac{mr}{lm} < k - \omega\frac{lm}{m}, \quad \frac{mr'}{llm} < k - \omega\frac{(lm)}{mllm}, \quad \frac{mr}{lllm} < k - \omega\frac{(lm)}{mlllm}, \ldots$$

Si l'on fait croître m jusqu'à l'infini, les premiers membres des dernières inégalités convergent respectivement vers a_0, a_1, a_2,..., tandis que les seconds membres ont tous pour limite k ; or k étant assujetti à la seule condition d'être plus petit que 1, peut, en outre, être supposé plus grand qu'une des limites a_0, a_1, a_2,..., si, comme nous le supposons, parmi ces limites il y en a une plus petite que 1 ; cela étant, une des dernières inégalités ne peut pas manquer d'avoir lieu à partir d'une certaine valeur de m, donc aussi, une des inégalités (2) aura lieu pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini.

On déduit maintenant des inégalités (2).

$$u_m > \frac{1}{m^k}, \quad u_m > \frac{1}{m(lm)^k}. \quad u_m > \frac{1}{mlm(llm)^k}, \ldots .$$

Cela prouve (*lemmes* I et III) que, dans chacun des cas supposés. la série est divergente.

IX.

Les règles de M. de Morgan, celles de M. Bertrand, ou bien enfin celles que nous venons de démontrer en dernier lieu, suffiront, dans la plupart des cas, pour décider la convergence ou la divergence des séries. Il faut pourtant remarquer que toutes ces règles seront en défaut lorsque que les limites que nous avons représentées par a_0, a_1, a_2,..., n'ayant pas de valeur déterminée, seront tantôt plus grandes et tantôt plus petites que 1. Dans ce cas, on lèvera quelquefois la difficulté en groupant deux à deux, ou trois à trois, ou quatre à quatre, etc., les termes de la série, et considérant les groupes obtenus comme les termes de nouvelles séries auxquelles on appliquera les règles. On pourra opérer de la même manière pour les séries à termes tantôt positifs et tantôt négatifs, car les groupes formés pourront tous avoir le même signe, et alors les règles exposées suffiront pour reconnaître la convergence ou la divergence. Du reste, nous nous proposons de revenir en détail sur tous ces cas dans une autre occasion.

X.

Nous terminerons en donnant des règles pour reconnaître si une intégrale définie est finie ou infinie, lorsqu'une des limites rend infinie la fonction sous le signe $\int$.

Soit l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

et admettons que

$$f(b) = \infty$$ [*].

Pour déterminer si cette intégrale est finie ou infinie :

Règle. Considérez les deux expressions

$$(b-x)^{1-\delta} f(x), \qquad (b-x) f(x),$$

où δ représente un nombre positif aussi petit qu'on veut mais différent de zéro, et calculez les valeurs

$$a_0, \qquad a'_0,$$

qu'elles prennent pour $x = b$; l'intégrale sera finie si a_0 n'est pas infini, et infinie si a'_0 n'est pas zéro. Si a_0 est infini et que a'_0 soit zéro, considérez les deux expressions

$$(b-x)\left(l\frac{1}{b-x}\right)^{1+\delta} f(x), \quad (b-x)\, l\frac{1}{b-x}\, f(x),$$

où δ est un nombre positif aussi petit qu'on veut mais différent de zéro, et calculez les valeurs

$$a_1, \qquad a'_1,$$

qu'elles prennent quand $x = b$; l'intégrale sera finie si a_1 n'est pas infini, et infinie si a'_1 n'est pas zéro. Si a_1 est infini et que a'_1 soit zéro, considérez les deux expressions

$$(b-x)\, l\frac{1}{b-x}\left(ll\frac{1}{b-x}\right)^{1+\delta} f(x), \qquad (b-x)\, l\frac{1}{b-x}\, ll\frac{1}{b-x}\, f(x),$$

où δ est un nombre positif aussi petit qu'on veut mais différent de

---

[*] Nous supposons, en outre, que $f(x)$ garde le même signe pour toutes les valeurs de x qui avoisinent b. Si cela n'était pas, on profiterait de la remarque qui a été faite dans le paragraphe précédent.

zéro, et calculez les valeurs

$$a_2, \qquad a'_2,$$

qu'elles prennent quand $x = b$; l'intégrale sera finie si a_2 n'est pas infini, et infinie si a'_2 n'est pas zéro. Si a_2 est infini et que a'_2 soit zéro, considérez les deux expressions

$$(b - x)\, l\frac{1}{b-x}\; ll\frac{1}{b-x}\left(lll\frac{1}{b-x}\right)^{1+\delta} f(x),$$
$$(b - x)\, l\frac{1}{b-x}\; ll\frac{1}{b-x}\; lll\frac{1}{b-x} f(x),$$

et continuez de la même manière [*].

Demonstration. Supposons, en premier lieu, qu'une des limites a_0, a_1, a_2,...., soit différente de l'infini; on aura alors depuis une valeur de x, $\beta < b$, jusqu'à b, une des inégalités

$$(b - x)^{1-\delta} f(x) < k, \quad (b - x)\left(l\frac{1}{b-x}\right)^{1+\delta} f(x) < k,$$
$$(b - x)\, l\frac{1}{b-x}\left(ll\frac{1}{b-x}\right)^{1+\delta} f(x) < k \ldots\ldots,$$

où k est un nombre déterminé et fini. Or on déduit successivement de ces inégalités,

$$f(x) < \frac{k}{(b-x)^{1-\delta}}, \quad f(x) < \frac{k}{(b-x)\left(l\frac{1}{b-x}\right)^{1+\delta}},$$
$$f(x) < \frac{k}{(b-x)\, l\frac{1}{b-x}\left(ll\frac{1}{b-x}\right)^{1+\delta}} \ldots\ldots\ldots,$$

d'où

$$\int_\beta^b f(x)\,dx < \frac{k}{\delta}(b-\beta)^\delta, \quad \int_\beta^b f(x)\,dx < \frac{k}{\delta}\frac{1}{\left(l\frac{1}{b-\beta}\right)^\delta},$$
$$\int_\beta^b f(x)\,dx < \frac{k}{\delta}\frac{1}{\left(ll\frac{1}{b-\beta}\right)^\delta}, \ldots\ldots$$

Cela prouve que, dans chacun des cas supposés, l'intégrale est finie.

---

[*] En changeant $b - x$ en $x - a$, on obtient les règles qu'il faut employer dans le cas où, au lieu de $f(b) = \infty$, on a $f(a) = \infty$.

Supposons, en second lieu, qu'une des limites a_0, a_1, a_2, .., soit différente de zéro; on aura alors depuis une valeur de x, $\beta < b$, jusqu'à b, une des inégalités,

$$(b-x)f(x) > k,\quad (b-x)\,l\frac{1}{b-x}f(x) > k,\quad (b-x)\,l\frac{1}{b-x} > k,\ldots\ldots$$

où k est un nombre fini et différent de zero. Or on déduit successivement de ces inégalités,

$$f(x) > \frac{k}{b-x},\quad f(x) > \frac{k}{(b-x)\,l\frac{1}{b-x}},\quad f(x) > \frac{k}{(b-x)\,l\frac{1}{b-x}\,ll\frac{1}{b-x}},\ldots\ldots$$

d'où

$$\int_\beta^b f(x)\,dx > \infty,\quad \int_\beta^b f(x)\,dx > \infty,\quad \int_\beta^b f(x)\,dx > \infty,\ldots\ldots$$

Cela prouve que, dans chacun des cas supposés, l'intégrale est infinie.

XI.

On trouverait sans peine des regles analogues aux precedentes pour reconnaître si une intégrale définie est finie ou infinie, quand l'une des limites est infinie.

DÉTERMINATION DE L'INTÉGRALE DÉFINIE

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)\,dx}{1+x^2};$$

Par J. BERTRAND,

Élève-Ingénieur des Mines.

J'ai été conduit à la valeur de cette intégrale en appliquant à l'intégrale indéfinie $\int_0^x \frac{l(1+x^2)\,dx}{1+x^2}$ un procédé de réduction analogue à l'intégration par partie, et que je commencerai par exposer d'une manière générale.

I.

Soit une intégrale $\int_0^x \varphi(x)\,dx$, considérons une fonction de deux variables $\psi(x, m)$, qui devienne égale à $\varphi(x)$ par la substitution de x à m, en sorte que $\psi(x, x) = \varphi(x)$; la fonction ψ pourra évidemment être déterminée d'une infinité de manières différentes. Soit

$$\int_0^x \psi(x, m)\,dx = \psi_1(x, m).$$

Différentions $\psi_1(x, m)$ par rapport à m, et posons

$$\frac{d\psi_1(x, m)}{dm} = \int_0^x \frac{d\psi(x, m)}{dm}\,dx = \psi_2(x, m).$$

Je dis que l'on aura identiquement

$$(1) \qquad \int_0^x \varphi(x)\,dx = \psi_1(x, x) - \int_0^x \psi_2(x, x)\,dx + C,$$

en sorte que l'intégrale proposée se trouvera ramenée à l'intégrale, en général, fort différente, $\int_0^x \psi_2(x, x)\,dx$.

La démonstration de ce théorème est bien facile : il suffit de différentier les deux membres par rapport à x ; le premier donne évidemment $\varphi(x)$; quant au second sa dérivée est égale à

$$\frac{d\psi_1(x, x)}{dx} - \psi_2(x, x);$$

or en traitant $\psi_1(x, x)$ comme une fonction composée, et se rappelant que l'on a

$$\frac{d\psi_1(x, m)}{dx} = \psi(x, m), \qquad \frac{d\psi_1(x, m)}{dm} = \psi_2(x, m),$$

cette dérivée devient

$$\psi(x, x) + \psi_2(x, x) - \psi_2(x, x) = \psi(x, x) = \varphi(x)$$

Les deux membres de l'équation (1) ont donc même dérivée, et par conséquent ils peuvent être considérés comme égaux, puisque nous avons ajouté une constante au second

Il est facile de voir que le théorème précédent renferme comme cas particulier le procédé d'intégration par parties. Soit, en effet,

$$\varphi(x) = f(x) \times \mathrm{F}'(x);$$

prenons

$$\varphi(x, m) = f(m) \times \mathrm{F}'(x),$$

nous aurons évidemment

$$\psi_1(x, m) = \int_0^x dx\, f(m)\, \mathrm{F}'(x) = f(m)\, \mathrm{F}(x) - f(m)\, \mathrm{F}(0),$$

$$\psi_2(x, m) = \frac{d\psi_1(x, m)}{dm} = f'(m)\, \mathrm{F}(x) - f'(m)\, \mathrm{F}(0),$$

en sorte que la formule (1) devient

$$\int_0^x f(x)\, \mathrm{F}'(x)\, dx = f(x)\, \mathrm{F}(x) - \int_0^x f'(x)\, \psi(x)\, dx + \mathrm{C},$$

ce qui est précisément la formule d'intégration par parties.

II.

Appliquons le théorème précédent à l'intégrale $\int_0^x \frac{l(1+x)\, dx}{1+x^2}$; prenons

$$\psi(x, m) = \frac{l(1+mx)}{1+x^2},$$

nous aurons

$$\psi_1(x, m) = \int_0^x \frac{l(1+mx)}{1+x^2}\, dx.$$

La valeur de

$$\psi_2(x, m) = \frac{d\psi_1(x, m)}{dm}$$

sera donc

$$\int_0^x \frac{x\,dx}{(1+mx)(1+x^2)} = -\frac{1}{1+m^2}\, l(1+mx) + \frac{l(1+x^2)}{2(1+m^2)} + \frac{m}{1+m^2} \text{ arc tang } x \ (*);$$

(*) En supposant égale à 1 la limite supérieure de l'intégrale, cette formule donne

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+mx)(1+x^2)} = -\frac{l(1+m)}{1+m^2} + \frac{l\,2}{2(1+m^2)} + \frac{\pi}{4}\,\frac{m}{1+m^2}$$

Multiplions les deux membres par dm et intégrons de $m = 0$ à $m = 1$, il nous viendra

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)\, dx}{1+x^2} = -\int_0^1 \frac{l(1+m)\, dm}{1+m^2} + \frac{\pi\, l2}{4},$$

et comme l'intégrale est au fond la même dans les deux membres, nous en concluons

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)\, dx}{1+x^2} = \frac{\pi\, l2}{8}$$

c'est précisément le résultat auquel arrive M. Bertrand. (J. L.)

en remplaçant m par x dans cette expression, il vient

$$\psi_2(x,\, x) = -\frac{1}{2}\,\frac{l(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}\,\text{arc tang}\, x,$$

et par suite, d'après la formule (1),

$$\int_0^x \frac{l(1+x^2)\,dx}{1+x^2} = \psi_1(x,x) + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{l(1+x^2)\,dx}{1+x^2} - \int_0^x \frac{xdx\,\text{arc tang}\, x}{1+x^2} + \text{C}.$$

Mais en intégrant par parties, on a

$$\int_0^x \frac{xdx\,\text{arc tang}\, x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\,l(1+x^2)\,\text{arc tang}\, x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dx\, l(1+x^2)}{1+x^2}.$$

Substituant, et supprimant l'intégrale $\int_0^x \frac{dx\, l(1+x^2)}{1+x^2}$, qui se trouve commune aux deux membres, il vient

$$\psi_1(x,\, x) = \frac{1}{2}\,l(1+x^2)\,\text{arc tang}\, x.$$

Mais $\psi_1(x,\, x)$ est ce que devient l'integrale $\int_0^x \frac{l(1+mx)\,dx}{1+x^2}$ lorsque l'on y remplace m par x. C'est, par conséquent, comme il est facile de le voir,

$$\int_0^x \frac{l(1+xz)\,dz}{1+z^2}.$$

Nous avons donc

$$\int_0^x \frac{l(1+xz)\,dz}{1+z^2} = \frac{1}{2}\,l(1+x^2)\,\text{arc tang}\, x;$$

car la constante est évidemment nulle, puisque arc tang x s'annulle avec x. Si, dans cette formule, on fait $x = 1$, elle devient

$$\int_0^1 \frac{l(1+z)\,dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{8}\,l2.$$

Cette intégrale n'était pas connue, je crois. On pourrait l'obtenir de plusieurs manières; j'ai choisi la precèdente parce qu'elle repose sur une methode nouvelle d'integration qui pourra être utile dans certains cas.

MÉMOIRE
SUR UN PHÉNOMÈNE
RELATIF
A LA COMMUNICATION DES MOUVEMENTS VIBRATOIRES;

Par M. DUHAMEL.

Dans son premier Mémoire sur la communication des mouvements vibratoires, M. Savart a fait connaître un phénomène qui lui paraissait très-singulier, mais dont il n'a pas donné l'explication. Il s'est borné à indiquer une cause à laquelle on pouvait, disait-il, l'attribuer; mais il ne s'est pas prononcé d'une manière absolue. et je montrerai d'ailleurs que les choses se passent autrement qu'il ne le supposait. Le Mémoire que je publie aujourd'hui a pour objet de donner l'explication générale de ce phénomène et d'en soumettre les différentes circonstances à l'analyse mathématique. Je commencerai par extraire du Mémoire de M. Savart le passage suivant, qui fera connaître en quoi consiste le phénomène et comment cet illustre physicien l'envisageait.

« Quand deux verges sont réunies de manière que l'une des deux
» tombe perpendiculairement sur l'un des points de l'autre, destiné
» à être le milieu d'une partie vibrante, si l'on excite des ondes longi-
» tudinales dans la première, la seconde deviendra le siége de vibra-
» tions transversales.

» Il se présente ici une question très-difficile à résoudre. Comment
» se fait-il que des vibrations longitudinales excitées dans une verge
» très-courte, vibrations dont le nombre doit être très-considérable
» dans un temps donné, et qui devraient produire un son extrême-
» ment aigu, puissent provoquer l'existence de vibrations transver-
» sales beaucoup plus lentes.

» Les circonstances qui accompagnent cette expérience pourront

» peut-être jeter quelque jour sur un phénomène si singulier. Si l'on
» place verticalement l'appareil, et qu'on excite des vibrations trans-
» versales dans la grande verge A, nous avons vu que la petite verge A′
» devenait le siége de vibrations longitudinales; si l'on tient compte
» de la disposition des lignes nodales formées par le sable, on remar-
» que que quand on ébranle directement la petite verge A′ dans le sens
» longitudinal, ces lignes prennent le même arrangement que dans le
» premier cas; on pourrait donc penser que la première série d'ondes
» excitées directement arrivant contre la grande verge A, est pour elle
» un mode d'ébranlement quelconque, une espèce d'archet qui la dé-
» termine à osciller suivant que le comportent ses dimensions; et
» qu'aussitôt qu'elle est en jeu, elle réagit sur la petite verge A′, qui
» devient alors le siége d'ondes dont la longueur est déterminée par
» l'espace que le son parcourt pendant le temps que dure une des vi-
» brations de la grande verge A; ce qui supposerait par conséquent
» que A′ vibrerait toujours à l'unisson avec A, quelque différentes que
» fussent les dimensions de ces deux corps. »

Ainsi le phénomène reconnu par M. Savart consiste en ce qu'une verge adaptée perpendiculairement à une autre, et frottée dans le sens de sa longueur, détermine la seconde à vibrer de la même manière que si on l'ébranlait au moyen d'un archet. Et quant à la manière dont ce résultat est produit, il pense que les ondes excitées dans la première verge, arrivant à la seconde, la mettent en mouvement, comme le ferait tout autre mode d'ébranlement.

Si les choses se passaient de cette manière, le phénomène serait en effet très-difficile à concevoir et à analyser. Il paraîtrait peu naturel que des vibrations d'une durée et d'une amplitude excessivement petite en produisissent d'autres très-lentes et d'une amplitude beaucoup plus grande.

Mais les vibrations excitées dans la première verge ne sont pour rien dans ce phénomène, qui ne serait nullement altéré, lors même que cette verge ne serait pas susceptible de vibrer longitudinalement. La véritable cause est la force que produit le frottement dans le sens de la première verge, que l'on peut même supposer entièrement rigide; cette force peut être considérée comme appliquée au point où la petite verge rencontre la grande, et, en l'introduisant, on peut faire abstraction de toute autre cause extérieure. La question revient donc à calculer le mouvement de la seconde verge, à laquelle on adapte une masse égale à celle de la petite en un de ses points mobiles, et qui se trouve sollicitée par une force perpendiculaire à sa longueur.

Le même phénomène aurait lieu si la première verge était fixée à une corde dont deux points seraient fixes, ou à une surface dont le contour ou seulement plusieurs points seraient immobiles. Le calcul peut être plus compliqué dans un cas que dans l'autre; mais ce qui est le plus important ici, c'est de reconnaître la vraie cause du phénomène, et de montrer à quelle question d'analyse il conduit. Pour s'assurer ensuite si la théorie s'accorde avec l'expérience, on prendra des cas où les calculs pourront s'exécuter complétement et donneront des résultats facilement comparables avec les faits; on remplira ces conditions de la manière la plus simple dans le cas actuel, en supposant la première verge adaptée à une corde fixée à ses deux extrémités.

C'est en vue de résoudre ce problème que je me suis d'abord occupé du mouvement des cordes chargées de curseurs. Dans le Mémoire que j'ai eu l'honneur de communiquer sur ce sujet à l'Académie, j'ai donné à cette question plus d'extension qu'il n'était nécessaire pour l'application que j'avais d'abord l'intention d'en faire; mais les lois auxquelles j'avais été conduit m'avaient paru assez importantes par elles-mêmes pour faire l'objet d'un travail spécial: j'aurai l'occasion d'y renvoyer dans le cours de ce Mémoire.

L'accord de ces lois et des résultats que l'expérience m'a donnés pour le phénomène qui nous occupe, suffirait pour démontrer la justesse de mon explication; mais on peut obtenir encore de nouvelles confirmations par la considération de circonstances remarquables qui doivent se produire si les choses se passent comme je l'ai indiqué.

En effet, des raisonnements analogues à ceux qui se trouvent dans mon Mémoire sur l'archet démontrent que lorsque le corps frottant a toujours une vitesse plus grande que celle de la tige frottée, le mouvement de la corde doit s'arrêter, quoique le frottement soit produit indéfiniment; qu'au contraire, lorsque la corde acquiert à certains instants une vitesse égale à celle du corps frottant, le mouvement se prolonge indéfiniment, mais que le son peut s'abaisser au-dessous du son fondamental. Or ces deux résultats, annoncés par la théorie, sont pleinement confirmés par l'expérience. Lorsque le mouvement du corps frottant est assez rapide, on voit promptement celui de la corde diminuer et devenir imperceptible, et celle-ci s'arrête dans la position où elle serait en équilibre sous l'action d'une force égale au frottement; et de même aussi, lorsque le mouvement du corps frottant est devenu assez lent, on reconnaît un abaissement notable dans le ton.

On voit donc que le phénomène observé par M. Savart doit se produire, ainsi que plusieurs autres qu'il n'a pas connus, en faisant usage d'une tige entièrement rigide, dans laquelle il ne pourrait se produire de vibrations longitudinales. Les vibrations de la corde ne sont donc pas excitées par celles de la tige, puisqu'elles doivent avoir lieu lors même que celles-ci n'existent pas. Il en résulte même que lorsque la tige est susceptible de vibrer longitudinalement, cette nouvelle circonstance ne peut tendre qu'à troubler entre certaines limites l'effet des autres. La cause à laquelle M. Savart semblait disposé à attribuer le phénomène, serait donc au contraire une de celles qui tendraient à l'empêcher. Mais je ne m'en suis pas tenu à cette vue générale, et j'ai calculé l'effet que produirait sur une corde sa liaison avec une tige qui aurait un mouvement vibratoire connu.

L'analyse m'a conduit à une proposition qu'on peut énoncer de la manière suivante, et qui renferme le cas d'une corde à laquelle seraient appliquées des forces constantes, en observant qu'une force constante peut toujours être remplacée par un état initial convenable.

Lorsqu'une corde, partant d'un état initial quelconque, a l'une de ses extrémités fixes et l'autre animée d'un mouvement périodique permanent, son mouvement est la superposition de trois autres dont l'un dépend de l'état initial, et les deux autres en sont indépendants. L'un de ces derniers est périodique, et la durée de sa période est la même que celle qui se rapporte à l'extrémité. L'autre est aussi périodique, mais la durée de sa période est la même que si la corde vibrait avec ses extrémités fixes.

Cette indication de l'analyse méritait d'être vérifiée par l'expérience. Pour cela j'ai pris une corde tendue par un poids arbitraire, ayant une de ses extrémités fixe, et l'autre attachée à l'un des angles d'une plaque métallique carrée, dans le plan de laquelle la corde était comprise; puis j'ai fait vibrer la plaque de manière à avoir deux lignes nodales parallèles aux côtés et passant par le centre : les angles ont eu le plus grand mouvement possible, ainsi que l'extrémité de la corde; de sorte que les vibrations de tous les points de celle-ci étaient tres-sensibles. Pour les déterminer, j'ai employé le moyen dont j'ai souvent fait usage, et que j'avais imaginé il y a bien des années. J'ai adapté en un point quelconque de la corde une petite lame élastique recourbée en pointe à son extrémité, et d'une masse insensible. La pointe pressait légèrement un plateau de verre recouvert d'une légère couche de fumée, et auquel on donnait un mouvement arbitraire, les vibrations se peignaient ainsi d'une manière parfaitement nette. J'ai de même adapté une seconde lame à l'angle de la plaque, et j'ai pu facilement comparer les nombres de vibrations exécutées dans un même temps par un point quelconque de la corde et par son extrémité, dont le mouvement était identique à celui de l'angle de la plaque. Or voici ce qui résulte de mes observations.

Lorsque, dans son état initial, la corde est sensiblement écartée de sa position d'équilibre, le mouvement de ses différents points résulte de la superposition clairement dessinée de deux mouvements partiels : le premier est celui qu'on aurait obtenu d'après l'état initial, en supposant fixes les deux extrémités de la corde; le second est périodique et synchrone avec celui de la plaque ou de l'extrémité mobile. Peu à peu le premier s'affaiblit et finit bientôt par s'anéantir; le second, au contraire, persiste avec la plus grande régularité, aussi longtemps que la plaque elle-même conserve son mouvement. Dans ce mouvement final il se forme des nœuds si la corde a une tension telle, que si l'on fixait les extrémités, elle vibrerait moins rapidement que la plaque. Dans le cas contraire il ne s'en forme pas, et quelque rapides que dussent être les vibrations de la corde abandonnée à elle-même avec ses extrémités fixes, celles qui ont lieu ont toujours la même période que celles de la place, et les choses se passent comme si la corde était prolongée et que le premier nœud fût au delà de l'extrémité mobile.

Ces expériences font voir que l'un des mouvements dont l'existence est annoncée par l'analyse est généralement insensible, après un certain temps, sans que l'on doive conclure toutefois qu'il ne puisse jamais être manifesté. Et l'on doit toujours remarquer cette indication de l'analyse, que *des systèmes en repos, mis en communication avec des* *systèmes vibrants, peuvent exécuter des mouvements qui n'arrivent pas à avoir la même période que ceux qui les produisent.*

Il résulte de ce qui précède que si, dans l'expérience de M. Savart, la corde était mise en mouvement par les vibrations longitudinales excitées dans la petite tige, chacune de ses parties se trouverait dans les circonstances que nous venons d'étudier, et par conséquent exécuterait des vibrations de même durée que celles de la tige, c'est-à-dire très-différentes de celles qu'indique l'observation. Ainsi ce phénomène, que nous avons si naturellement et si complétement expliqué et calculé, ne peut qu'être troublé par la cause que lui assignait notre illustre confrère. Cette cause ne pourrait, du reste, le modifier que d'une quantité insensible, vu la petitesse de l'amplitude des vibrations longitudinales de la tige, comparativement aux vibrations transversales de la corde. Enfin on peut ajouter que cette cause si minime n'existe même pas toujours; car il ne suffit pas de frotter une tige pour la faire vibrer, il faut y déterminer d'abord des points immobiles, destinés à devenir des nœuds de vibration, ce qui ne se fait pas dans l'expérience que nous discutons : et par conséquent il y a lieu de croire que, le plus ordinairement, les vibrations longitudinales, dont l'effet serait insensible, n'existent même pas réellement dans la tige frottée.

Pour épuiser en quelque sorte l'analyse de cette partie du phénomène, j'ai cherché à produire effectivement des vibrations longitudinales dans la tige et à déterminer le mouvement résultant de la corde. Mais, pour obtenir ce résultat, il fallait faire l'expérience autrement que M. Savart, et rendre immobiles certains points de cette tige. A cet effet j'ai fixé son milieu seulement, pour que ses mouvements fussent plus perceptibles, et j'y ai excité immédiatement des vibrations longitudinales accompagnées d'un son très-pur, propre par lui seul à les faire reconnaître. La corde s'est trouvée dans le même cas que nous avons examiné tout à l'heure en considérant une corde dont une extrémité était mise en mouvement par les vibrations d'une plaque, et l'expérience a donné des résultats analogues; seulement les mouvements de la corde produits par les vibrations de la tige avaient, comme celles-ci, une amplitude très-petite; mais il était très-facile de compter les nombres des vibrations exécutées de part et d'autre dans un même temps, et de reconnaître leur parfaite égalité.

Il résulte de là que *des vibrations longitudinales excitées dans la tige produisent des vibrations transversales synchrones dans la corde, quelle que soit sa longueur, ainsi que sa masse et celle de la tige, et que par conséquent elles ne sont pour rien dans le phénomène que nous étudions*.

Le mouvement de la corde étant connu, il reste à déterminer celui de la verge, et comme elle est supposée susceptible de condensation et de dilatation, le calcul de ses vibrations présente une question assez délicate à résoudre. Il s'agit alors de *déterminer le mouvement des différents points d'une verge élastique dont une extrémité est animée d'un mouvement connu dirigé dans le sens de sa longueur, et dont l'amplitude est incomparablement plus grande que celle des vibrations longitudinales dont cette verge peut être le siége*. La solution de cette question pourrait facilement donner lieu à des méprises, et peut sembler au premier abord plus facile qu'elle ne l'est réellement; je l'ai obtenue au moyen d'une méthode générale que j'ai fait connaître, il y a longtemps, dans mon Mémoire sur les vibrations d'un système de points matériels.

J'ai été conduit ainsi à reconnaître deux espèces de vibrations longitudinales dans la verge : les unes ont la même période que celles de la corde, et les autres ont pour période celles des vibrations de cette verge dont on fixerait une extrémité en laissant l'autre libre; elles seraient produites en partant d'un certain état initial et abandonnant la verge à elle-même. Si, comme nous le supposons ici, la verge a une petite longueur, ces dernières seront très-rapides, et les points où le sable répandu sur leur face horizontale supérieure se réunirait seraient très-rapprochés. Il n'en sera pas de même des vibrations beaucoup plus lentes de la première espèce : elles donneront pour le sable des points de repos plus distants; et comme les mouvements qui les déterminent auront plus d'amplitude, l'accumulation du sable ne sera réellement due qu'à ces vibrations, synchrones avec celles de la corde.

Or, c'est aussi ce que l'expérience a donné à M. Savart, et il n'a pu reconnaître que cette seule espèce de vibrations. Il aurait fallu un mode d'expérimentation plus délicat pour distinguer l'autre espèce de mouvement indiqué par le calcul.

Le Mémoire dont je viens de donner l'analyse offre un nouvel exemple des mouvements vibratoires produits par le frottement. C'est dans mon Mémoire sur la théorie de l'archet que j'ai introduit pour la première fois cette force dans l'acoustique, et cette considération était essentielle pour l'intelligence de phénomènes jusqu'alors inexpliqués. Les physiciens expérimentateurs verront sans doute avec plaisir cette nouvelle application de l'analyse, qui non-seulement a conduit à l'explication complète de phénomènes dont ils ne s'étaient pas rendu compte, mais qui en a fait prévoir d'autres que l'expérience a pleinement confirmés.

Mouvement d'une corde élastique en un point de laquelle est fixée perpendiculairement une tige rigide que l'on frotte longitudinalement.

Le frottement exercé sur la tige produit une force dépendante de la nature de la tige et du corps frottant, et de leur pression mutuelle, que nous supposerons constante. Cette force est dirigée suivant la longueur de la verge, dans le sens de la vitesse relative du corps frottant; mais son intensité est indépendante de la grandeur de cette vitesse. On peut la supposer appliquée à tel point qu'on voudra de sa direction, par exemple à celui où la tige est fixée à la corde, et le problème se ramène à celui-ci :

« Déterminer le mouvement d'une corde chargée d'un curseur en
» un quelconque de ses points, et sollicitée par une force appliquée
» en ce même point. »

Il y a ici deux cas à distinguer : celui où la vitesse du corps frottant est telle, que jamais celle de la verge ne lui soit égale, et celui où cette égalité a lieu à certains instants du mouvement.

Dans le premier cas, le corps frottant ayant toujours une vitesse plus grande que celle de la tige, la force qu'il produit est toujours dirigée dans le même sens; elle est d'ailleurs d'intensité constante, puisque la pression ne varie pas, et par conséquent la corde est soumise à l'action d'une force indépendante du temps. On rentre alors dans une question plus générale, traitée dans mon Mémoire sur les vibrations des cordes chargées de curseurs, et l'on en déduira la solution suivante du problème qui nous occupe :

On commencera par chercher la position d'équilibre de la corde sous l'influence d'une force égale à celle du frottement longitudinal exercé sur la tige; on en déduira la position relative des points de la corde dans l'état initial et dans cet état d'équilibre; on considérera ensuite un état initial où les positions de la corde seraient exactement les mêmes par rapport à leur position naturelle d'équilibre en ligne droite, et où les vitesses de ces points seraient celles de l'état initial proposé; on supposera de plus que cette corde soit chargée d'un curseur ayant une masse égale à celle de la tige et appliquée au même point. Cela posé, le mouvement de la corde dans ces circonstances sera identiquement le même par rapport à la droite qui joint ses extrémités, que celui de la corde dans les circonstances données le sera par rapport à sa position d'équilibre sous l'influence du frottement.

Les lois du mouvement de la corde mise en vibration par le frottement de la tige sont donc celles que j'ai fait connaître dans le Mémoire déjà cité, et il est inutile de les rappeler ici. Elles s'accordent avec les résultats de l'expérience, et cela suffirait pour en conclure la justesse de notre explication. Mais si la manière dont nous avons envisagé ce phénomene est exacte, il doit, en outre, se produire des phénomenes remarquables qui en fourniront de nouvelles vérifications.

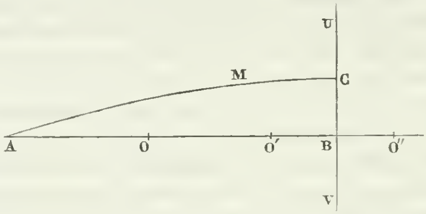
En effet, une discussion tout à fait semblable à celle que j'ai faite dans la théorie de l'action de l'archet démontre que si la roue frottante a une vitesse suffisamment grande, les vibrations doivent s'anéantir promptement; comme si la corde, écartée de sa position d'équilibre, était abandonnée à elle-même sous l'influence de toutes les causes qui tendent à éteindre progressivement son mouvement. Et, au contraire, si la roue a une vitesse assez petite relativement à la pression qu'elle exerce sur la corde, le nombre des vibrations de celle-ci doit diminuer. et par conséquent, le ton doit baisser. Or, comme je l'ai dit dans le préambule de ce Mémoire, l'expérience a confirmé ces deux indications de la théorie.

Mouvement d'une corde liée à une tige perpendiculaire qui vibre longitudinalement.

Étudions maintenant le mouvement que produiraient dans la corde des vibrations longitudinales existant dans la tige, et voyons s'il confirme ou s'il détruit l'explication de M. Savart.

Supposons une tige solide fixée par l'une de ses extrémités perpendiculairement en un point d'une corde tendue dont les extrémités sont fixes. Rendons immobile le milieu de cette tige, et excitons en elle des vibrations longitudinales. L'extrémité liée à la corde ne supportera qu'une pression insensible à cause de la petite amplitude de ses vibrations, à moins que la corde n'ait une masse considérable, ce que nous ne supposons pas. La tige vibrera donc à très-peu de chose près comme si elle était libre, et si elle rend le son le plus grave dont elle soit susceptible dans ces circonstances, il y aura un nœud unique en son milieu. Le point de la corde en contact avec son extrémité partagera son mouvement périodique qui sera connu; et pour les deux parties de la corde on a à résoudre ce problème :

Trouver le mouvement d'une corde tendue dont une extrémité est fixe, tandis que l'autre a un mouvement périodique donné.



Soit A l'extrémité fixe, B l'extrémité mobile sur une ligne UV perpendiculaire sur AB; AMC la position initiale de la corde dont tous les points ont à ce moment des vitesses connues perpendiculaires à AB. Supposons que le point B ait un mouvement représenté par l'équation

$$y = k \sin(mt + \varepsilon),$$

la quantité k étant assez petite pour que les équations ordinaires soient satisfaites. Le problème consistera alors à satisfaire aux conditions suivantes :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2 \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0,$$

$$y = k \sin(mt + \varepsilon) \quad \text{pour} \quad x = l,$$

$$\left.\begin{aligned} y &= \mathrm{F}(x) \\ \frac{dy}{dt} &= f(x) \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

Les fonctions F et f devront satisfaire aux conditions

$$F(l) = k \sin \varepsilon, \quad f(l) = mk \cos \varepsilon,$$

pour qu'il n'y ait pas d'incompatibilités dans les données.

On satisfera aux trois premières équations en prenant

$$y = \frac{k}{\sin \frac{ml}{a}} \sin (mt + \varepsilon) \sin \frac{mx}{a}.$$

Pour avoir la solution complète, il suffira d'ajouter à cette valeur de y une nouvelle valeur satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2 \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0, \quad y = 0 \quad \text{pour} \quad x = l,$$

$$\left. \begin{aligned} y &= F(x) - \frac{k \sin \varepsilon}{\sin \frac{ml}{a}} \sin \frac{mx}{a} \\ \frac{dy}{dt} &= f(x) - \frac{mk \cos \varepsilon}{\sin \frac{ml}{a}} \sin \frac{mx}{a} \end{aligned} \right\} \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

La solution du probleme est donc donnée par la formule suivante :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} y = {} & \frac{k}{\sin \frac{ml}{a}} \sin (mt + \varepsilon) \sin \frac{mx}{a} \\ & + \frac{2}{l} \sum \sin \frac{i\pi x}{l} \cos \frac{i\pi at}{l} \int_0^l \sin \frac{i\pi\alpha}{l} \, d\alpha \left[F(\alpha) - \frac{k \sin \varepsilon}{\sin \frac{ml}{a}} \sin \frac{m\alpha}{a} \right] \\ & + \frac{2}{\pi a} \sum \frac{1}{i} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{i\pi at}{l} \int_0^l \sin \frac{i\pi\alpha}{l} \, d\alpha \left[f(\alpha) - \frac{mk \cos \varepsilon}{\sin \frac{ml}{a}} \sin \frac{m\alpha}{a} \right]. \end{aligned} \right.$$

Le premier terme de cette formule représente un mouvement périodique simple, dans lequel la corde présenterait des nœuds o, o', o ...., distants les uns des autres de $\frac{\pi a}{m}$; et ce mouvement se produirait de lui-même en supposant la corde prolongée en o'' et fixée en ce point, pourvu qu'on lui donnât l'état initial relatif à cette expression.

Les autres parties de la formule (1) représentent le mouvement de la corde dont les extrémités A et B seraient fixes et qui partiraient d'un certain état initial connu. La superposition de ces deux mouvements forme le mouvement demandé. Il resterait le même indéfiniment sans les diverses causes dont le calcul n'a pas tenu compte et qui l'affaiblissent insensiblement. Ces causes ne sauraient anéantir entièrement le mouvement, puisque par un moyen quelconque on entretient constamment celui du point B; mais tout ce qui dépend des fonctions F et f finit bientôt par disparaître, et il ne reste plus de trace de l'état initial arbitraire de la corde. Néanmoins il restera deux séries de termes représentant un mouvement, dans lequel les deux extrémités de la corde seraient fixes. Or l'expérience montre qu'en vertu des résistances dont on ne peut faire abstraction dans la réalité, *le mouvement de la corde finit toujours par être périodique, et que la durée de la période est la même que celle de l'extrémité mobile.*

C'est ce que j'ai vérifié en fixant un des points de la corde soit à l'extrémité d'une verge animée d'un mouvement vibratoire longitudinal, soit en un point d'une plaque vibrant normalement. Ce dernier moyen est le plus commode, vu la plus grande amplitude et la plus grande durée des vibrations.

Dans toutes ces expériences le mouvement indiqué par l'analyse et correspondant aux extrémités fixes est resté insensible.

Ce résultat ne permet donc pas d'attribuer les vibrations de la corde à celles de la tige, puisqu'elles devraient être synchrones avec ces dernières, et que cependant elles sont beaucoup plus lentes.

L'explication de M. Savart ne saurait donc être admise; et il ne me semble pas qu'on puisse en donner une autre que celle que j'ai proposée dans ce Mémoire.

Mouvement absolu et relatif des points d'une verge dont une extrémité est libre et l'autre a un mouvement donné, d'une amplitude quelconque dans le sens de sa longueur.

Maintenant que le mouvement de la corde est connu, on peut déterminer celui des différents points de la verge, en la supposant élastique et par conséquent susceptible de condensation et de dilatation.

L'extrémité de cette verge aura un mouvement connu, qui sera celui de la corde au point où elle est attachée, et la question que nous nous proposons pourra être énoncée de la manière suivante :

Trouver le mouvement absolu et relatif des points d'une verge élastique dont une extrémité est libre, et dont l'autre a un mouvement connu d'une amplitude quelconque dans le sens de sa longueur.

Soit A la position initiale de l'extrémité dont le mouvement est connu, et que nous choisissons pour plus de simplicité au moment où sa vitesse est nulle; désignons par u le déplacement d'un point quelconque de la verge, par rapport à la position qu'il occupait dans l'état naturel d'équilibre, où la première extrémité était en A. Prenons A pour origine des x qui seront dirigées dans le sens de la verge; u sera une fonction de x et t qu'il s'agit de déterminer.

On remarquera d'abord que le mouvement d'un élément quelconque entre A et B ne dépend que des pressions qu'il supporte à chaque instant à ses deux extrémités, quelles que soient d'ailleurs les conditions auxquelles certains points particuliers soient assujettis, ce qui donnera d'abord l'équation générale

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2}, \tag{1}$$

a étant une constante connue.

Le mouvement connu de l'extrémité A est déterminé par une fonction $\varphi(t)$ qui représente u pour $x = 0$, d'où résulte la condition particulière

$$u = \varphi(t) \quad \text{pour} \quad x = 0, \tag{2}$$

et, d'après la manière dont nous avons choisi l'origine du temps et celle des x, on aura

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi'(0) = 0.$$

La seconde extrémité de la verge étant entièrement libre sera soumise à une pression constante qu'on peut toujours supposer nulle; ce qui donnera, en désignant par l la longueur de la verge,

$$(3) \qquad \frac{du}{dx} = 0 \quad \text{pour} \quad x = l.$$

Enfin on pourra supposer, pour donner toute la généralité possible à la question, que l'état inital de la verge ne soit pas celui de l'équilibre naturel ; et que l'on ait

$$(4) \qquad u = \mathrm{F}(x) \quad \text{et} \quad \frac{du}{dt} = f(x) \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

ce qui exigera

$$\mathrm{F}(0) = 0, \quad f(0) = 0,$$

d'après les suppositions précédentes.

Cela posé, il s'agit de trouver une valeur de (u) qui satisfasse aux equations (1), (2), (3), (4).

En faisant usage de la méthode que j'ai exposée dans mon Mémoire sur les vibrations d'*un système de points matériels*, on obtiendra la formule suivante, qui subsisterait encore sans modifications si l'on n'avait pas $\varphi'(0) = 0$,

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \varphi(t) - \frac{4}{\pi} \sum \frac{\sin(2n+1)\pi \frac{x}{2l}}{2n+1} \int_0^t \varphi'(\varepsilon)\, d\varepsilon \cos \frac{(2n+1)\pi a(t-\varepsilon)}{2l} \\ + \frac{2}{l} \sum \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{(2n+1)\pi a t}{2l} \int_0^l \mathrm{F}(\alpha) \sin \frac{(2n+1)\pi\alpha}{2l}\, d\alpha \\ + \frac{2l \sin \frac{(2n+1)\pi a t}{2l}}{(2n+1)\pi a} \int_0^l f(\alpha) \sin \frac{(2n+1)\pi\alpha}{2l}\, d\alpha \end{array} \right\}. \end{array} \right.$$

La dernière partie de cette expression représente le mouvement de la verge dans l'hypothèse où son extrémité A serait fixe et l'autre libre, l'état initial étant déterminé par les fonctions $\mathrm{F}(x)$, $f(x)$. Le mouvement total résulte donc de la superposition de celui-ci, et d'un autre où, l'état initial étant l'état naturel, l'extrémité A, au lieu d'être immobile, serait assujettie au mouvement donné. La première partie du mouvement finit bientôt par disparaître, et la seconde subsiste aussi longtemps que le mouvement même du point A. On peut donc, après un temps tres-court, se borner à la valeur suivante de u qui ne conserve aucune trace de l'état initial,

$$(6)\qquad u=\varphi(t)-\frac{4}{\pi}\sum \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\int_0^t \varphi'(\varepsilon)\,d\varepsilon \cos\frac{(2n+1)\pi a(t-\varepsilon)}{2l}.$$

Le premier terme $\varphi(t)$ qui représente le mouvement de l'extrémité A, étant une partie commune au mouvement de toutes les autres. la seconde partie représente le mouvement relatif de tous les points de la verge, ce qui était l'objet de la question.

Avant d'aller plus loin, vérifions la formule (5) en l'appliquant à un cas particulier dont la solution soit déjà connue.

Considérons, par exemple, une verge PQ ayant ses extrémités fixes, et dont les points aient un mouvement simple, exprimé par la formule

$$v = \text{M} \sin\frac{\pi a t}{d}\sin\frac{\pi x}{d},$$

d désignant la longueur PQ. La condensation sera constamment nulle au milieu B, et le mouvement d'un point A correspondant à $x=(1-m)\frac{d}{2}$ sera exprimé par l'équation

$$v = \text{M} \sin\frac{\pi a t}{d}\sin(1-m)\frac{\pi}{2}.$$

Donc, si dans la formule (5) on fait

$$\varphi(t) = \text{M} \sin\frac{(1-m)\pi}{2}\sin\frac{\pi a t}{d},$$

$$l = \frac{md}{2},\quad \text{F}(x) = 0,\quad f(x) = \frac{\text{M}\pi a}{d}\sin\left[\frac{\pi x}{d}+\frac{(1-m)\pi}{2}\right],$$

l'origine des x étant prise en A, on doit trouver pour u la valeur même de v, qui est alors

$$(7)\qquad v = \text{M} \sin\frac{m\pi a t}{2l}\sin\left[\frac{m\pi x}{2l}+\frac{(1-m)\pi}{2}\right].$$

En effectuant les intégrations indiquées dans l'équation (5), elle devient, dans ce cas particulier,

$$u = \mathrm{M}\sin(1-m)\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi amt}{2l}$$

$$-\frac{4\mathrm{M}m\sin(1-m)\frac{\pi}{2}}{\pi}\sum\left[\frac{m\sin\frac{\pi amt}{2l}-(2n+1)\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}}{m^2-(2n+1)^2}\right]\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}}{2n+1}$$

$$-\frac{4\mathrm{M}m\sin(1-m)\frac{\pi}{2}}{\pi}\sum\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\,\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}}{m^2-(2n+1)^2},$$

ou, en réduisant,

$$u = \mathrm{M}\sin(1-m)\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi amt}{2l}$$

$$+\frac{4\mathrm{M}m^2\sin(1-m)\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi amt}{2l}}{\pi}\sum\frac{1}{-m^2+(2n+1)^2}\,\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi x}{2l}}{2n+1}.$$

Or, entre les limites $x = 0$ et $x = 2l$, on a la formule

$$\sum\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi x}{2l}}{(2n+1)[(2n+1)^2-m^2]} = -\frac{\pi}{4m^2}+\frac{\pi}{4m^2}\,\frac{\cos m\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{2l}\right)}{\cos\frac{m\pi}{2}}.$$

En faisant cette substitution dans l'équation précédente, et réduisant, on trouve

$$u = \mathrm{M}\sin\frac{\pi mat}{2l}\sin\left[\frac{m\pi x}{2l}+(1-m)\frac{\pi}{2}\right],$$

et cette formule coïncide, comme cela devait être, avec la valeur de v.

Cas où le mouvement de A est périodique.

Appliquons la formule (6) au cas particulier où la fonction $\varphi(t)$ serait périodique et de la forme

$$\varphi(t) = \mathrm{A}(1-\cos mt),$$

qui donne

$$\varphi(0) = 0,\quad \varphi'(0) = 0;$$

la durée θ de la période aura pour valeur

$$\theta = \frac{2\pi}{m}.$$

Si nous désignons par θ' la durée des vibrations de la verge ayant une extrémité fixe et l'autre libre, on aura

$$\theta' = \frac{4l}{a},$$

et le rapport $\frac{\theta}{\theta'}$ sera, en général, un très-grand nombre; en le désignant par p, on aura

$$p = \frac{\pi a}{2ml}.$$

Cela posé, on trouvera, en effectuant les calculs,

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} u = {} & \mathrm{A}(1 - \cos mt) + \mathrm{A}\cos mt\left[1 - \frac{\cos\frac{m(l-x)}{a}}{\cos\frac{ml}{a}}\right] \\ & + \frac{4\mathrm{A}}{\pi}\sum\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}}{(2n+1)^2p^2 - 1}. \end{aligned} \right.$$

Le mouvement d'un point quelconque se compose donc du mouvement du point A, exprimé par le premier terme $\mathrm{A}(1 - \cos mt)$, plus un autre qui est le mouvement relatif de ce point comparé à l'extrémité A. Désignant ce déplacement relatif par v, nous aurons

$$v = \mathrm{A}\cos mt\left[1 - \frac{\cos\frac{m(l-x)}{a}}{\cos\frac{ml}{a}}\right] + \frac{4\mathrm{A}}{\pi}\sum\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}}{(2n+1)^2p^2 - 1},$$

ou

$$(9)\quad v = -\frac{2\mathrm{A}\cos mt}{\cos\frac{ml}{a}}\sin\left(\frac{ml}{a} - \frac{mx}{2a}\right)\sin\frac{mx}{2a} + \frac{4\mathrm{A}}{\pi}\sum\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}}{(2n+1)^2p^2 - 1}.$$

On voit que ce mouvement est très-petit. En effet, $\frac{ml}{a} = \frac{\pi}{2p}$, et par conséquent la première partie de v renferme deux facteurs extrêmement petits; d'où il suit qu'elle est excessivement petite par rapport à A cos mt, ou au mouvement absolu de l'extrémité A. Quant à la seconde partie, elle est évidemment moindre que

$$\frac{4A}{\pi}\sum\frac{1}{(2n+1)^2p^2-1},$$

dont la valeur est

$$\frac{A}{p}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2p}.$$

Cette seconde partie est donc au moins du même ordre de petitesse que la première.

En bornant les mouvements relatifs des molécules de la verge à ceux dont la période a la plus longue durée, et qui, par cette raison, doivent être les plus sensibles, comme nous l'avons fait voir précédemment, on aura

$$v = \mathrm{A}\cos mt\left[1-\frac{\cos m\left(\frac{l-x}{a}\right)}{\cos\frac{ml}{a}}\right].$$

Ces mouvements sont les seuls que M. Savart ait pu apercevoir dans ses expériences.

On déterminera les ventres, ou les points où la condensation est nulle, en posant

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dx} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sin\frac{m(l-x)}{a} = 0;$$

d'où l'on tire, en désignant par r un nombre entier quelconque,

$$l-x = r\frac{\pi a}{m}.$$

Les ventres sont donc situés à la distance $\frac{\pi a}{m}$ les uns des autres, à partir de l'extrémité libre qui fait partie de ces points.

Les nœuds, ou les points où la condensation est maximum ou minimum sont donnés par la condition $\frac{d^2v}{dx^2} = 0$, quel que soit t, ce qui conduit à

$$\cos \frac{m(l-x)}{a} = 0,$$

d'où

$$l - x = (2r+1)\frac{\pi a}{2m},$$

ce qui donne les points milieux entre les ventres.

Mais il faut bien remarquer que ces différents points ne sont nullement ceux où le sable se réunit. M. Savart a démontré que quand une verge vibre longitudinalement, il existe un mouvement transversal synchrone, et que c'est aux milieux entre les lignes nodales de celui-ci que le sable vient se réunir. La distance de ces lignes dépend de l'épaisseur de la verge et de sa longueur, tandis que les nœuds relatifs aux vibrations longitudinales ne dépendent que de la longueur. Il résulte de là que les distances des points où le sable se réunit peuvent être beaucoup moindres que celles des nœuds relatifs aux vibrations longitudinales.

Notre analyse, ayant démontré que les seules vibrations longitudinales sensibles qui animeront la verge seront synchrones avec celles de la corde ou du corps quelconque qui donne son mouvement à l'extrémité de la verge, s'accorde complétement avec les expériences de M. Savart, comme nous l'avons annoncé dans la première partie de ce Mémoire.

SUR LES TRAJECTOIRES
QUI COUPENT SOUS UN ANGLE DONNÉ
LES TANGENTES A UNE COURBE A DOUBLE COURBURE;

Par H. MOLINS,

Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

1. Dans un Mémoire qui fait partie du tome II des *Mémoires des Savants étrangers,* Lancret s'est occupé des courbes formées par les intersections successives de droites qui coupent une courbe donnée quelconque sous un angle constant; après avoir exposé les propriétés de ces courbes qu'il nomme développoïdes, il cherche leurs équations, et il montre que pour les obtenir sous forme finie, il faudrait intégrer une équation différentielle du premier ordre à deux variables qui, généralement, n'est pas intégrable ou ne peut pas être réduite aux quadratures. Ce n'est que lorsque les tangentes aux développoïdes coupent la courbe donnée à angle droit, auquel cas elles en sont les développées, qu'il est parvenu à vaincre cette difficulté (tome I^er^ des *Mémoires* cités). Nous nous sommes proposé la question inverse qui consiste à trouver les courbes qui auraient pour développoïde une courbe donnée quelconque, et nous sommes arrivé à voir que leur détermination dépend d'une équation différentielle du premier ordre qu'on peut toujours intégrer. Ces courbes s'appelleront trajectoires des tangentes. ou simplement trajectoires, et il est clair, en effet, que le problème dont il s'agit rentre dans le problème général des trajectoires qui n'a été résolu que dans un petit nombre de cas. Lorsque les trajectoires couperont à angle droit les tangentes à la courbe donnée, elles en seront les développantes, de sorte que l'on pourra toujours obtenir sous forme intégrable les équations des développantes d'une courbe quelconque.

Considérons donc une courbe quelconque, et, pour trouver les trajectoires de ses tangentes, concevons une surface développable dont elle serait l'arête de rebroussement; il est clair que chaque trajectoire sera une courbe tracée sur la surface qui aura la propriété de couper sous un angle constant ses diverses génératrices. Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de cette courbe; elles satisferont à l'équation de la surface; et, si l'on considère un autre point infiniment voisin sur la surface, on aura

$$dz = pdx + qdy.$$

On sait que pour une surface développable on a

$$s^2 - rt = 0,$$

et si l'on portait la valeur de r en fonction de s et t dans l'expression du rayon de courbure d'une section normale, on verrait que ce rayon devient infini lorsqu'on fait

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{s}{t};$$

de sorte que cette quantité détermine la section principale qui se confond avec la génératrice passant au point donné. D'après cela, les coordonnées d'un point de la génératrice infiniment voisin du point (x, y, z) seront

$$x + dx.\quad y - \frac{s}{t}dx,\quad z + pdx - q\frac{s}{t}dx,$$

et l'on aura pour les équations de la génératrice

$$x' - x = \frac{1}{p - q\frac{s}{t}}(z' - z),\quad y' - y = \frac{-\frac{s}{t}}{p - q\frac{s}{t}}(z' - z).$$

On trouverait de même pour les équations de la tangente à la trajectoire au point (x, y, z),

$$x' - x = \frac{1}{p + q\frac{dy}{dx}}(z' - z),\quad y' - y = \frac{\frac{dy}{dx}}{p + q\frac{dy}{dx}}(z' - z),$$

$\frac{dy}{dx}$ étant une quantité inconnue qui détermine la projection de la tangente sur le plan des x, y. Pour déterminer cette quantité, on exprimera que les droites dont nous venons d'écrire les équations font entre elles un angle constant et donné ω; or, si l'on forme le cosinus de l'angle des deux droites et qu'on l'égale à $\cos\omega$, on obtiendra

$$\cos\omega = \frac{t(1+p^2) - pqs + \frac{dy}{dx}[pqt - s(1+q^2)]}{\sqrt{s^2+t^2+(pt-qs)^2}\sqrt{1+p^2+2pq\frac{dy}{dx}+(1+q^2)\frac{dy^2}{dx^2}}}.$$

De là on déduirait, après diverses réductions,

$$\sin\omega = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}\left(s+t\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{s^2+t^2+(pt-qs)^2}\sqrt{1+p^2+2pq\frac{dy}{dx}+(1+q^2)\frac{dy^2}{dx^2}}}.$$

et en divisant ces deux expressions l'une par l'autre,

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}\left(s+t\frac{dy}{dx}\right)}{t(1+p^2) - pqs + \frac{dy}{dx}[pqt - s(1+q^2)]}.$$

On remarquera que par chaque point de la surface passent deux trajectoires qui coupent la génératrice suivant deux angles dont l'un est égal à ω et l'autre à son supplément; il faudra donc, pour obtenir en même temps ces deux trajectoires, affecter du double signe $\pm$ l'expression de $\operatorname{tang}\omega$. Si nous posons pour abréger

$$\pm \operatorname{tang}\omega = k,$$

quantité connue et donnée, on tirera de la formule précédente

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{k[pqs - t(1+p^2)] - s\sqrt{1+p^2+q^2}}{k[pqt - s(1+q^2)] - t\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

quantité qui détermine la direction de la tangente à la projection de la trajectoire sur le plan des x, y. Mais il faudra substituer aux quantités

p, q, s, t leurs valeurs que l'on formera à l'aide des équations de la courbe donnée qui est l'arête de rebroussement de la surface.

2. Soient

$$x = \varphi(z), \quad y = \psi(z)$$

les équations de cette courbe; celles de sa tangente au point pour lequel $z = \alpha$ seront

$$x - \varphi\alpha = (z - \alpha)\varphi'\alpha, \quad y - \psi\alpha = (z - \alpha)\psi'\alpha,$$

d'où l'on déduira

$$(x - \varphi\alpha)\psi'\alpha - (y - \psi\alpha)\varphi'\alpha = 0; \tag{2}$$

cette tangente est une génératrice de la surface, et nous pouvons supposer que c'est celle qui passe au point (x, y, z). Si l'on éliminait α entre deux de ces équations, on aurait l'équation du lieu des tangentes ou de la surface développable; cette élimination ne pouvant être ici qu'indiquée, on regardera α et z comme des fonctions de x, y données par les deux premières équations, et, en différentiant chacune de ces équations successivement par rapport à x et à y, on trouvera les expressions connues

$$p = \frac{\psi''\alpha}{\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha}, \quad q = -\frac{\varphi''\alpha}{\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha};$$

d'où l'on déduit, en les différentiant par rapport à y,

$$s = \frac{\psi'\alpha(\psi''\alpha\varphi'''\alpha - \varphi''\alpha\psi'''\alpha)}{(\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)^2}\frac{d\alpha}{dy}, \quad t = -\frac{\varphi'\alpha(\psi''\alpha\varphi'''\alpha - \varphi''\alpha\psi'''\alpha)}{(\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)^2}\frac{d\alpha}{dy}.$$

Substituant dans la formule (1) ces expressions de p, q, s, t, la quantité $\frac{d\alpha}{dy}$ se trouve éliminée et l'on obtient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k[\psi''\alpha + \varphi'\alpha(\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)] + \psi'\alpha\sqrt{(\varphi''\alpha)^2 + (\psi''\alpha)^2 + (\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)^2}}{k[\varphi''\alpha - \psi'\alpha(\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)] + \varphi'\alpha\sqrt{(\varphi''\alpha)^2 + (\psi''\alpha)^2 + (\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)^2}}. \tag{3}$$

Enfin, si dans cette expression on mettait pour α sa valeur en fonction de x, y donnée par l'équation (2), on aurait une équation entre x, y et $\frac{dy}{dx}$, qui serait l'équation différentielle de la projection de la trajectoire sur le plan des x, y. Je dis qu'on pourra toujours intégrer cette équation différentielle du premier ordre.

3. En effet, l'équation (2) peut se mettre sous la forme

$$(4)\qquad y = \frac{\psi'\alpha}{\varphi'\alpha}\,x + \frac{\psi\alpha\,\varphi'\alpha - \varphi\alpha\,\psi'\alpha}{\varphi'\alpha},$$

et, d'un autre côté, l'équation (3) donnerait α en fonction de $\frac{dy}{dx}$; de sorte que si, dans l'équation précédente, on considère α comme une fonction connue de $\frac{dy}{dx}$, cette équation sera de la forme

$$y = \mathrm{P}x + \mathrm{Q},$$

P et Q étant des fonctions de $\frac{dy}{dx}$. Or on sait toujours intégrer ces sortes d'équations. Pour cela, je différentie l'équation (4), ce qui me donne

$$\left(\frac{dy}{dx} - \frac{\psi'\alpha}{\varphi'\alpha}\right) dx = \frac{\varphi'\alpha\,\psi''\alpha - \psi'\alpha\,\varphi''\alpha}{(\varphi'\alpha)^2}\,(x - \varphi\alpha)\,d\alpha,$$

et je mets pour $\frac{dy}{dx}$ sa valeur fournie par l'équation (3); je trouve, toutes réductions faites,

$$(5)\qquad dx = \frac{k\,[\varphi''\alpha - \psi'\alpha\,(\varphi'\alpha\,\psi''\alpha - \psi'\alpha\,\varphi''\alpha)] + \varphi'\alpha\sqrt{(\varphi''\alpha)^2 + (\psi''\alpha)^2 + (\varphi'\alpha\,\psi''\alpha - \psi'\alpha\,\varphi''\alpha)^2}}{k\,\varphi'\alpha\,[1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2]}\,(x - \varphi\alpha)\,d\alpha$$

En désignant le multiplicateur de $(x - \varphi\alpha)\,d\alpha$ par $\pi\alpha$, il viendra pour l'intégrale de cette équation

$$x = e^{\int\pi\alpha d\alpha}\left[\mathrm{C} - \int\varphi\alpha.\pi\alpha.e^{-\int\pi\alpha d\alpha}\,d\alpha\right],$$

C étant une constante arbitraire. Il ne resterait plus qu'à éliminer α entre cette équation et l'équation (2), et l'on aurait l'équation de la projection sur le plan des x, y de chacune des trajectoires qui coupent les tangentes à la courbe donnée sous un angle égal à ω; ces trajectoires en nombre infini répondent au nombre infini de valeurs que l'on peut attribuer à la constante C. Pour achever de déterminer ces trajectoires, il faudra joindre à l'équation précédente celle de la surface développable qui les contient toutes.

Si l'on voulait avoir les trajectoires orthogonales, ou, ce qui est la même chose, les développantes de la courbe donnée, on ferait $k = \infty$ dans la formule (5), après avoir toutefois divisé par k les deux termes de la fraction qui est au second membre, et cette formule deviendrait

$$dx = \frac{\varphi''\alpha - \psi'\alpha(\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)}{\varphi'\alpha[1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2]}(x - \varphi\alpha)\, d\alpha.$$

4. Si la courbe donnée était plane et rapportée aux axes rectangulaires Ox, Oz situés dans son plan, son équation serait $x = \varphi(z)$ et la quantité y serait constamment nulle, ou, ce qui revient au même, la fonction $\psi(z)$ cesserait d'exister. En la supprimant ainsi que ses dérivées dans la formule (5), on trouvera

$$dx = \frac{(k + \varphi'\alpha)\varphi''\alpha}{k[1 + (\varphi'\alpha)^2]\varphi'\alpha}(x - \varphi\alpha)\, d\alpha,$$

équation qu'on pourrait aussi obtenir directement. Si l'on remarque que l'on a

$$\int \frac{(k + \varphi'\alpha)\varphi''\alpha}{k[1 + (\varphi'\alpha)^2]\varphi'\alpha}\, d\alpha = \frac{1}{k}\,\text{arc tang}\,\varphi'\alpha + l\,\frac{\varphi'\alpha}{\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2}},$$

on trouvera pour l'intégrale de l'équation précédente,

$$x = \frac{\varphi'\alpha}{\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2}}\, e^{\frac{1}{k}\,\text{arc tang}\,\varphi'\alpha}\left[\text{C} - \frac{1}{k}\int e^{-\frac{1}{k}\,\text{arc tang}\,\varphi'\alpha}\,\frac{(k + \varphi'\alpha)\varphi\alpha\varphi''\alpha}{(\varphi'\alpha)^2\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2}}\, d\alpha\right],$$

C étant une constante arbitraire. A cette équation il faudra joindre celle de la tangente à la courbe donnée au point pour lequel $z = \alpha$,

$$x - \varphi\alpha = (z - \alpha)\varphi'\alpha,$$

et éliminer α entre ces équations.

Dans le cas où la trajectoire serait orthogonale, il faudrait faire $k = \infty$, et l'on aurait

$$x = \frac{\varphi'\alpha}{\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2}}\left[\text{C} - \int \frac{\varphi\alpha\varphi''\alpha}{(\varphi'\alpha)^2\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2}}\, d\alpha\right],$$

ou bien, en observant que l'on a

$$\int \frac{\varphi\alpha\,\varphi''\alpha}{(\varphi'\alpha)^2\sqrt{1+(\varphi'\alpha)^2}}\,d\alpha = -\frac{\varphi\alpha}{\varphi'\alpha}\sqrt{1+(\varphi'\alpha)^2} + \int\sqrt{1+(\varphi'\alpha)^2}\,d\alpha.$$

on obtiendra

$$x = \varphi\alpha + \frac{\varphi'\alpha}{\sqrt{1+(\varphi'\alpha)^2}}\left[\mathrm{C} - \int\sqrt{1+(\varphi'\alpha)^2}\,d\alpha\right],$$

et par suite

$$z = \alpha + \frac{1}{\sqrt{1+(\varphi'\alpha)^2}}\left[\mathrm{C} - \int\sqrt{1+(\varphi'\alpha)^2}\,d\alpha\right].$$

Si l'on appliquait cette dernière formule au cas où la courbe donnée serait une parabole cubique $x = pz^{\frac{3}{2}}$, et qu'on fît la constante C nulle, on trouverait

$$z - \alpha = -\frac{8}{27p^2}\left(1 + \frac{9}{4}p^2\alpha\right),$$

et l'élimination de α entre cette équation et celle de la tangente,

$$x - p\alpha^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}p\alpha^{\frac{1}{2}}(z - \alpha),$$

conduirait à l'équation d'une parabole ordinaire,

$$x^2 = \frac{16}{81p^4}\left(3p^2z + \frac{8}{9}\right).$$

En changeant z en $z' - \frac{8}{27p^2}$, et posant $p^2 = \frac{8}{27p'}$, les équations de la parabole cubique et de sa développante deviendraient

$$x^2 = \frac{8}{27p'}(z' - p')^3, \quad x^2 = 2p'z'$$

5. Les formules générales obtenues pour le cas où la courbe donnée est à double courbure devraient être modifiées s'il s'agissait de trouver sur une surface conique une courbe qui coupât ses génératrices sous un angle constant. En effet, dans ce cas, l'arête de rebroussement de la surface est un point, et si a, b, c sont les coordonnées de ce point,

les équations d'une génératrice quelconque seront de la forme

$$x - a = \alpha(z - c), \quad y - b = (z - c)\varphi\alpha,$$

α étant une quantité variable pour chaque génératrice, et $\varphi\alpha$ une fonction de α qui sera déterminée pour chaque surface conique. Comme l'élimination de α entre ces deux équations donnerait l'équation de la surface, si on les différentie successivement par rapport à x et à y en regardant α et z comme des fonctions de ces deux coordonnées, on trouvera

$$p = \frac{\varphi'\alpha}{\alpha\varphi'\alpha - \varphi\alpha}, \quad q = -\frac{1}{\alpha\varphi'\alpha - \varphi\alpha},$$

par suite

$$s = -\frac{\varphi\alpha\varphi''\alpha}{(\alpha\varphi'\alpha - \varphi\alpha)^2}\frac{d\alpha}{dy}, \quad t = \frac{\alpha\varphi''\alpha}{(\alpha\varphi'\alpha - \varphi\alpha)^2}\frac{d\alpha}{dy}.$$

La substitution de ces valeurs dans la formule (1) donnerait

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k[\varphi'\alpha + \alpha(\alpha\varphi'\alpha - \varphi\alpha)] + \varphi\alpha\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\alpha\varphi'\alpha - \varphi\alpha)^2}}{k[1 - \varphi\alpha(\alpha\varphi'\alpha - \varphi\alpha)] + \alpha\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\alpha\varphi'\alpha - \varphi\alpha)^2}}.$$

On a d'ailleurs

$$(x - a)\varphi\alpha = \alpha(y - b), \quad \text{d'où} \quad y = \frac{\varphi\alpha}{\alpha}(x - a) + b.$$

On différentiera cette dernière équation, puis on mettra pour $\frac{dy}{dx}$, l'expression précédente, et l'on trouvera

$$\frac{dx}{x - a} = \frac{k[1 - \varphi\alpha(\alpha\varphi'\alpha - \varphi\alpha)] + \alpha\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\alpha\varphi'\alpha - \varphi\alpha)^2}}{k\alpha[1 + \alpha^2 + (\varphi\alpha)^2]}\,d\alpha,$$

équation dans laquelle les variables se trouvent séparées et qui s'intégrera immédiatement. Entre cette intégrale et l'équation

$$y = \frac{\varphi\alpha}{\alpha}(x - a) + b,$$

on éliminera α et l'on aura l'équation de la projection de chaque trajectoire sur le plan des x, y.

Supposons, par exemple, que la surface donnée soit un cône droit et circulaire dont le sommet soit à l'origine des coordonnées et dont l'axe soit pris pour axe des z; l'équation de cette surface serait

$$m^2 z^2 = x^2 + y^2,$$

m étant une constante, et les équations d'une génératrice seraient

$$x = \alpha z, \quad y = \sqrt{m^2 - \alpha^2}.z.$$

On trouverait pour l'équation de la projection de chaque trajectoire sur le plan des x, y,

$$l.\mathrm{C}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{m}{k\sqrt{1+m^2}} \text{ arc sin } \frac{1}{\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1}},$$

C étant une constante arbitraire. Si l'on veut que la trajectoire soit orthogonale, on fera

$$k = \infty,$$

ce qui donnera

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{c^2},$$

équation d'un cercle, comme on devait s'y attendre.

6. Nous allons enfin appliquer les formules générales des n$^{\text{os}}$ 2 et 3 au cas où la courbe donnée serait une hélice tracée sur un cylindre circulaire droit, et où par conséquent la surface lieu de ses tangentes serait une héliçoïde développable. Si l'on prend pour axe des z l'axe du cylindre, et pour axes des x et des y deux axes rectangulaires situés dans le plan de la base, les équations de l'hélice seront

$$x = \mathrm{R} \cos \frac{z}{\mathrm{R}a}, \quad y = \mathrm{R} \sin \frac{z}{\mathrm{R}a},$$

R étant le rayon du cylindre et a la cotangente de l'angle constant que fait chaque tangente à l'hélice avec la direction des génératrices.

On voit donc, en posant $z = \alpha$, que les fonctions que nous avons désignées par $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$ seront ici

$$\varphi\alpha = \mathrm{R} \cos \frac{\alpha}{\mathrm{R}a}, \quad \psi\alpha = \mathrm{R} \sin \frac{\alpha}{\mathrm{R}a},$$

et l'on trouvera, après de nombreuses réductions, que l'équation (5) devient

$$(6)\qquad dx = \left(\frac{1}{\mathrm{R}a}\cot\frac{\alpha}{\mathrm{R}a} + \frac{1}{\mathrm{R}ak\sqrt{1+a^2}}\right)\left(x - \mathrm{R}\cos\frac{\alpha}{\mathrm{R}a}\right)d\alpha.$$

Intégrant, il vient

$$x = \sin\frac{\alpha}{\mathrm{R}a}\, e^{\frac{\alpha}{\mathrm{R}ak\sqrt{1+a^2}}}\left[\mathrm{C} - \frac{1}{\alpha}\int e^{-\frac{\alpha}{\mathrm{R}ak\sqrt{1+a^2}}}\left(\cot^2\frac{\alpha}{\mathrm{R}a} + \frac{1}{k\sqrt{1+a^2}}\cot\frac{\alpha}{\mathrm{R}a}\right)d\alpha\right].$$

Mais on trouve

$$\int e^{-\frac{\alpha}{\mathrm{R}ak\sqrt{1+a^2}}}\cot^2\frac{\alpha}{\mathrm{R}a}\,d\alpha = \mathrm{R}a.e^{-\frac{\alpha}{\mathrm{R}ak\sqrt{1+a^2}}}\left[k\sqrt{1+a^2} - \cot\frac{\alpha}{\mathrm{R}a}\right]$$
$$- \frac{1}{k\sqrt{1+a^2}}\int e^{-\frac{\alpha}{\mathrm{R}ak\sqrt{1+a^2}}}\cot\frac{\alpha}{\mathrm{R}a}\,d\alpha.$$

de sorte qu'en substituant, les deux intégrales qui resteront dans l'expression de x se détruiront, et l'on obtiendra enfin

$$(7)\qquad x = \mathrm{C}\sin\frac{\alpha}{\mathrm{R}a}\, e^{\frac{\alpha}{\mathrm{R}ak\sqrt{1+a^2}}} - \mathrm{R}\left[k\sqrt{1+a^2}\sin\frac{\alpha}{\mathrm{R}a} - \cos\frac{\alpha}{\mathrm{R}a}\right],$$

équation à laquelle on joindra celle de la tangente à l'hélice au point pour lequel $z = \alpha$,

$$(8)\qquad y\sin\frac{\alpha}{\mathrm{R}a} + x\cos\frac{\alpha}{\mathrm{R}a} = \mathrm{R}.$$

L'élimination de α entre ces deux équations donnera l'équation de la projection de chacune des trajectoires sur le plan des x, y; de la dernière on déduirait d'ailleurs sans difficulté la valeur de α.

Considérons la trajectoire qui répond à $\mathrm{C} = 0$; les équations (7) et (8) donneront

$$x = \mathrm{R}\left(\cos\frac{\alpha}{\mathrm{R}a} - k\sqrt{1+a^2}\sin\frac{\alpha}{\mathrm{R}a}\right),$$
$$y = \mathrm{R}\left(\sin\frac{\alpha}{\mathrm{R}a} + k\sqrt{1+a^2}\cos\frac{\alpha}{\mathrm{R}a}\right),$$

et, en élevant celles-ci au carré et ajoutant les résultats

$$x^2 + y^2 = R^2 [1 + k^2 (1 + a^2)].$$

D'ou il suit que la trajectoire est l'intersection de l'héliçoïde avec un cylindre circulaire droit de même axe que le premier et d'un rayon égal à

$$R\sqrt{1 + k^2(1 + a^2)};$$

si l'on se donnait ce rayon, que j'appelle R′, on en conclurait

$$k = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R'^2 - R^2}{1 + a^2}}.$$

En outre, l'équation de l'héliçoïde étant

$$y \sin\left(\frac{z}{Ra} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - R^2}}{R}\right) + x \cos\left(\frac{z}{Ra} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - R^2}}{R}\right) = R; \tag{9}$$

si l'on remplace $x^2 + y^2$ par sa valeur, elle deviendra

$$y \sin\left(\frac{z}{Ra} + k\sqrt{1 + a^2}\right) + x \cos\left(\frac{z}{Ra} + k\sqrt{1 + a^2}\right) = R,$$

et en différentiant cette équation, et observant que l'on a

$$xdx + ydy = 0,$$

on trouvera

$$dx = -\frac{y}{Ra}dz, \quad dy = \frac{x}{Ra}dz.$$

Donc, en désignant par s l'arc de la trajectoire compté à partir d'un point quelconque, on aura

$$ds = dz\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}\sqrt{1 + k^2}}, \quad \text{d'où} \quad \frac{dz}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}\sqrt{1 + k^2}}},$$

quantité constante, ce qui montre que la trajectoire est telle que ses tangentes font un angle constant avec les génératrices du cylindre qui la contient, ou, en d'autres termes, qu'elle est une hélice; on s'assurerait aisément que cette hélice a même pas que l'hélice donnée. Les autres trajectoires qui répondent à la même valeur de k, mais à des valeurs quelconques de C, sont aussi des hélices, puisque leurs tangentes sont respectivement parallèles à celles de la premiere trajectoire et qu'elles font, par conséquent, un angle constant avec la direction des génératrices du cylindre ; mais les cylindres sur lesquels sont situées les nouvelles trajectoires ne sont plus à base circulaire.

Ces résultats ne sont pas applicables au cas où k est infini, c'est-à-dire lorsque les trajectoires deviennent des développantes de l'hélice ou les lignes de courbure de l'héliçoïde, car la forme de l'intégrale qui donne x en fonction de α n'est plus la même qu'auparavant. En effet, la formule (6) devient

$$dx = \frac{1}{\mathrm{R}a} \cot \frac{\alpha}{\mathrm{R}a} \left(x - \mathrm{R} \cos \frac{\alpha}{\mathrm{R}a} \right) d\alpha,$$

et en intégrant

$$x = \sin \frac{\alpha}{\mathrm{R}a} \left(\mathrm{C} + \mathrm{R} \cot \frac{\alpha}{\mathrm{R}a} + \frac{\alpha}{a} \right),$$

d'où

$$x - \mathrm{R} \cos \frac{\alpha}{\mathrm{R}a} = \sin \frac{\alpha}{\mathrm{R}a} \left(\mathrm{C} + \frac{\alpha}{a} \right).$$

Il faut éliminer α entre cette équation et l'équation

$$y \sin \frac{\alpha}{\mathrm{R}a} + x \cos \frac{\alpha}{\mathrm{R}a} = \mathrm{R};$$

or celle-ci donnerait

$$x - \mathrm{R} \cos \frac{\alpha}{\mathrm{R}a} = \sqrt{x^2 + y^2 - \mathrm{R}^2} \sin \frac{\alpha}{\mathrm{R}a},$$

valeur qui, substituée dans la première, donne

$$\alpha = a \left(\sqrt{x^2 + y^2 - \mathrm{R}^2} - \mathrm{C} \right).$$

Enfin, portant cette valeur de a dans la seconde, on aura

$$y \sin \frac{-\mathrm{C} + \sqrt{x^2 + y^2 - \mathrm{R}^2}}{\mathrm{R}} + x \cos \frac{-\mathrm{C} + \sqrt{x^2 + y^2 - \mathrm{R}}}{\mathrm{R}} = \mathrm{R}.$$

ce qui est l'équation de la projection de chacune des lignes de courbure de l'héliçoïde sur le plan des x, y; en la joignant à celle de l'héliçoïde (9), on aura les deux équations qui déterminent chaque ligne de courbure. Or, si l'on compare ces deux équations, on verra, par leur composition analogue, que les valeurs des sinus et des cosinus qui y sont renfermés doivent être les mêmes; par suite, les arcs eux-mêmes doivent être égaux. Donc on aura, pour tous les points d'une même trajectoire orthogonale,

$$\frac{z}{a} = -C,$$

ou simplement

$$z = \text{une constante},$$

ce qui est l'équation d'un plan parallèle au plan des x, y. Ainsi les trajectoires orthogonales des tangentes à l'hélice sont les sections faites sur l'héliçoïde développable par des plans parallèles au plan de la base du cylindre. Si l'on faisait $C = 0$, la trajectoire serait la trace de l'héliçoïde sur le plan des x, y, ou bien la développante du cercle qui sert de base au cylindre.

NOTE

SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES DE PREMIÈRE ESPÈCE,

Presentée à l'Académie des Sciences le 24 avril 1843,

PAR M. ALFRED SERRET,

Ancien Élève de l'École Polytechnique.

1. Legendre, dans son *Traité des fonctions elliptiques*, tome Ier, chap. VII, page 35, a démontré que les fonctions de la première espece, lorsque l'angle du module est $\frac{\pi}{4}$, sont exactement représentées par les arcs de la lemniscate (lieu géométrique des projections orthogonales du centre d'une hyperbole équilatère sur ses tangentes).

La lemniscate n'est qu'un cas particulier d'une courbe connue sous le nom d'ellipse de Cassini, et dont la définition géométrique est que le produit des distances d'un point de la courbe à deux points fixes est constant. Le but de cette Note est de prouver que les fonctions elliptiques de la première espèce sont exactement représentées, quel que soit l'angle de leur module, par les arcs de l'ellipse de Cassini.

L'équation de cette courbe est en coordonnées polaires

$$(a) \qquad r^4 - 2a^2 r^2 \cos 2t + a^4 - b^4 = 0,$$

$2a$ étant la distance des deux points fixes, et b^2 le produit constant des distances d'un point de la courbe à ces deux points.

Elle affecte trois formes tout à fait différentes, suivant que le rapport $\frac{b}{a}$ est inférieur égal ou supérieur à l'unité; dans le cas de $\frac{b}{a} = 1$, elle coïncide avec la lemniscate étudiée par Legendre.

2. Si $\frac{b}{a} < 1$, on posera $\frac{b^2}{a^2} = \sin 2\theta$; dans ce cas la courbe est formée de deux boucles fermées égales entre elles, et l'angle 2θ est précisément celui que forment les tangentes issues du centre.

Les rayons vecteurs correspondants aux azimuts t_0 et t_1 détermineront sur la courbe deux arcs que je représenterai par $s(t_0, t_1)$ et $\sigma(t_0, t_1)$, ou simplement par $s(t_1)$ et $\sigma(t_1)$, si $t_0 = 0$.

D'après cela, on aura

$$s(t_0, t_1) = \frac{b^2}{a} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{\cos 2t + \sqrt{\cos^2 2t - \cos^2 2\theta}}}{\sqrt{\cos^2 2t - \cos^2 2\theta}}\, dt,$$

$$\sigma(t_0, t_1) = \frac{b^2}{a} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{\cos 2t - \sqrt{\cos^2 2t - \cos^2 2\theta}}}{\sqrt{\cos^2 2t - \cos^2 2\theta}}\, dt,$$

d'où l'on déduit

$$(1) \qquad s(t_0, t_1) + \sigma(t_0, t_1) = 2^{\frac{1}{2}} \frac{b^2}{a} \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{\sqrt{\cos 2t - \cos 2\theta}},$$

$$(2) \qquad s(t_0, t_1) - \sigma(t_0, t_1) = 2^{\frac{1}{2}} \frac{b^2}{a} \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{\sqrt{\cos 2t + \cos 2\theta}}.$$

Si dans l'équation (1) on pose

$$(3) \qquad \sin t = \sin\theta \sin\varphi,$$

et dans l'équation (2)

$$(4) \qquad \sin t = \cos\theta \sin\psi,$$

on aura

$$(5) \qquad s(t_0, t_1) + \sigma(t_0, t_1) = \frac{b^2}{a} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\theta \sin^2\varphi}},$$

$$(6) \qquad s(t_0, t_1) - \sigma(t_0, t_1) = \frac{b^2}{a} \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \cos^2\theta \sin^2\psi}},$$

les angles φ_0, ψ_0, t_0; φ_1, ψ_1, t_1 étant liés par les relations générales (3) et (4).

Si l'on fait $t_0 = 0$, on aura aussi $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$, et les équations précédentes deviendront

$$(7) \qquad \mathrm{F}(\sin\theta, \varphi) = \frac{a}{b^2}[s(t) + \sigma(t)],$$

$$(8) \qquad \mathrm{F}(\cos\theta, \psi) = \frac{a}{b^2}[s(t) - \sigma(t)].$$

Les modules de ces deux fonctions sont complémentaires, et ont pour valeurs

$$\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}},$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}.$$

Il résulte de là que toute fonction elliptique de première espèce est, quel que soit son module, exprimable au moyen de la somme ou de la différence de deux arcs de l'ellipse de Cassini, de l'espèce que nous venons de considérer. Réciproquement, tout arc de cette courbe est exprimable au moyen de la somme ou de la différence de deux fonctions elliptiques, dont les modules sont complémentaires.

Si dans l'équation (7) on pose $t = \theta$, d'où $\varphi = \frac{\pi}{2}$, et qu'on désigne par s la longueur totale de la courbe, on aura

$$F(\sin\theta) = \frac{a}{4b^2}\, s,$$

ce qui montre que la fonction complète est exprimable au moyen du périmètre total de la courbe.

Ce qui précède s'applique évidemment au cas de $\frac{b}{a} = 1$, puisqu'il suffit de poser $\theta = \frac{\pi}{4}$; dans ce cas les deux boucles dont se compose la courbe se réunissent, et les arcs représentés par $\sigma(t_0, t_1)$ se réduisent à 0.

5. Si $\frac{b}{a} > 1$, on posera $\frac{a^2}{b^2} = \sin 2\theta$; la courbe est alors composée d'une seule branche, et sa forme se rapproche, dans certains cas, de celle de l'ellipse. Je désignerai par $s(t_0, t_1)$ l'arc déterminé par les rayons vecteurs correspondants aux azimuts t_0, t_1, et par $\sigma(t_0, t_1)$ celui que déterminent les rayons vecteurs perpendiculaires aux deux premiers. D'après cela, on aura

$$s(t_0, t_1) = \frac{b^2}{a}\int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{\cos 2t + \sqrt{\cos^2 2t + \operatorname{cotg}^2 2\theta}}}{\sqrt{\cos^2 2t + \operatorname{cotg}^2 2\theta}}\, dt.$$

$$\sigma(t_0, t_1) = \frac{b^2}{a}\int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{-\cos 2t + \sqrt{\cos^2 2t + \operatorname{cotg}^2 2\theta}}}{\sqrt{\cos^2 2t + \operatorname{cotg}^2 2\theta}}\, dt;$$

et par suite, en supposant t_0 et t_1 compris entre o et $\frac{\pi}{4}$,

$$(9)\quad s(t_0,t_1)+\sigma(t_0,t_1)=2^{\frac{1}{2}}\frac{b^2}{a}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\sqrt{\operatorname{cotg}2\theta+\sqrt{\cos^2 2t+\operatorname{cotg}^2 2\theta}}}{\sqrt{\cos^2 2t+\operatorname{cotg}^2 2\theta}}\,dt,$$

$$(10)\quad s(t_0,t_1)-\sigma(t_0,t_1)=2^{\frac{1}{2}}\frac{b^2}{a}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\sqrt{-\operatorname{cotg}2\theta+\sqrt{\cos^2 2t+\operatorname{cotg}^2 2\theta}}}{\sqrt{\cos^2 2t+\operatorname{cotg}^2 2\theta}}\,dt.$$

Posons dans l'équation (9)

$$(11)\qquad \sqrt{\cos^2 2t+\operatorname{cotg}^2 2\theta}=\frac{1-2\sin^2\theta\sin^2\varphi}{\sin 2\theta},$$

et dans l'équation (10)

$$(12)\qquad \sqrt{\cos^2 2t+\operatorname{cotg}^2 2\theta}=\frac{1-2\cos^2\theta\sin^2\psi}{\sin 2\theta},$$

on aura

$$(13)\qquad s(t_0,t_1)+\sigma(t_0,t_1)=b\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}},$$

$$(14)\qquad s(t_0,t_1)-\sigma(t_0,t_1)=b\int_{\psi_0}^{\psi_1}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\cos^2\theta\sin^2\psi}},$$

les angles φ_0, ψ_0, t_0; φ_1, ψ_1, t_1 étant liés par les relations générales (11) et (12), lesquelles proviennent de l'élimination de φ' et ψ' entre

$$\left.\begin{aligned}\sin 2t&=\frac{\sin 2\varphi'}{\sin 2\theta},\\ \sin\varphi&=\frac{\sin\varphi'}{\sin\theta},\end{aligned}\right\}\quad\text{et}\quad\left\{\begin{aligned}\sin 2t&=\frac{\sin 2\psi'}{\sin 2\theta},\\ \sin\psi&=\frac{\sin\psi'}{\cos\theta}.\end{aligned}\right.$$

Si $t_0=0$, on a aussi $\varphi_0=0$, $\psi_0=0$, et les équations (13) et (14) deviennent

$$(15)\qquad \mathrm{F}(\sin\theta,\varphi)=\frac{1}{b}[s(t)+\sigma(t)],$$

$$(16)\qquad \mathrm{F}(\cos\theta,\psi)=\frac{1}{b}[s(t)-\sigma(t)].$$

Les modules de ces fonctions sont encore complémentaires et ont pour valeurs

$$\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}},$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}.$$

Si l'on fait $t = \frac{\pi}{4}$, on a $\varphi = \frac{\pi}{2}$, et l'équation (15) donne, en désignant par s le périmètre total de la courbe,

$$F(\sin\theta) = \frac{s}{4b}.$$

On voit que cette seconde espèce de courbe conduit aux mêmes conséquences analytiques que la première.

4. Il résulte de ce qui précède que, parmi les courbes représentées généralement par l'équation (a), il en existe deux, d'espèces différentes, dont les arcs représentent exactement telle fonction elliptique de première espèce que l'on voudra.

L'ellipse de Cassini jouit d'une propriété assez importante au point de vue géométrique. Si un cercle de rayon $\frac{b^2}{2a}$ tourne autour d'un axe distant de son centre de la quantité a, il engendrera la surface du quatrième ordre, connue sous le nom de *tore*; et si l'on coupe cette surface par un plan parallèle à l'axe et distant de cet axe de la quantité $\frac{b^2}{2a}$, la section coïncidera avec la courbe que représente l'équation (a).

C'est à tort que M. Auguste Comte avance, dans son *Traité de géométrie analytique*, page 72, qu'un plan qui contiendrait d'abord l'axe d'un tore, et qui ensuite s'en éloignerait en restant toujours parallèle à lui-même, déterminerait successivement sur cette surface toutes les courbes que peut représenter l'équation (a); il est aisé de voir, au contraire, que les sections du tore ne coïncident avec l'ellipse de Cassini que lorsque la distance du plan sécant à l'axe est précisément égale au rayon du cercle générateur du tore.

5. J'énoncerai encore une propriété remarquable de ces courbes qui ne semblent pas avoir été très-bien étudiées jusqu'ici.

La valeur du rayon de courbure s'obtient très-simplement. On trouve

$$R = b^2 \frac{r}{r^2 + a^2\cos 2t}.$$

Il devient infini aux points où la courbe (a) rencontre la lemniscate

$$(b) \qquad r^2 + a^2 \cos 2t = 0.$$

Les solutions communes aux équations (a) et (b) font connaître les coordonnées des points d'inflexion de la courbe (a), qui sont

$$r^4 = \frac{b^4 - a^4}{3}, \quad \text{et} \quad \cos 2t = -\sqrt{\frac{b^4 - a^4}{3a^4}},$$

d'où l'on conclut aisément que la courbe (a) aura quatre points d'inflexion lorsque le rapport $\frac{b}{a}$ sera compris entre 1 et $\sqrt{2}$.

Il suit de là que si a demeure constant et que le rapport $\frac{b}{a}$ varie de 1 à $\sqrt{2}$, l'équation (a) représentera une série de courbes de même espèce ayant chacune quatre points d'inflexion dont le lieu géométrique sera précisément la lemniscate représentée par l'équation (b).

Il existe une propriété analogue lorsque $\frac{b}{a}$ est compris entre 0 et 1; il est facile de voir en effet que si, a restant constant, $\frac{b}{a}$ varie de 0 à 1, l'équation (a) représentera une série de courbes de même espèce, composées chacune de deux boucles fermées. Cela posé, si l'on construit pour chacune de ces courbes les tangentes qui passent par leur centre commun, le lieu géométrique des points de contact ne sera autre que la lemniscate,

$$(c) \qquad r^2 - a^2 \cos 2t = 0.$$

Les deux lemniscates (b) et (c) sont égales, elles ont même centre, et leurs axes se coupent à angles droits.

6. On sait que lorsque l'angle du module est $\frac{\pi}{4}$, la fonction complete de première espèce est exprimable au moyen des transcendantes eulériennes $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$, d'où il résulte que $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ peut aisément s'exprimer au moyen du périmètre de la lemniscate. J'ai d'ailleurs montré, tome VII de ce Journal, page 114, que les transcendantes eulériennes de seconde espèce peuvent être simplement exprimées dans bien des cas

au moyen des périmètres des courbes représentées généralement par l'équation

$$r^m = \frac{(2a)^m}{2} \cos mt,$$

lesquelles comprennent, comme cas particuliers, le cercle et la lemniscate.

La courbe représentée par l'équation précédente jouit d'une propriété remarquable; elle consiste en ce que le produit des distances d'un de ses points à m points fixes est constant.

Considérons un polygone régulier de m côtés et de rayon a, les carrés des distances d'un point quelconque du plan aux sommets de ce polygone seront

$$(d) \qquad \left\{ \begin{array}{l} r^2 - 2ar \cos t + a^2, \\ r^2 - 2ar \cos\left(t - \frac{2\pi}{m}\right) + a^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r^2 - 2ar \cos\left(t - \frac{2k\pi}{m}\right) + a^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r^2 - 2ar \cos\left[t - \frac{2(m-1)\pi}{m}\right] + a^2. \end{array} \right.$$

Or on a

$$r^{2m} - 2a^m r^m \cos mt + a^{2m} = \left(r^m - a^m e^{mt\sqrt{-1}}\right)\left(r^m - a^m e^{-mt\sqrt{-1}}\right),$$

$$r^2 - 2ar\cos\left(t - \frac{2k\pi}{m}\right) + a^2 = \left[r - ae^{\left(t - \frac{2k\pi}{m}\right)\sqrt{-1}}\right]\left[r - ae^{-\left(t - \frac{2k\pi}{m}\right)\sqrt{-1}}\right].$$

D'ailleurs, k étant entier, chacun des facteurs du second membre de la première de ces identités est divisible par le facteur correspondant de la seconde, d'où il résulte que

$$r^{2m} - 2a^m r^m \cos mt + a^{2m}$$

est divisible par chacune des expressions (d), et par suite, est précisément égal au produit de ces quantités.

On voit, enfin, que l'équation

$$(e) \qquad r^{2m} - 2a^m r^m \cos mt + a^{2m} = b^{2m}$$

représente le lieu géométrique du point dont le produit des distances aux sommets du polygone est constant et égal à b^m. Elle se simplifie si

$b = a$, et l'on trouve, dans ce cas,

$$r^m - 2a^m \cos mt = 0,$$

ainsi qu'on l'avait annoncé.

La discussion de l'équation (e) conduit aux mêmes conséquences que celle de l'équation (a).

Si $\frac{b}{a}$ est compris entre 0 et 1, la courbe qu'elle représente se compose de m boucles fermées ayant pour axes les rayons du polygone régulier dont les sommets sont les m points fixes donnés. Ces m boucles sont tangentes à deux circonférences concentriques ayant pour équations

$$r^m = a^m + b^m, \quad \text{et} \quad r^m = a^m - b^m.$$

Cette seconde circonférence se réduit à son centre si $\frac{b}{a} = 1$, et dans ce cas les m boucles de la courbe se réunissent en ce point.

Enfin, si $\frac{b}{a}$ est compris entre 1 et ∞, la courbe se compose d'une seule branche fermée.

On trouve simplement pour valeur du rayon de courbure

$$R = b^m \frac{r}{r^m + (m-1)\, a^m \cos mt}.$$

Il devient infini pour les points situés sur la courbe ayant pour équation

$$(f) \qquad r^m + (m-1)\, a^m \cos mt = 0.$$

On en conclut aisément que la courbe considérée aura $2m$ points d'inflexion lorsque $\frac{b}{a}$ sera compris entre 1 et $\sqrt[m]{m}$, et que $\frac{b}{a}$ variant entre ces limites, la courbe représentée par l'équation (f) sera précisément le lieu géométrique décrit par ces points d'inflexion.

7. Les courbes représentées par l'équation (a) et qui peuvent affecter trois formes distinctes suivant que le rapport $\frac{b}{a}$ est supérieur égal ou inférieur à l'unité, offrent, sous ce point de vue, quelque analogie avec les sections du cône; cette analogie devient plus frappante si l'on compare les aires de ces trois courbes aux arcs des trois sections coniques.

Considérons d'abord le cas de $\frac{a}{b} > 1$, et désignons par $u\,(t_0 . t_1)$, $v\,(t_0, t_1)$ les aires comprises entre les arcs $s\,(t_0, t_1)$, $\sigma\,(t_0, t_1)$ et les rayons vecteurs qui passent par leurs extrémités. On trouve immédiatement

$$u\,(t_0, t_1) = a^2 \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}\,dt \left(\cos 2t + \sqrt{\frac{b^4}{a^4} - \sin^2 2t}\right),$$

$$v\,(t_0, t_1) = a^2 \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}\,dt \left(\cos 2t - \sqrt{\frac{b^4}{a^4} - \sin^2 2t}\right).$$

On en déduit, en désignant par $\mathrm{A}\,(t_0, t_1)$ l'aire comprise entre les deux arcs $s(t_0, t_1)$, $\sigma\,(t_0, t_1)$, et les deux rayons vecteurs qui passent par leurs extrémités,

$$\mathrm{A}\,(t_0 . t_1) = a^2 \int_{t_0}^{t_1} dt \sqrt{\frac{b^4}{a^4} - \sin^2 2t};$$

et si l'on pose

$$\sin 2t = \frac{b^2}{a^2} \sin \varphi,$$

on trouve aisément

$$\mathrm{A}\,(t_0, t_1) = \frac{a^2}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \sqrt{1 - \frac{b^4}{a^4} \sin^2 \varphi} - \left(\frac{a^4 - b^4}{2a^2}\right) \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{b^4}{a^4} \sin^2 \varphi}},$$

Si l'on fait maintenant $t_0 = 0$. on aura aussi $\varphi_0 = 0$, et cette équation deviendra

$$\mathrm{A}\,(t) = \frac{a^2}{2}\,\mathrm{E}\left(\frac{b^2}{a^2}, \varphi\right) - \left(\frac{a^4 - b^4}{2a^2}\right) \mathrm{F}\left(\frac{b^2}{a^2}, \varphi\right).$$

Ce qui montre que l'aire $\mathrm{A}\,(t)$ est de même qu'un arc d'hyberbole exprimable au moyen de deux fonctions elliptiques de même module et de même amplitude, l'une de première, et l'autre de seconde espèce.

Si dans l'équation précédente on fait

$$\sin 2t = \frac{b^2}{a^2}, \quad \text{d'où} \quad \varphi = \frac{\pi}{2};$$

puisqu'on désigne par A l'aire totale des deux boucles de la courbe, on aura

$$\mathrm{A} = 2a^2\,\mathrm{E}\left(\frac{b^2}{a^2}\right) - \frac{2(a^4 - b^4)}{a^2}\,\mathrm{F}\left(\frac{b^2}{a^2}\right).$$

Si $\frac{a}{b} = 1$, ce qui est le cas de la lemniscate, les deux équations précédentes deviennent

$$\mathrm{A}(t) = \frac{a^2 \sin 2t}{2}, \quad \mathrm{A} = 2a^2.$$

On voit que, dans ce cas, l'aire d'une portion de la courbe peut être obtenue sous forme finie de même qu'un arc de parabole.

8. Considérons enfin le cas de $\frac{a}{b} < 1$. et désignons, comme tout à l'heure, par $u(t_0, t_1)$ et $v(t_0, t_1)$ les aires comprises entre les arcs que nous avons appelés $s(t_0, t_1)$, $\sigma(t_0, t_1)$, et les rayons vecteurs qui passent par leurs extrémités, on aura

$$u(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} dt \left(a^2 \cos 2t + b^2 \sqrt{1 - \frac{a^4}{b^4} \sin^2 2t} \right),$$

$$v(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} dt \left(- a^2 \cos 2t + b^2 \sqrt{1 - \frac{a^4}{b^4} \sin^2 2t} \right),$$

d'où

$$u(t_0, t_1) + v(t_0, t_1) = b^2 \int_{t_0}^{t_1} dt \sqrt{1 - \frac{a^4}{b^4} \sin^2 2t},$$

et en faisant $t_0 = 0$,

$$u(t) + v(t) = \frac{1}{2} b^2 \mathrm{E}\left(\frac{a^2}{b^2}, \frac{1}{2} t\right).$$

Quant à la différence de ces deux aires, elle est évidemment algébrique.

Si l'on fait $t = \frac{\pi}{4}$, on en déduit, en désignant par A l'aire totale de la courbe,

$$\mathrm{A} = 2b^2 \mathrm{E}\left(\frac{a^2}{b^2}\right),$$

ce qui montre que l'aire d'une portion de cette courbe est, de même qu'un arc d'ellipse, exprimable au moyen d'une fonction elliptique de seconde espèce.

Ce rapprochement pourrait légitimer les dénominations de *lemniscate hyperbolique, parabolique ou elliptique*, appliquées à ces trois courbes suivant que le rapport $\frac{a}{b}$ serait supérieur égal ou inférieur à l'unité.

REMARQUES

SUR LA THÉORIE DES MAXIMA ET MINIMA

DE FONCTIONS A PLUSIEURS VARIABLES;

Par J. BERTRAND,

Élève-Ingénieur des Mines

Les remarques qui suivent sont bien élémentaires et se sont probablement présentées plus d'une fois à l'esprit des géomètres; néanmoins, comme elles se rattachent à une théorie qui fait partie de l'enseignement du calcul différentiel, je pense qu'elles pourront être utiles.

Soit $\varphi(x, y)$ une fonction de deux variables; la condition pour que cette fonction soit maxima ou minima est, comme on sait, que sa variation conserve toujours le même signe, quels que soient les accroissements infiniment petits de x et de y. Or, les termes du premier ordre, dans cet accroissement, sont

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy.$$

Ces termes donneront leur signe à toute la variation, à moins qu'ils ne soient identiquement nuls; et comme ils changent évidemment de signe avec dx et dy, il ne peut y avoir ni maximum ni minimum, à moins que ces deux termes ne disparaissent, c'est-à-dire à moins que l'on n'ait

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0,$$

mais cette conclusion n'est rigoureuse qu'autant que $\frac{d\varphi}{dx}$ et $\frac{d\varphi}{dy}$ ont des valeurs déterminées. Lorsque, pour certaines valeurs de x et de y, ces dérivées se présenteront sous une forme indéterminée, on ne pourra plus employer la formule dont nous venons de nous servir pour représenter l'accroissement de la fonction, et rien n'empêchera qu'il y ait maximum ou minimum.

Cette remarque est toute simple et n'est certainement pas nouvelle, mais on n'a pas l'habitude de la faire explicitement dans les Traités élémentaires; cependant les géomètres qui oublieraient d'en tenir compte pourraient être conduits à regarder comme impossibles des problèmes qui ont des solutions.

Je prendrai pour exemple ce problème de géométrie élémentaire :

Trouver un point dont la somme des distances à trois autres A, B, C, *soit un minimum.*

Quoique ce problème soit susceptible d'une solution géométrique, nous allons d'abord le traiter par l'analyse.

Prenons pour axe des x la droite qui joint les deux points A et B, et pour axe des y, une perpendiculaire à cette droite élevée au point A. Soit α l'abscisse de B, et a, b les coordonnées de C. Si l'on désigne par x, y celles du point cherché, l'expression à rendre minimum est

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-\alpha)^2+y^2}.$$

Si l'on égale à zéro les dérivées par rapport à y et par rapport à x, il vient

$$\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x-\alpha}{\sqrt{(x-\alpha)^2+y^2}}=0,$$

$$\frac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{(x-\alpha)^2+y^2}}=0;$$

élevant au carré, après avoir isolé les premiers termes de chaque équation, puis ajoutant, il vient

$$1=2+\frac{2\left[(x-\alpha)x+y^2\right]}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{(x-\alpha)^2+y^2}},$$

ou

$$\frac{x(x-\alpha)+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{(x-\alpha)^2+y^2}}=-\tfrac{1}{2};$$

chassant le dénominateur et élevant au carré, il vient

$$(x^2 + y^2 - \alpha x)^2 = \tfrac{1}{4}(x^2 + y^2)[(x - \alpha)^2 + y^2];$$

mais il est facile de voir que

$$(x^2 + y^2)[(x - \alpha)^2 + y^2] = (x^2 + y^2 - \alpha x)^2 + \alpha^2 y^2.$$

Il reste donc

$$3(x^2 + y^2 - \alpha x)^2 = \alpha^2 y^2;$$

et en extrayant la racine

$$x^2 + y^2 - \alpha x = \pm \frac{\alpha y}{\sqrt{3}},$$

ou

$$\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y \pm \frac{\alpha}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{3},$$

équation qui, comme on peut facilement s'en assurer, représente les deux cercles qui correspondent aux segments capables de 120 degrés que l'on peut décrire sur la corde AB.

Le point cherché est donc sur un segment capable de 120 degres décrit sur l'un quelconque des côtés du triangle ABC, il est donc à l'intersection de trois segments semblables, décrits sur les côtés AB, AC, BC, et jouit par conséquent de cette propriété, que les droites qui le joignent aux points A, B, C, forment trois angles égaux entre eux, et à 120 degrés.

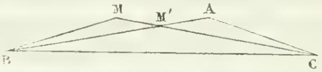
Mais dans le cas où ces segments ne peuvent pas se couper, c'est-à-dire, comme il est très-facile de s'en assurer lorsque le triangle ABC a un angle plus grand que 120 degrés, les deux conditions $\frac{d\varphi}{dx} = 0$, $\frac{d\varphi}{dy} = 0$, deviennent incompatibles, et pourtant le problème est, par sa nature, évidemment susceptible d'une solution.

Pour la trouver, nous remarquerons que ces dérivées deviennent $\frac{0}{0}$ lorsqu'on prend pour le point cherché l'un des trois points A, B, C; c'est donc l'un de ces trois points qui donne la solution de la question, et comme la somme des distances se réduit, dans ce cas, à la somme de deux côtés du triangle qui sont adjacents au sommet considéré, cette somme sera la plus petite si l'on choisit le sommet de l'angle obtus qui, par suite, est le point demandé.

Ce problème présente donc cette circonstance remarquable, que le point cherché se trouve déterminé de deux manières différentes suivant que le triangle formé par les trois points donnés a ou n'a pas d'angle supérieur à 120 degrés; dans le premier cas, c'est le sommet de l'angle obtus qui satisfait; dans le second, c'est un point de l'intérieur du triangle qui tend vers le sommet à mesure que l'angle s'approche de 120 degrés.

La démonstration précédente montre que le sommet de l'angle obtus est le point qui donne la plus petite somme de distances, en admettant qu'il doit nécessairement exister un point qui jouisse de cette propriété. Je vais démontrer, *à priori*, que ce sommet, dans le cas d'un angle supérieur à 120 degrés, donne, en effet, une somme de distances moindre que tous les points voisins.

D'abord il est facile de voir qu'il est inutile de considérer les points situés en dehors du triangle. Car si M est un de ces points, on aura, en le joignant aux trois sommets A, B, C, une somme évidemment plus grande que celle qui correspondrait au point M′ où MB coupe le contour du triangle.



Nous aurons donc prouvé que AB + AC est plus petit que la somme des distances à un point quelconque, si nous établissons cette proposition pour les points de l'intérieur du triangle

Soit M un quelconque de ces points infiniment rapproché de A, il s'agit de prouver que l'on a

$$AM + MC + MB > AB + AC;$$

or, on a évidemment, en représentant l'angle MAC par φ, l'angle BAC par A, et négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$MC = AC - AM \cos\varphi,$$

$$MB = AB - AM \cos(A - \varphi);$$

d'après cela, l'inégalité qu'il faut démontrer devient

$$AM[1 - \cos\varphi - \cos(A - \varphi)] > 0,$$

ou bien

$$1 - \cos\varphi - \cos(A - \varphi) > 0,$$

c'est-à-dire, en transformant la somme de cosinus,

$$1 - 2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(A - 2\varphi) > 0.$$

Cette inégalité devient évidente si l'on se rappelle que A étant plus grand que 120 degrés, c'est-à-dire que $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{1}{2}$A est plus grand que $\frac{\pi}{3}$, et son cosinus est, par conséquent, moindre que $\frac{1}{2}$. On voit, en même temps, qu'elle ne serait plus exacte si $\cos\frac{1}{2}A$ était plus grand que $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire, si A était moindre que 120 degrés.

J'ai cru d'autant plus utile de mentionner ces remarques, qu'on trouve des conclusions tout opposées dans un article des *Annales de Mathématiques* de M. Gergonne. Après avoir démontré, tome 1er, page 377, la construction que nous avons déduite de l'analyse, on conclut que, dans le cas où elle ne s'applique pas, le problème est impossible. J'ignore si la fausseté de cette conclusion a déjà été signalée; dans tous les cas, il n'est pas nécessaire d'insister plus longuement pour en faire sentir l'impossibilité, puisqu'on est sûr, *à priori*, par la nature même de la question, qu'il y a toujours une solution.

Les personnes qui liront l'article dont je parle apercevront sans peine quel est le point de la démonstration qui a besoin d'être modifié. C'est par une erreur de même genre qu'il est dit dans le même Recueil, quelques pages plus bas, qu'on ne peut pas, en général, trouver un point tel que la somme de ses distances à deux droites et à un point soit un minimum, il est clair, au contraire, qu'un pareil point existe toujours; seulement il est situé soit sur l'une des droites, soit précisément au point donné, de sorte qu'il ne satisfait pas à la condition analytique ordinaire de maximum et de minimum. Je me contente d'indiquer ces erreurs, sans entrer dans le détail de la solution très-facile du problème dans les différents cas. Cette solution présenterait, du reste, une discontinuité remarquable dans la position du point, suivant le plus ou moins grand angle que forment les droites données.

MÉMOIRE

SUR

UNE NOUVELLE MÉTHODE DE GÉNÉRATION ET DE DISCUSSION DES SURFACES DU DEUXIÈME ORDRE [*];

Par M. B. AMIOT,

Professeur de Mathématiques au Collége Saint-Louis.

THÉORIE DES FOCALES ET DES PLANS DIRECTEURS.

---

§ Ier.

Définitions et propriétés générales.

1. Quand on cherche dans un plan le lieu de tous les points, dont les distances à une droite donnée et à un point fixe, situés dans le même plan, conservent un rapport constant, on obtient l'équation la plus générale du deuxième degré entre deux variables. Si l'on identifie cette équation avec celle d'une courbe quelconque du deuxième ordre, on obtient immédiatement, non-seulement les foyers et les directrices de cette courbe, mais encore ses éléments (axes ou paramètres) en grandeur et en position.

Nous nous sommes proposé une question analogue par rapport aux surfaces du deuxième ordre, et nous avons trouvé, non pas un foyer unique, mais des courbes dont les différents points jouissent de pro-

---

[*] Ce Mémoire, présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 26 décembre 1842, a été l'objet d'un rapport de M. Cauchy, au nom d'une Commission composée de MM. Cauchy et Liouville. (Voyez *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XVI, p. 783.)

priétés assez semblables à celles des foyers des courbes du deuxième degré. D'abord, pour obtenir une équation générale du deuxième degré entre deux variables, que l'on puisse identifier avec celle d'une surface quelconque du deuxième ordre, nous avons cherché :

2. *Quel est le lieu géométrique décrit dans l'espace par un point mobile dont la distance à un centre fixe offre un carré constamment proportionnel au rectangle construit sur les distances du même point à deux plans donnés.*

Soient x', y', z' les coordonnées du centre fixe par rapport à trois axes de coordonnées rectangulaires, et soient aussi

$$(\mathrm{P}) \qquad \mathrm{X} + m\mathrm{Y} + n\mathrm{Z} + p = 0,$$

$$(\mathrm{P}') \qquad \mathrm{X} + m'\mathrm{Y} + n'\mathrm{Z} + p' = 0,$$

les équations des deux plans donnés, rapportés aux mêmes axes. Si nous désignons par r la distance d'un certain point du lieu cherché au point fixe, et par d et d' les distances du même point aux deux plans P et P', nous aurons pour chaque point du lieu cherché

$$(1) \qquad r^2 = kdd' \text{ [*]},$$

ou bien

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=\frac{k(x+my+nz+p)(x+m'y+n'z+p')}{\sqrt{1+m^2+n^2}\sqrt{1+m'^2+n'^2}},$$

en remplaçant r, d et d' par leurs valeurs connues en fonction des coordonnées courantes x, y, z d'un point du lieu cherché, et des coordonnées fixes x', y', z' du point donné.

3. Pour abréger, je pose

$$h = \frac{k}{\sqrt{1+m^2+n^2}\sqrt{1+m'^2+n'^2}},$$

---

[*] M. Cauchy appelle *module* le rapport constant k, et il fait observer que les distances d, d', pouvant être prises avec le signe + ou avec le signe —, l'équation (1) représente, en général, deux surfaces du second ordre distinctes l'une de l'autre. (*Voir* le Rapport de M. Cauchy.)

et j'ai l'équation

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \\ &= h(x + my + nz + p)(x + m'y + n'z + p'), \end{aligned} \right.$$

qui représente généralement une surface du deuxième ordre.

Nous appellerons *foyer* le point fixe $x'y'z'$, et *plans directeurs* les deux plans donnés (P) et (P′). Ainsi tout foyer jouit de cette propriété que : *Le carré de sa distance à un point quelconque de la surface est décomposable en deux facteurs entiers, rationnels et du premier degré en fonction des coordonnées de ce dernier point.*

Réciproquement, *tout point jouissant de cette propriété est un foyer*, car de l'équation (2) résulte immédiatement l'équation (1), et l'on obtient les équations des plans directeurs en égalant à zéro chacun des deux facteurs du premier degré dans lesquels on a décomposé la valeur de r^2.

4. Au lieu de discuter immédiatement les différentes surfaces représentées par l'équation (2) et correspondantes à un certain foyer et à un système de plans directeurs donnés, proposons-nous la question inverse, c'est-à-dire : *Étant donnée une surface du deuxième ordre par son équation, cherchons si cette surface admet un ou plusieurs foyers, ainsi que un ou plusieurs systèmes de plans directeurs.*

Pour cela, développons et ordonnons l'équation (2), ce qui nous donne

$$(3)\quad \left. \begin{aligned} &x^2(1-h) + y^2(1-hmm') + z^2(1-hnn') \\ &- yzh(mn' + m'n) - xzh(n + n') - xyh(m + m') \\ &- x[2x' + h(p + p')] - y[2y' + h(mp' + m'p)] \\ &- z[2z' + h(np' + n'p)] + z'^2 + y'^2 + x'^2 - hpp' \end{aligned} \right\} = 0.$$

Or, cette équation représentant toutes les surfaces qui admettent des foyers et des plans directeurs, nous n'aurons qu'à chercher, dans chaque cas, si l'on pourra déterminer un ou plusieurs systèmes de valeurs des quantités h, m, m', n, n', p et p', x', y' et z' qui rendent l'équation (3) identique avec l'équation donnée.

Observons d'abord que l'on peut toujours concevoir pris pour plan des xy, par exemple, un des plans diamétraux principaux, et pour axe des x, un des axes de la surface donnée. Alors l'équation de cette surface sera de la forme

$$(R)\qquad Lx^2 + My^2 + Nz^2 + 2Px + R = 0,$$

et en identifiant l'équation (3) avec celle-ci, on a d'abord les trois relations

$$mn' + m'n = 0, \quad m + m' = 0, \quad n + n' = 0,$$

d'où résulte l'un ou l'autre des deux systèmes

$$(M)\qquad n = 0, \quad n' = 0, \quad m' = -m;$$

$$(M_1)\qquad m = 0, \quad m' = 0, \quad n' = -n.$$

Admettons le premier, par exemple; comme le terme en z doit disparaître de l'équation (3), on aura

$$z' = 0,$$

et par conséquent déjà *tout foyer est situé dans l'un des plans diamétraux principaux de la surface.*

On voit, en même temps, que les plans directeurs dont les équations deviennent

$$(p)\qquad X + mY + p = 0,$$

$$(p')\qquad X - mY + p' = 0,$$

sont perpendiculaires au même plan diamétral principal et que leurs traces sur ce plan font des angles égaux avec l'axe des x.

5. Identifiant maintenant l'équation (3) avec l'équation (R), nous avons les équations de condition

$$(a)\qquad 1 - h = \frac{L}{N}, \qquad 1 + hm^2 = \frac{M}{N};$$

$$(b)\qquad 2x' + h(p + p') = -\frac{2P}{N}, \quad 2y' + hm(p' - p) = 0;$$

$$(c)\qquad y'^2 + x'^2 - hpp' = \frac{R}{N}.$$

Les deux premières nous feront connaître h et m; puis, l'élimination de p et p' entre les trois dernières nous donnera généralement une seule équation en $x'y'$: ce sera celle d'un lieu géométrique dont chaque point sera *un foyer* de la surface.

Nous obtenons ainsi

$$h = \frac{N-L}{N},\quad m = \sqrt{\frac{M-N}{N-L}};$$

$$p = -\left[\frac{Nx'+P}{N-L} - \frac{Ny'}{\sqrt{(N-L)(M-N)}}\right],$$

$$p' = -\left[\frac{Nx'+P}{N-L} + \frac{Ny'}{\sqrt{(N-L)(M-N)}}\right];$$

d'ou

$$hpp' = \frac{(Nx'+P)^2}{N(N-L)} - \frac{N^2y'^2}{N(M-N)},$$

et partant, l'équation (c) devient

$$(\varphi)\qquad \frac{Lx'^2}{L-N} + \frac{My'^2}{M-N} + \frac{P(2Nx'+P)}{N(N-L)} = \frac{R}{N}.$$

Chaque point de la courbe représentée par l'équation (φ) étant un foyer de la surface (R), cette courbe est le lieu de tous les foyers situés dans le plan des xy, et nous la nommerons *une focale*. Toute focale est donc une des trois courbes du deuxième ordre ou une de leurs variétés. Observons que, si la surface (R) admet un centre, ce point étant pris pour origine des coordonnées, on aura

$$P = 0,$$

et par conséquent la focale (φ) sera aussi rapportée à son centre.

6. Si l'on substitue les valeurs de m, p et p' dans les équations des plans directeurs p et p', on a

$$(\psi)\qquad X + Y\sqrt{\frac{M-L}{N-L}} - \frac{Nx'+P}{N-L} + \frac{Ny'}{\sqrt{(N-L)(M-N)}} = 0,$$

$$(\psi')\qquad X - Y\sqrt{\frac{M-N}{N-L}} - \frac{Nx'+P}{N-L} - \frac{Ny'}{\sqrt{(N-L)(M-N)}} = 0.$$

Ainsi, pour chaque point de la focale $(x'y')$, on aura un système de deux plans directeurs formant deux séries de plans respectivement parallèles. La ligne d'intersection de deux plans d'un même système quelconque sera déterminée par les deux équations

$$(\chi) \qquad X = \frac{Nx' + P}{N - L}, \quad Y = \frac{Ny'}{N - M},$$

que l'on obtient en ajoutant et retranchant successivement les deux équations (ψ) et (ψ'). Cette droite, toujours réelle lors même que les équations des plans directeurs renfermeraient certains termes imaginaires, sera désignée sous le nom d'*axe directeur*, et nous voyons que, pour chaque point de la focale $x'y'$, il y a un axe directeur dont *le pied* a pour coordonnées X, Y.

Les deux points $x'y'$ et XY, dont les coordonnées sont liées par les relations (χ), ou bien

$$(\chi') \qquad x' = \frac{X(N - L) - P}{N}, \quad \text{et} \quad y' = \frac{Y(N - M)}{N},$$

sont appelés *points conjugués* [*].

7. Puisqu'à chaque point de la focale correspond un point conjugué situé dans le même plan, cherchons le lieu de tous les points conjugués aux divers points de la focale. Pour cela, éliminons x' et y' entre les équations de la focale (φ) et les équations (χ'), ce qui donne

$$(\vartheta) \qquad L(L - N)X^2 + M(M - N)Y^2 + 2PX(L - N) + P^2 = RN.$$

La courbe représentée par cette équation est toujours de la même espèce que la focale et généralement réelle ou imaginaire avec elle.

---

[*] Si l'on conçoit que le point (XY) devienne le sommet d'un cône circonscrit à la surface du deuxième degré, le plan de la courbe suivant laquelle le cône touchera la surface, renfermera toujours le foyer $x'y'$. Pour cette raison, M. Cauchy nomme le point (XY) un *pôle* de la surface correspondant au foyer $x'y'$, et il démontre que le foyer $(x'y')$ coïncidera toujours avec le pied de la perpendiculaire abaissée du pôle (X, Y) sur le plan polaire correspondant à ce même pôle. (*Voir* la Note IV^e faisant suite au Rapport de M. Cauchy.)

Nous lui donnerons, pour cette raison, le nom de *synfocale*, et nous voyons que, si la focale admet un centre, ce même point est aussi le centre de la synfocale.

8. La valeur générale de r^2 devient, par suite des équations de condition du n° 4,

$$r^2 = h(x + my + p)(x - my + p'),$$

et si l'on y remplace h, m, p et p' par leurs valeurs (5), on obtient

$$(\rho) \qquad r^2 = \frac{N - L}{N}\left(x - \frac{Nx' + P}{N - L}\right)^2 + \frac{N - M}{N}\left(y - \frac{Ny'}{N - M}\right)^2;$$

ou bien encore, en remplaçant x' et y' par leurs valeurs (z),

$$(\rho') \qquad r^2 = \frac{N - L}{N}(x - X)^2 + \frac{N - M}{N}(y - Y)^2.$$

Or, si nous supposons une valeur fixe attribuée à r, puis, que d'un certain point (F) de la focale, pris pour centre, nous décrivions une sphère avec un rayon r, cette sphère coupera généralement la surface (R) suivant une ligne à double courbure, dont les différents points auront pour coordonnées, parallèles aux deux axes des x et des y, précisément les valeurs de x et y qui vérifient l'équation (φ). Par conséquent si l'on considère, dans cette équation, r, x' et y' comme constantes, et x, y comme des coordonnées courantes, nous aurons une courbe qui sera la projection sur le plan des xy de la ligne suivant laquelle la surface est pénétrée par une sphère de rayon r ayant pour centre le point $x'y'$ de la focale. Nous appellerons cette courbe *la projection* et nous voyons qu'*elle est toujours une ligne du deuxième ordre ayant pour centre le point de la synfocale* XY *conjugué au point* F *de la focale pris pour centre de la sphère.*

Si nous supposons qu'on attribue à r une autre valeur, x' et y' ou X et Y ne changeant pas, on aura une nouvelle sphère concentrique avec la première, et la projection correspondante sera une courbe semblable à la première et aussi concentrique avec elle. Donc généralement: *Si d'un certain point pris arbitrairement sur une focale, comme centre commun, on décrit une série de sphères, les projections sur le* *plan de la focale, des lignes suivant lesquelles la surface est pénétrée par ces différentes sphères, sont toutes des ellipses ou bien des hyperboles semblables ayant pour centre commun le point de la synfocale conjugué au point de la focale pris pour centre des sphères.*

9. Supposons ensuite que, dans l'équation (ρ), on fasse varier x' et y' ou X et Y, r restant constant, ce qui revient à admettre que le centre d'une même sphère parcourt la focale, les différentes projections correspondantes sont toutes des courbes égales entre elles, ayant pour centre, chacune le point de la focale occupé par le centre de la sphere correspondante. On pourrait donc définir la synfocale : *Le lieu des centres de toutes les projections sur le plan de la focale des différentes lignes d'intersection de la surface par une sphère de rayon quelconque qui est supposée se mouvoir de manière que son centre parcoure la focale.*

10. Soit pris un certain point M sur la surface; je mène par ce point un plan perpendiculaire à l'axe des x, lequel aura pour équation $x = x_{,}$ et coupera généralement la surface suivant une ligne du deuxième degré, que nous appellerons *une section perpendiculaire*. Le plan de cette courbe coupe généralement la synfocale en un point qui a pour abscisse $\mathrm{X} = x_{,}$, et si nous considérons le *foyer conjugué*, nous aurons pour l'abscisse de ce point

$$x' = \frac{x_{,}(\mathrm{N}-\mathrm{L})-\mathrm{P}}{\mathrm{N}}, \quad \text{d'où} \quad x_{,} = \mathrm{X} = \frac{\mathrm{N}x'+\mathrm{P}}{\mathrm{N}-\mathrm{L}},$$

et par conséquent, pour tous les points de la section perpendiculaire $x = x_{,}$, on a

$$r^2 = \frac{\mathrm{N}-\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\left(y - \frac{\mathrm{N}y'}{\mathrm{M}-\mathrm{N}}\right)^2,$$

d'où

$$r_1 = \sqrt{\frac{\mathrm{N}-\mathrm{M}}{\mathrm{N}}}\left(y - \frac{\mathrm{N}y'}{\mathrm{M}-\mathrm{N}}\right) = \sqrt{\frac{\mathrm{N}-\mathrm{M}}{\mathrm{N}}}(y - \mathrm{Y}).$$

Mais si nous nommons δ_1 la distance d'un même point M de la section perpendiculaire à l'axe directeur correspondant, c'est-à-dire ayant pour pied le point $X = x_1$, nous avons évidemment

$$\delta_1 = y - Y,$$

d'où résulte

$$r_1 = \sqrt{\frac{N-M}{N}} \times \delta_1, \quad \text{ou} \quad \frac{r_1}{\delta_1} = \sqrt{\frac{N-M}{N}}.$$

Si par le même point M de la surface on mène un nouveau plan perpendiculaire à l'axe des y, on aura une nouvelle section perpendiculaire, et si l'on désigne par r_2 et δ_2 les distances d'un point quelconque de cette section au foyer conjugué et à l'axe directeur correspondant, on verra de la même manière que

$$\frac{r}{\delta_2} = \sqrt{\frac{N-L}{N}}$$

Ces valeurs de r_1 ou r_2 ne seront imaginaires que si le plan mené par le point M, perpendiculairement soit à l'axe des x, soit à l'axe des y, ne rencontre pas la synfocale. Donc généralement :

Étant pris arbitrairement un point sur la synfocale comme pied d'un axe directeur, si par cet axe on mène un plan perpendiculaire soit à l'axe des x, soit à l'axe des y, et que ce plan détermine sur la surface une certaine section, tous les points de cette ligne jouissent de cette propriété, que les distances d'un quelconque de ces points au foyer conjugué et à l'axe directeur correspondant sont constamment dans le même rapport.

On voit de plus que la valeur de ce rapport est la même pour toutes les sections perpendiculaires au même axe principal de la surface.

11. Tous les résultats que nous venons d'obtenir sont relatifs au plan des xy, parce que nous avons supposé, n° 4, qu'on a pris pour ce plan un des plans diamétraux principaux de la surface. Il y aura donc lieu généralement de chercher la focale, synfocale... sur chacun des plans diamétraux principaux, ce que nous aurons soin de faire dans chaque cas particulier.

§ II.

Propriétés des focales, synfocales et plans directeurs dans les surfaces douées d'un centre et particulièrement dans l'ellipsoïde.

12. Soit l'équation

$$(E)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

d'un ellipsoïde rapporté à son centre et à ses axes (*Planche I, fig.* 1).

Si nous la comparons à l'équation (R) du n° **4**, nous avons

$$(l)\qquad L = \frac{1}{a^2},\quad M = \frac{1}{b^2},\quad N = \frac{1}{c^2},\quad P = 0,\quad R = -1,$$

valeurs qui, substituées dans l'équation (φ) du n° **5**, donnent

$$(F)\qquad \frac{y'^2}{c^2 - b^2} - \frac{x'^2}{a^2 - c^2} = -1$$

pour l'équation de la focale située dans le plan des xy.

Or, nous pouvons toujours supposer que l'on a

$$a > c,\quad c > b,$$

ce qui revient à dire que l'on a pris pour axe des x, le plus grand axe de l'ellipsoïde, et pour axe des y le plus petit.

Cette hypothèse admise, on voit que l'équation (F) représente une hyperbole située dans le plan du *plus grand* et du *plus petit axes*, ne rencontrant point le plus petit et coupant le plus grand à des distances

$$x' = \pm\sqrt{a^2 - c^2}$$

du centre. Cette courbe a donc *pour sommets les foyers* de l'ellipse principale située dans le plan des xz; elle a pour foyers ceux de l'ellipse principale située dans le plan des xy; car, en appelant A, B les deux demi-axes et C sa demi-excentricité, on a

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

On voit aussi qu'elle a pour asymptotes les deux droites

$$y = \pm x \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{a^2 - c^2}},$$

qui sont aisées à construire.

13. Si nous substituons pareillement les valeurs (l) dans l'équation (θ) du n° **7**, nous aurons

$$\text{(D)} \qquad \frac{c^2 - b^2}{b^4} \mathrm{Y}^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^4} \mathrm{X}^2 = -1,$$

pour l'équation de la synfocale. Cette courbe est une nouvelle hyperbole qui ne rencontre pas non plus l'axe des y et qui coupe celui des x à des distances

$$\mathrm{X} = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - c^2}}$$

de l'origine. Elle a donc pour sommets les pieds des directrices de l'ellipse principale située dans le plan des xz. Les asymptotes de la synfocale ont pour équations

$$\mathrm{Y} = \pm \frac{b^2}{a^2} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{c^2 - b^2}}.$$

Or, soient α et β les angles que les asymptotes de la focale et de la synfocale forment avec l'axe des x, l'un au-dessus et l'autre au-dessous, on a

$$\operatorname{tang} \alpha = \pm \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} \beta = \mp \frac{b}{a^2} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{c^2 - b^2}},$$

d'ou résulte

$$\operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta = - \frac{b^2}{a^2},$$

et par conséquent : *Chacune des asymptotes de la synfocale forme, avec une des asymptotes de la focale, un système de diamètres conjugués de l'ellipse principale* AOA′ *située dans le plan des xy.*

Connaissant ainsi les asymptotes et les sommets de la synfocale, on construira aisément cette courbe; puis, si l'on veut obtenir un point conjugué à un point donné quelconque de la focale, on en construira l'abscisse par la proportion

$$\mathrm{X} : x' :: \frac{a^2}{\sqrt{a^2-c^2}} : \sqrt{a^2-c^2} \quad \text{ou} \quad :: \mathrm{OD} : \mathrm{OF}.$$

14. Cherchons maintenant les plans directeurs, et pour cela, substituons les valeurs (l) du n° **12** dans les équations (ψ) et (ψ') du n° **6**, ce qui nous donne

$$(p) \qquad \mathrm{X} + \mathrm{Y}\frac{a}{b}\sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2-c^2}} - \frac{a^2x'}{a^2-c^2} + \frac{aby'}{\sqrt{(a^2-c^2)(c^2-b^2)}} = 0.$$

$$(p') \qquad \mathrm{X} - \mathrm{Y}\frac{a}{b}\sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2-c^2}} - \frac{a^2x'}{a^2-c^2} - \frac{aby'}{\sqrt{(a^2-c^2)(c^2-b^2)}} = 0.$$

Ces équations sont réelles, et par conséquent, pour chaque point de la focale $(x'y')$, il existe un système de deux plans directeurs; pour obtenir leur direction, il n'y a qu'à construire les traces de ceux qui correspondent au point de la focale situé sur l'axe des x. Or, pour ce point, on a

$$y' = 0 \quad \text{et} \quad x' = \sqrt{a^2-c^2},$$

et par conséquent les plans directeurs correspondants ont pour équations

$$\mathrm{X} + \mathrm{Y}\frac{a}{b}\sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2-c^2}} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2-c^2}} = 0,$$

et

$$\mathrm{X} - \mathrm{Y}\frac{a}{b}\sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2-c^2}} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2-c^2}} = 0;$$

d'où l'on déduit pour $\mathrm{Y} = 0$,

$$\mathrm{X} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-c^2}},$$

et pour $\mathrm{X} = 0$,

$$\mathrm{Y} = \mp \frac{ab}{\sqrt{c^2-c^2}}.$$

Ainsi, ces deux droites coupent l'axe des x au point D, sommet de la synfocale, ce qui était aisé à prévoir. Pour obtenir les points où elles coupent l'axe des y, j'établis la proportion

$$\sqrt{c^2-b^2} \quad \text{ou} \quad \mathrm{OF} : \mathrm{AO} :: \mathrm{BO} : \mathrm{LO};$$

puis, prenant $\mathrm{OL}' = \mathrm{OL}$ et menant les deux droites DL, DL', nous avons les traces des deux plans directeurs correspondants au foyer F.

Pour obtenir les traces des plans directeurs qui correspondent à un autre foyer quelconque F_2, je construis le point conjugué D_2, puis je mène par ce point $\mathrm{D}_2\mathrm{L}_2$ et $\mathrm{D}_2\mathrm{L}'_2$ respectivement parallèles à DL, DL', et j'ai les traces demandées.

15. Si nous substituons pareillement les valeurs (l) du nº **12** dans l'équation (ρ) du nº 8, nous avons pour la valeur générale du rayon vecteur r, mené d'un certain foyer $x'y'$ à un point quelconque de la surface,

$$r^2 = \frac{a^2-c^2}{a^2}\left(x - \frac{a^2x'}{a^2-c^2}\right)^2 - \frac{c^2-b^2}{b^2}\left(y + \frac{b^2y'}{c^2-b^2}\right)^2.$$

Or, soit une section $\alpha\alpha'$ faite par un plan perpendiculaire à l'axe OY et passant par le point de la synfocale (XY) conjugué au foyer $x'y'$, on aura, pour tous les points de cette section,

$$y = \mathrm{Y} = -\frac{b^2y'}{c^2-b^2},$$

et par conséquent, la valeur correspondante de r ne dépendra plus que de la seule variable x. On a, en effet,

$$r^2 = \frac{a^2-c^2}{a^2}\left(x - \frac{a^2x'}{a^2-c^2}\right)^2, \quad \text{d'où} \quad r = \pm\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}\left(x - \frac{a^2x'}{a^2-c^2}\right),$$

avec la relation

$$x < \mathrm{X} \quad \text{ou} \quad x < \frac{a^2x'}{a^2-c^2},$$

puisque la synfocale est entièrement extérieure à la surface.

Soient donc r_1 et d_1 les distances d'un même point M de la section $\alpha\alpha'$ au foyer conjugué F_2 et à l'axe directeur D_2 correspondant, nous aurons en valeur absolue

$$r_1 = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}\left(\frac{a^2x'}{a^2-c^2} - x\right), \quad \text{et} \quad d_1 = \mathrm{X} - x = \frac{a^2x'}{a^2-c^2} - x,$$

et par conséquent, nous avons, dans ce cas, pour la valeur constante de r_1 à d_1,

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a},$$

quantité toujours < 1.

16. Considérons maintenant un second point de la focale F'_2 ne différant du premier F_2 que par le signe de l'abscisse x', nous appellerons ces deux points *foyers conjugués* de la section $\alpha\alpha'$; et si nous prenons les distances r et r' d'un même point M quelconque de la section aux deux foyers conjugués, nous aurons en valeur absolue

$$r = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}\left(\frac{a^2x'}{a^2-c^2} - x\right), \quad r' = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}\left(\frac{a^2x'}{a^2-c^2} + x\right).$$

En additionnant ces deux valeurs, nous obtenons

$$r + r' = \frac{2ax'}{\sqrt{a^2-c^2}}, \quad \text{ou encore} \quad r + r' = 2x' \times \frac{d_1}{r_1},$$

quantité constante pour tous les points d'une même section perpendiculaire et variant d'une section à l'autre proportionnellement à la distance $2x'$ des deux foyers conjugués.

17. Supposons maintenant qu'en un certain point M$(x_{\prime}, y_{\prime}, z_{\prime})$ de la section perpendiculaire $\alpha\alpha'$, nous menions une normale à l'ellipsoïde, et cherchons l'angle que fait cette normale avec le rayon vecteur MF_2.

D'abord, l'équation du plan tangent à l'ellipsoïde au point $x_{\prime}, y_{\prime}, z_{\prime}$, étant

$$\frac{xx_{\prime}}{a^2} + \frac{yy_{\prime}}{b^2} + \frac{zz_{\prime}}{c^2} = 1,$$

la normale au même point aura pour équations

$$(\mathrm{MN})\left\{\begin{aligned} x - x_{,} &= \frac{c^2 x_{,}}{a^2 z_{,}}(z - z_{,}), \\ y - y_{,} &= \frac{c^2 y_{,}}{b^2 z_{,}}(z - z_{,}), \end{aligned}\right\} \text{ avec la relation } \frac{x_{,}^2}{a^2} + \frac{y_{,}^2}{b^2} + \frac{z_{,}^2}{c^2} = 1.$$

Un rayon vecteur, mené par le point M et par un point quelconque de l'espace x', y', z', a pour équations

$$x - x_{,} = \frac{x_{,} - x'}{z_{,} - z'}(z - z_{,}), \quad \text{et} \quad y - y_{,} = \frac{y_{,} - y'}{z_{,} - z'}(z - z_{,}).$$

Mais pour exprimer que le point (x', y', z') est situé sur la focale et conjugué à la section $\alpha\alpha'$, nous avons les relations

$$z' = 0, \quad y_{,} = -\frac{b^2 y'}{c^2 - b^2}, \quad \text{et} \quad \frac{y'^2}{c^2 - b^2} - \frac{x'^2}{a^2 - c^2} = -1.$$

Nous en déduisons

$$y_{,} - y' = \frac{c^2 y'}{b^2},$$

et partant, nous avons pour les équations du rayon vecteur MF_2,

$$(\mathrm{MF}_2) \qquad \left\{\begin{aligned} x - x_{,} &= \frac{x_{,} - x'}{z_{,}}(z - z_{,}), \\ y - y_{,} &= \frac{c^2 y_{,}}{b^2 z_{,}}(z - z_{,}), \end{aligned}\right.$$

et l'on voit tout d'abord que *la normale* MN *et le rayon vecteur* MF_2 *sont situés dans un même plan perpendiculaire au plan des* xy.

Pour obtenir actuellement l'angle de ces deux droites, faisons dans la formule générale

$$\operatorname{tang} \mathrm{V} = \frac{\sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2 + (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2}}{\alpha\alpha' + \beta\beta' + 1},$$

$$\alpha = \frac{c^2 x_{,}}{a^2 z_{,}}, \quad \alpha' = \frac{x_{,} - x'}{z_{,}}, \quad \beta = \beta' = \frac{c^2 y_{,}}{b^2 z_{,}},$$

et nous avons

$$\operatorname{tang} \mathrm{MF}_2 = \frac{(c^2 x_{,} - a^2 x_{,} + a^2 x')\sqrt{b^4 z_{,}^2 + c^4 y_{,}^2}}{a^2 b^2 c^2 \left(\frac{x_{,}^2}{a^2} + \frac{c^2 y_{,}^2}{b^4} + \frac{z_{,}^2}{c^2} - \frac{x_{,} x'}{a^2}\right)},$$

puis, remplaçant $\frac{z_{,}^2}{c^2}$ par la valeur $1 - \frac{x_{,}^2}{a^2} - \frac{y_{,}^2}{b^2}$, observant que

$$\frac{y_{,}^2(c^2 - b^2)}{b^4} = \frac{y'^2}{c^2 - b^2} = \frac{x'^2}{a^2 - c^2} - 1,$$

et supprimant les facteurs communs, on a enfin

$$\operatorname{tang}(\mathrm{MF}_2) = \frac{(a^2 - c^2)\sqrt{b^4 z_{,}^2 + c^4 y_{,}^2}}{b^2 c^2 x'}.$$

Or, si l'on cherchait l'angle de la même normale MN avec le rayon vecteur MF'_2, allant du même point M au foyer F'_2, lequel ne diffère de F_2 que par le signe de l'abscisse x', on aurait visiblement des résultats ne différant des précédents que par le signe de l'abscisse x'. Donc, d'abord le plan de la normale MN et du rayon vecteur MF_2 contient aussi le second rayon MF'_2. D'ailleurs on aura

$$\operatorname{tang}(\mathrm{MF}'_2) = -\operatorname{tang}(\mathrm{MF}_2),$$

et par conséquent *la normale* MN *divise en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs, menés d'un même point* M *quelconque d'une section perpendiculaire aux deux foyers conjugués.*

Ainsi, en général, si l'on coupe un ellipsoïde par un plan perpendiculaire à son petit axe, ce plan coupera la synfocale en deux points, et les points conjugués de la focale peuvent être considérés comme de *véritables foyers de la section correspondante,* car ils jouissent des propriétés suivantes :

1°. *Les distances d'un point quelconque de la section* $\alpha\alpha'$ *à l'axe directeur et au foyer conjugué correspondant sont dans un rapport constant ;*

2°. *La somme des distances d'un même point* M *quelconque de la section perpendiculaire* $\alpha\alpha'$ *aux deux foyers conjugués est constante, et égale à la distance des deux foyers conjugués multipliée par le rap-*

port des distances d'un point de la même section à l'axe directeur et au foyer conjugué correspondants;

3°. *La normale à la surface au point* M *quelconque de la section* $\alpha\alpha'$ *est située dans le plan des rayons vecteurs* MF_2, MF'_2, *et divise l'angle de ces droites en deux parties égales.*

18. Si, dans la valeur de r^2 du n° **15**, on posait

$$x = X = \frac{a^2x'}{a^2-c^2},$$

on aurait pour r un résultat imaginaire; et, en effet, aucun plan mené par un point quelconque de la syfocale, perpendiculairement au grand axe, ne peut couper l'ellipsoïde.

19. Cherchons maintenant les résultats analogues relatifs au plan des xz, c'est-à-dire au plan du plus grand et du moyen axes de l'ellipsoïde.

Pour cela, nous n'avons qu'à changer, dans l'équation de la surface (E) du n° **12**, y en z, et réciproquement, ce qui revient à changer dans toutes les autres formules, d'abord y en z, puis c en b et b en c. On obtient ainsi, pour l'équation de cette nouvelle focale sur le plan des xz,

$$(F) \qquad \frac{z'^2}{c^2-b} + \frac{x'^2}{a^2-b} = 1.$$

ellipse réelle, puisque l'on suppose toujours $\begin{matrix} a > b \\ c > b \end{matrix}$. Elle a pour demi-axes

$$x' = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \text{et} \quad z' = \sqrt{c^2 - b^2},$$

et par conséquent, pour demi-excentricité,

$$\sqrt{x'^2 - z'^2} = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Les quatre sommets sont donc *les foyers* des deux ellipses principales situées, l'une dans le plan des xy, et l'autre dans celui des yz: et de plus, ses foyers coïncident avec ceux de la section principale, située dans le plan des xz. On construira donc aisément cette courbe, qui sera telle que $\mathrm{F\,F'\,F_1\,F'_1}$ (*fig.* 2).

20. L'équation de la synfocale devient ici

$$(\mathrm{D}_{,})\qquad \frac{c^2-b^2}{c^4}\mathrm{Z}^2+\frac{a^2-b^2}{a^4}\mathrm{X}^2=1,$$

nouvelle ellipse ayant pour demi-axes

$$\mathrm{X}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}},\quad \text{et}\quad \mathrm{Z}=\frac{c^2}{\sqrt{c^2-b^2}},$$

quantités aisées à construire; et par suite, on a la courbe $\mathrm{DD_1D'D'_1}$.

On trouve, dans ce cas, pour les équations des plans directeurs,

$$\mathrm{X}\pm\mathrm{Z}\frac{a}{c}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}}-\frac{a^2x'}{a^2-b^2}\pm\frac{acz'}{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}=0,$$

lesquels sont imaginaires, puisque l'on suppose $a>b$ et $c>b$, et par conséquent *il n'y a point de plans directeurs perpendiculaires au plan du plus grand et du moyen axes de l'ellipsoïde* [*].

Quant à l'axe directeur perpendiculaire au même plan, il a pour équations

$$\mathrm{X}=\frac{a^2x'}{a^2-b^2},\quad \text{et}\quad \mathrm{Z}=\frac{c^2z'}{c^2-b^2}.$$

D'apres cela, étant pris un point quelconque sur la focale $x'y'$, on aura les coordonnées du point conjugué de la synfocale X Z par les deux proportions

$$\mathrm{X}:x'::\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}:\sqrt{a^2-b^2},\quad\text{ou}\quad ::\mathrm{OD}:\mathrm{OF};$$

$$\mathrm{Z}:z'::\frac{c^2}{\sqrt{c^2-b^2}}:\sqrt{c^2-b^2},\quad\text{ou}\quad ::\mathrm{OD}_{,}:\mathrm{OF}_{,}.$$

---

[*] Les plans directeurs deviennent réels si l'on admet que, pour les cas où nous les avons obtenus imaginaires, la surface soit définie par l'équation

$$r^2=\frac{k}{2}(d^2+d'^2),$$

au lieu de

$$r^2=kdd'.$$

(*Voir* le Rapport de M. Cauchy et la Note IV.)

21. On a, dans ce cas, pour la valeur générale du rayon vecteur,

$$r^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}\left(x - \frac{a^2x'}{a^2-b^2}\right)^2 + \frac{c^2-b^2}{c^2}\left(z - \frac{c^2z'}{c^2-b^2}\right)^2.$$

Or si, par un certain point de la synfocale XZ, on mène un plan perpendiculaire à l'axe des z et que l'on considère le foyer F_2 conjugué à la section correspondante $\mathcal{C}\mathcal{C}'$, on aura, pour tous les points de cette section,

$$z = Z = \frac{c^2z'}{c^2-b^2},$$

et par conséquent, pour tous ces points, la valeur de r devient

$$r = \pm\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\left(x - \frac{a^2x'}{a^2-b^2}\right),$$

avec toujours $x < X$, ou $x < \frac{a^2x'}{a^2-b^2}$.

On aura donc en valeur absolue

$$r_1 = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\left(\frac{a^2x'}{a^2-b^2} - x\right).$$

pour la distance d'un certain point M quelconque de la section $\mathcal{C}\mathcal{C}'$ au foyer conjugué F_2; et si l'on désigne par d_1 la distance du même point M à l'axe directeur correspondant D_2, on aura

$$d_1 = X - x = \frac{a^2x'}{a^2-b^2} - x,$$

et partant,

$$\frac{r}{d_1} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

Soient r et r' les distances d'un même point M quelconque de la section $\mathcal{C}\mathcal{C}'$ aux deux foyers conjugués F_2, F'_2; on aura, en valeur absolue,

$$r = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\left(\frac{a^2x'}{a^2-b^2} - x\right), \quad \text{et} \quad r' = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\left(\frac{a^2x'}{a^2-b} + x\right),$$

d'où

$$r + r' = \frac{2ax'}{\sqrt{a^2-b^2}},$$

valeur constante pour tous les points de la même section $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$ et variant d'une section à l'autre proportionnellement à la distance $2x'$ des deux foyers conjugués.

22. Si l'on fait les mêmes changements dans les formules du nº **17**, on verra exactement de la même manière que la normale à la surface au point M et chacun des deux rayons vecteurs MF_2 et MF'_2 sont situés dans un même plan perpendiculaire au plan des yz, et que la première de ces droites divise en deux parties égales l'angle des deux autres.

23. Revenons à la valeur générale de r^2 du nº **21**, et observons que, si l'on fait

$$x = \frac{a^2x'}{a^2 - b^2},$$

on obtient une valeur réelle, fonction de la seule variable z.

Je mène donc, par un certain point D_3 de la synfocale, un plan perpendiculaire à l'axe des x, lequel coupe la surface suivant la section $\gamma\gamma'$ et j'ai, pour tous les points de cette section,

$$x = X = \frac{a^2x'}{a^2 - b^2},$$

et par conséquent la valeur correspondante de r devient

$$r = \pm \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{c}\left(z - \frac{c^2z'}{c^2 - b^2}\right),$$

avec toujours visiblement $z < Z$, ou $z < \frac{c^2z'}{c^2 - b^2}$.

On aura donc, en valeur absolue,

$$r_1 = \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{c}\left(\frac{c^2z'}{c^2 - b^2} - z\right),$$

pour la distance d'un certain point M quelconque de la section $\gamma\gamma'$ au foyer conjugué F_3. En opérant, du reste, comme on vient de faire, on trouvera pour la valeur constante du rapport de r_2 à d_2

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{c},$$

et pour la somme des rayons vecteurs menés d'un même point M quelconque de la section $\gamma\gamma'$ aux deux foyers conjugués F_3, F'_3,

$$r + r' = \frac{2cz'}{\sqrt{c^2 - b^2}},$$

valeur constante pour tous les points d'une même section et variant d'une section à l'autre proportionnellement à la distance $2z'$ des foyers conjugués.

24. Pour obtenir l'angle de la normale MN à la surface au point M, avec le rayon vecteur MF_3, prenons les projections de ces deux droites sur le plan des xy et sur celui des yz, lesquelles sont :

Pour la normale MN. . . . .
$$\begin{cases} x - x_{,} = \dfrac{b^2 x_{,}}{a^2 y_{,}}\,(y - y_{,}), \\ z \;-\; z_{,} = \dfrac{b^2 z_{,}}{c^2 y_{,}}\,(y - y_{,}), \end{cases}$$

et pour le rayon vecteur MF_3. . . . . .
$$\begin{cases} x - x_{,} = \dfrac{b^2 x_{,}}{a^2 y_{,}}\,(y - y_{,}), \\ z \;-\; z_{,} = \dfrac{z_{,} - z'}{y_{,}}\,(y - y_{,}); \end{cases}$$

en observant que l'on a

$$x_{,} = \frac{a^2 x'}{a^2 - b^2}, \quad y' = 0, \quad \text{et} \quad \frac{z'^2}{c^2 - b^2} + \frac{x'^2}{a^2 - b^2} = 1,$$

pour le point F_3, d'où résulte

$$x_{,} - x' = \frac{b^2 x_{,}}{a^2}.$$

On voit d'abord que la normale MN et le rayon vecteur MF_3 sont situés dans un même plan perpendiculaire au plan des xy.

Les équations du deuxième rayon vecteur MF'_3 ne diffèrent de celles de MF_3 que par le signe de z', et par conséquent le plan mené par la normale et par MF_3 contient aussi MF'_3.

De plus, si l'on calcule exactement, comme au n° **17**, la tangente de l'angle que fait la normale avec le rayon vecteur MF_3, on trouve une valeur qui, changée simplement de signe, devient la tangente de l'angle de la normale avec le rayon vecteur MF'_3, et par conséquent encore, la normale MN divise en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs MF_3, MF'_3. Donc généralement :

Si l'on coupe un ellipsoïde par un plan perpendiculaire soit au grand axe, soit à l'axe moyen, il y a, pour chacune de ces sections, deux foyers conjugués appartenant à la focale située dans le plan du plus grand et du moyen axes; et 1° la somme des rayons vecteurs menés d'un même point quelconque de chacune de ces sections aux deux foyers conjugués, est constante; 2° la normale à la surface en ce point de la section est dans le plan des mêmes rayons vecteurs et divise en deux parties égales l'angle de ces deux droites.

De là résulte un moyen fort simple de mener un plan tangent à un ellipsoïde par un point M donné sur la surface. Comme on connaît les deux coordonnées OP et OQ de ce point, on déterminera facilement celles OP′ et OQ′ des foyers conjugués aux deux sections perpendiculaires $\beta\beta'$ et $\gamma\gamma'$ passant par M; puis, menant par le point P′ une parallèle à OZ et par Q′ une parallèle à OX, le point N où se coupent ces deux droites appartient à la normale menée par M. On construira donc la droite MN, et un plan perpendiculaire à cette droite au point N sera le plan tangent cherché.

25. Enfin, si l'on voulait obtenir la focale sur le plan des yz, c'est-à-dire sur le plan des deux plus petits axes de l'ellipsoïde, il n'y aurait qu'à changer x' en z' avec a en c et c en a dans l'équation (F) du n° **12**. On obtient ainsi l'équation

$$(F_2) \qquad \frac{y'^2}{a^2-b^2} + \frac{z'^2}{a^2-c^2} = -1,$$

laquelle représente toujours une courbe imaginaire. Ainsi, *dans le plan des deux plus petits axes de l'ellipsoïde, il n'y a pas de focale, ni par conséquent de synfocale.*

26. On trouvera des résultats parfaitement analogues pour *l'hyperboloïde à une nappe* en appliquant de la même manière les formules générales du premier paragraphe à l'équation de cette surface

$$(H) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ou plus simplement encore en changeant le signe de c^2 dans toutes les formules relatives à l'ellipsoïde.

On voit ainsi que, dans le plan des xy, c'est-à-dire dans le plan des deux axes réels de la surface, LA FOCALE *est une ellipse qui a pour sommets les foyers des deux hyperboles principales et pour foyers ceux de l'ellipse de gorge ;* LA SYNFOCALE *est une autre ellipse qui a pour sommets les pieds des directrices des deux hyperboles principales,* etc., etc.

Dans le plan des xz, c'est-à-dire du plus grand axe réel et de l'axe imaginaire, on reconnaît que LA FOCALE *est une hyperbole qui a pour sommets les foyers de l'ellipse de gorge, et pour foyers ceux de l'hyperbole principale situés dans le même plan des* xz, LA SYNFOCALE *est une autre hyperbole, qui a pour sommets les pieds des directrices de l'ellipse de gorge, et pour asymptotes deux droites formant, avec chacune des asymptotes de la focale, un système de diamètres conjugués de l'hyperbole principale situés dans le plan des* xz.

Les plans directeurs sont toujours imaginaires pour cette surface.

Enfin il n'y a ni focale ni synfocale dans le plan des yz, c'est-à-dire dans le plan du plus petit axe réel et de l'axe imaginaire.

On démontre aussi, exactement comme pour l'ellipsoïde, qu'*il existe, pour chaque section de la surface par un plan perpendiculaire à l'un des axes,* pourvu *que ce plan rencontre une des deux synfocales, deux points d'une focale, ou* FOYERS CONJUGUÉS, *tels que les deux rayons vecteurs, menés d'un point quelconque de la section à ces deux foyers, donnent une somme ou une différence constante, suivant que la section est une ellipse ou une hyperbole, et que la normale à la surface au même point de la section est toujours située dans le plan de ces deux rayons vecteurs, et divise en parties égales l'angle de ces droites.*

27. Pour l'hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

il n'y a qu'à changer de signe b^2 et c^2 dans la différence, résultats obtenus pour l'ellipsoïde.

On trouve ainsi que *la focale et la synfocale sont des ellipses sur le plan des* xy, *c'est-à-dire de l'axe réel et du plus petit des axes imaginaires, et des hyperboles dans le plan des* xz, *c'est-à-dire de l'axe réel et du plus grand axe imaginaire.*

Ces deux courbes sont imaginaires dans le plan des deux axes imaginaires.

Quant aux plans directeurs, *ils sont réels pour chaque point de la focale située dans le plan des xy, et imaginaires pour celle qui est située dans le plan des xz.*

Enfin, pour chaque section faite par un plan perpendiculaire à l'un des axes, il existe généralement deux foyers conjugués dont les propriétés peuvent s'énoncer comme dans le cas de l'hyperboloïde à une nappe.

28. Si nous appliquons nos formules générales du premier paragraphe au cône, qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

on trouve un point unique pour la focale et la synfocale situées dans le plan des xy.

Mais dans le plan des xz, c'est-à-dire dans le plan qui renferme l'axe du cône et le plus grand axe de la base elliptique, on trouve deux droites pour la focale et deux autres droites pour la synfocale, lesquelles se coupent toutes au sommet du cône et jouissent, en outre, de cette propriété, que chaque droite synfocale forme, avec une des droites focales, un système de diamètres conjugués d'une hyperbole réduite aux deux droites

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Tout plan mené perpendiculairement à l'axe du cône, ou bien au plus grand des axes de la base elliptique, coupe la surface suivant une courbe qui a pour foyers conjugués deux points de la focale, et les rayons vecteurs, menés de ces deux foyers à un point quelconque de la section, jouissent de toutes les propriétés précédemment énoncées pour les autres surfaces.

29. Au lieu de se servir des formules générales du premier paragraphe pour obtenir la focale, la synfocale, etc., d'une surface donnée, on pourrait chercher directement la focale par une marche qui offre quelque analogie avec celle qu'on suit ordinairement pour obtenir les foyers d'une courbe. En effet, nous avons reconnu que chaque point d'une focale jouit de cette propriété, que l'expression du carré de la distance de ce point à un point quelconque de la surface est décomposable en deux facteurs entiers, rationnels et du premier degré en fonction des coordonnées de ce dernier point. D'après cela, étant donnée l'équation d'une certaine surface, celle d'un ellipsoïde par exemple,

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,,$$

cherchons le point ou plutôt le lieu de tous les points qui satisfont à cette condition.

Soient x', y', z' les coordonnées de l'un des points cherchés; on aura

$$(2) \qquad r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

pour la distance de ce point à un point quelconque x, y, z, et pour exprimer que c'est un point de la surface, je substitue dans l'équation (2), à z par exemple, sa valeur tirée de l'équation (1), ce qui donne

$$(3) \quad r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + \left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - z'\right)^2.$$

Or, pour que r soit rationnel, il faut que r^2 le soit, ce qui exige que $z' = 0$, et par conséquent déjà tous les points cherchés seront situés dans le plan des xy.

On aura, d'ailleurs, pour la valeur de r^2,

$$(4) \quad r^2 = x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) - 2xx' - 2yy' + x'^2 + y'^2 - c^2.$$

Or, pour exprimer qu'une quantité de la forme

$$(\mathrm{I}) \qquad Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E$$

est décomposable en deux facteurs entiers et rationnels du premier degré, on a la condition

$$(\mathrm{K}) \qquad AD^2 + BC^2 - 4ABE = 0,$$

laquelle devient ici

$$y'^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)+x'^2\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)-\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)(x'^2+y'^2-c^2)=0;$$

d'où, en réduisant et ordonnant,

$$\frac{y'^2}{c^2-b^2}-\frac{x'^2}{a^2-c^2}=-1,$$

équation de la focale de l'ellipsoïde située dans le plan des xy.

La relation (K) étant satisfaite, le polynôme (I) devient

$$\mathrm{A}\left(x+y\sqrt{\frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}}}+\frac{\mathrm{C}}{2\mathrm{A}}-\frac{\mathrm{D}}{2\sqrt{-\mathrm{AB}}}\right)\left(x-y\sqrt{\frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}}}+\frac{\mathrm{C}}{2\mathrm{A}}+\frac{\mathrm{D}}{2\sqrt{-\mathrm{AB}}}\right),$$

et partant, on a

$$\begin{aligned}r^2=\frac{a^2-c^2}{a^2}&\left[x+y\frac{a}{b}\sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2-c^2}}-\frac{a^2x'}{a^2-c^2}+\frac{y'ab}{\sqrt{(c^2-b^2)(a^2-c^2)}}\right]\\&\times\left[x-y\frac{a}{b}\sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2-c^2}}-\frac{2a^2x'}{a^2-c^2}-\frac{y'ab}{\sqrt{(c^2-b^2)(a^2-c^2)}}\right];\end{aligned}$$

et chacun de ces facteurs égalé à zéro donne l'équation d'un systeme de deux plans directeurs correspondants à chaque point $x'y'$ que l'on considère sur la focale.

En ajoutant et retranchant les équations des deux plans directeurs, on a

$$x=\frac{a^2x'}{a^2-c^2},\quad \text{et}\quad y=-\frac{b^2y'}{c^2-b^2}$$

pour déterminer le pied de l'intersection de ces deux plans.

L'élimination de x' et y' entre ces deux équations et celle de la focale donne la synfocale.

La valeur précédente de r^2 peut aussi s'écrire

$$r^2=\frac{a^2-c^2}{a^2}\left(x-\frac{a^2x'}{a^2-c^2}\right)^2-\frac{c^2-b^2}{b^2}\left(y+\frac{b^2y'}{c^2-b^2}\right)^2,$$

et toutes les propriétés des foyers conjugués et des rayons vecteurs se démontreront exactement, comme on l'a déjà fait aux nos **15** et suivants.

Si, au lieu de substituer dans la valeur de r celle de z tirée de l'équation (1), on avait substitué la valeur de y ou bien celle de x, on aurait obtenu, pour l'équation de la focale sur le plan des zx et sur celui des zy, exactement les équations (F_1) et (F_2), que nous avons trouvées aux nos **19** et **25**.

§ III.

Propriétés des focales, synfocales et plans directeurs dans les surfaces dénuées de centre et particulièrement dans le paraboloïde elliptique.

30. L'équation du paraboloïde elliptique étant supposée (*fig.* 3)

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p'} = 2x,$$

on obtiendra, soit en substituant dans l'équation générale (φ) les valeurs

$$L = 0, \quad M = \frac{1}{p}, \quad N = \frac{1}{p'}, \quad P = -1, \quad R = 0,$$

soit en la calculant directement d'après ce qui vient d'être dit, l'équation de la focale située dans le plan des xy,

$$(G) \qquad y'^2 = (p - p')(2x' - p').$$

Nous supposerons $p > p'$, et alors on voit que la focale du paraboloïde elliptique, située dans le plan de la parabole principale qui a le plus grand paramètre, est une parabole ayant son axe dirigé dans le même sens que celui de la surface et suivant la même droite. Elle a son sommet situé à une distance $\frac{p'}{2}$ de l'origine, et par conséquent au foyer de la parabole principale $z^2 = 2p'x$; quant à son foyer, il coïncide avec celui de la parabole principale $y^2 = 2px$, car il est éloigné de l'origine des axes de $\frac{p-p'}{2} + \frac{p'}{2} = \frac{p}{2}$.

31. On obtient de la même manière, pour la synfocale,

$$(H) \qquad Y^2 = \frac{p}{p-p'}(2X + p'),$$

nouvelle parabole ayant son axe dirigé dans le même sens et suivant la même droite que la focale. Son sommet, distant de l'origine de $-\frac{p'}{2}$, est situé au pied de la directrice de la parabole principale $z^2 = 2p'x$. Si l'on désigne son paramètre par P, on l'obtiendra, et par conséquent son foyer, par la proportion $p - p' : p :: p : \mathrm{P}$.

En considérant un point $x'y'$ de la focale, on a, pour les équations des plans directeurs correspondants,

$$\mathrm{X} \pm \mathrm{Y}\sqrt{\frac{p'-p}{p}} - x' + p' \pm y'\sqrt{\frac{p}{p'-p}} = 0,$$

lesquelles sont imaginaires. Quant à l'axe directeur, il sera déterminé par les deux équations

$$\mathrm{X} = x' - p', \quad \text{et} \quad \mathrm{Y} = \frac{py'}{p-p'},$$

lesquelles expriment aussi les relations entre deux points conjugués de la focale et de la synfocale.

32. La valeur générale de r^2, fournie par l'équation (ρ) du n° **8**, devient ici

$$r^2 = (x - x' + p')^2 + \frac{p-p'}{p}\left(y - \frac{py'}{p-p'}\right)^2.$$

Or, soit pris un point F_2 arbitrairement sur la focale, et soit D_2 le point conjugué de la synfocale; si par ce dernier point on mène un plan perpendiculaire à l'axe OY, on aura, pour tous les points de la section $\alpha\alpha'$ ainsi déterminés,

$$y = \mathrm{Y} = \frac{py'}{p-p'},$$

et partant, la distance du point F_2 à un point quelconque de cette section parabolique sera

$$r = \pm(x - x' + p').$$

D'ailleurs on a évidemment, pour tous les points de cette section,

$$x > \mathrm{X} \quad \text{ou} \quad x > x' + p',$$

et partant, en valeur absolue,

$$r = x + p - x'.$$

Soit d la distance d'un certain point M de la section α à l'axe directeur correspondant, on aura

$$d = x - X = x + p - x', \quad \text{et partant} \quad r = d.$$

Donc généralement *tout point* M *de la parabole* α *est également distant du foyer conjugué* F_2 *et de l'axe directeur correspondant.*

33. Cherchons ensuite l'angle du rayon vecteur MF_2 avec la normale à la surface au point M.

Les équations de cette normale sont

$$(\mathrm{MN}) \quad \left\{ \begin{aligned} x - x_{,} &= -\frac{p'}{z_{,}}(z - z_{,}), \\ y - y_{,} &= \frac{p'y_{,}}{pz_{,}}(z - z_{,}), \end{aligned} \right.$$

avec la relation

$$\frac{y_{,}^2}{p} + \frac{z_{,}^2}{p'} = 2x_{,};$$

les équations de MF_2 seront

$$(\mathrm{MF}_2) \quad \left\{ \begin{aligned} x - x_{,} &= \frac{x_{,} - x'}{z_{,}}(z - z_{,}), \\ y - y_{,} &= \frac{p'y_{,}}{pz_{,}}(z - z_{,}); \end{aligned} \right.$$

car les coordonnées du point F_2 satisfont aux conditions

$$z' = 0, \quad y'^2 = (p - p')(2x' - p'), \quad \text{et} \quad y_{,} = \frac{py}{p-p'},$$

d'où résulte

$$y_{,} - y' = \frac{p'y'}{p-p'} = \frac{p'y_{,}}{p}.$$

On voit d'abord que *la normale* MN *et le rayon vecteur* MF_2 *sont dans un même plan perpendiculaire au plan des* yz.

D'ailleurs V désignant l'angle de ces deux droites, nous avons

$$\operatorname{tang} V = \frac{(\alpha - \alpha')\sqrt{1 + \beta^2}}{\alpha\alpha' + \beta^2 + 1},$$

avec

$$\alpha = -\frac{p'}{z_{,}}, \quad \alpha' = \frac{x_{,} - x'}{z_{,}}, \quad \text{et} \quad \beta = \frac{p'y_{,}}{pz_{,}},$$

ce qui donne

$$\operatorname{tang} V = \frac{(p' + x_{,} - x')\sqrt{p^2 z_{,}^2 + p'^2 y_{,}^2}}{pp'(x_{,} - x') - \frac{p'^2}{p} y_{,}^2 - pz_{,}^2}:$$

puis, remplaçant $z_{,}$ par sa valeur en x', y', et observant que

$$y_{,}^2 = \frac{2p^2\left(x' - \frac{p}{2}\right)}{p - p'},$$

on a enfin

$$\operatorname{tang} V = \frac{\sqrt{p^2 z_{,}^2 + p'^2 y_{,}^2}}{pp'},$$

en supprimant $p' + x_{,} - x'$, facteur commun.

Or cherchons l'angle de la normale MN avec l'axe des x, et pour cela substituons, dans la formule

$$\operatorname{tang}(Nx) = \frac{\sqrt{\beta^2 + 1}}{\alpha},$$

à α et β leurs valeurs, et nous avons

$$\operatorname{tang}(Nx) = -\frac{\sqrt{p^2 z_{,}^2 + p'^2 y_{,}^2}}{pp'} = -\operatorname{tang} V.$$

Donc généralement : *Si par un point* M *quelconque de la section perpendiculaire α on mène un rayon vecteur allant au foyer* F_2 *et une parallèle à l'axe, la normale à la surface au point* M *sera dans le plan de ces deux droites et fera des angles égaux avec chacune d'elles.*

34. Soit mené par le même point D_2 de la synfocale, conjugué au foyer F_2, un plan perpendiculaire à l'axe des x, et admettons que ce plan coupe la surface; la ligne d'intersection sera une ellipse $\mathcal{E}\mathcal{E}'$, et l'on aura pour tous les points de cette courbe,

$$x = \mathrm{X} = x' - p',$$

et par conséquent il viendra pour les valeurs correspondantes de r,

$$r = \pm\sqrt{\frac{p-p'}{p}}\left(y - \frac{py'}{p-p'}\right).$$

On a d'ailleurs, pour tous les points de cette section,

$$y < \mathrm{Y}, \quad \text{ou} \quad y < \frac{py'}{p-p'},$$

et par conséquent, en valeur absolue,

$$r = \sqrt{\frac{p-p'}{p}}\left(\frac{py'}{p-p'} - y\right).$$

Or, soit $d_{,}$ la distance du même point M' de la section $\mathcal{E}\mathcal{E}'$ à l'axe directeur correspondant; on a visiblement

$$d_{,} = \mathrm{Y} - y = \frac{py'}{p-p'} - y,$$

et par conséquent,

$$\frac{d_{,}}{r_{,}} = \sqrt{\frac{p}{p-p'}}.$$

Si l'on désigne par r' la distance du même point M' au deuxième foyer conjugué F'_2, on aura

$$r' = \sqrt{\frac{p-p'}{p}}\left(\frac{py'}{p-p'} + y\right),$$

et par conséquent il vient

$$r + r' = 2y'\sqrt{\frac{p}{p-p'}},$$

ou encore

$$r + r' = 2y' \times \frac{d_{,}}{r_{,}},$$

valeur constante pour tous les points d'une même section et variant d'une section à l'autre, proportionnellement à la distance $2y'$ des foyers conjugués.

55. Cherchons, comme précédemment, l'angle de la normale au point M′ avec le rayon vecteur M′F$_2$. Comme on a, pour le point F$_2$,

$$z' = 0, \quad \text{et} \quad x_{,} = x' - p',$$

les équations de M′F$_2$ sont

$$(\mathrm{M'F_2}) \qquad \left\{ \begin{aligned} x - x_{,} &= -\frac{p'}{z'}(z - z_{,}), \\ y - y_{,} &= \frac{y_{,} - y'}{z_{,}}(z - z_{,}). \end{aligned} \right.$$

Les équations de la normale étant toujours celles du n° **55**, on voit d'abord que la normale au point M′ et le rayon vecteur M′F$_2$ sont dans un même plan perpendiculaire au plan des xz. Comme il en serait de même du rayon vecteur M′F′$_2$, la normale est toujours contenue dans le plan de ces deux rayons vecteurs.

Si l'on calcule, comme précédemment, l'angle V de la normale M′N′ et du rayon vecteur M′F$_2$, on trouvera

$$\operatorname{tang} V = \frac{(p - p')\sqrt{z_{,}^2 + p'^2}}{p'y'};$$

et si l'on désigne par V′ l'angle de la normale M′N′ avec le deuxieme rayon vecteur M′F′$_2$, on aura visiblement

$$\operatorname{tang} V' = -\operatorname{tang} V,$$

et par conséquent, *la normale* M′N′ *divise en deux parties égales l'angle des deux rayons vecteurs* M′F$_2$ *et* M′F′$_2$.

56. Cherchons maintenant (*fig.* 4) les résultats analogues sur le plan des xz, c'est-à-dire sur le plan de la parabole principale qui a le plus petit paramètre, et pour cela, changeons dans les formules précédentes y en z avec p en p' et p' en p. Nous obtenons ainsi pour l'équation de la focale,

$$(\mathrm{G_1}) \qquad z'^2 = -(p - p')(2x' - p),$$

laquelle est une parabole ayant son axe dirigé suivant celui de la parabole principale $z^2 = 2p'x$, mais en sens contraire; elle a d'ailleurs pour sommet le foyer de la parabole principale $y^2 = 2px$ et pour foyer celui de la première, car ce point est distant de l'origine de

$$\frac{p}{2} - \frac{p-p'}{2} = \frac{p'}{2}.$$

La synfocale a pour équation

$$(k_1) \qquad Z^2 = -\frac{p'^2}{p-p'}(2X + p\,,$$

et par conséquent, cette courbe est aussi une parabole ayant son axe dirigé suivant la même ligne et dans le même sens que celui de la focale; elle a d'ailleurs pour sommet le pied de la directrice de la parabole principale $y^2 = 2px$, et pour demi-paramètre $P = \frac{p'^2}{p-p'}$, quantité qui se construit par la proportion

$$p - p' : p' :: p' : P.$$

37. Les plans directeurs ont pour équations

$$X + Z\sqrt{\frac{p-p'}{p}} - x' + p + z'\sqrt{\frac{p}{p-p'}} = 0,$$
$$X - Z\sqrt{\frac{p-p'}{p}} - x' + p - z'\sqrt{\frac{p}{p-p'}} = 0,$$

lesquelles sont toujours réelles, et par conséquent, pour chaque point de la focale $x'z'$ il existe un système de deux plans directeurs.

On a, pour déterminer l'axe directeur ou bien pour exprimer les relations entre les coordonnées de deux points conjugués,

$$X = x' - p, \quad Z = -\frac{z'p}{p-p'},$$

et par conséquent, *pour obtenir les plans directeurs correspondants à un point* F_2 *quelconque de la focale, on construira le point* D_2 *conjugué à* F_2, *puis par ce point on mènera des parallèles aux deux droites* DL, DL', *dont les équations*

$$X = \pm Z\sqrt{\frac{p-p'}{p}} - \frac{p}{2},$$

s'obtiennent en faisant

$$z' = 0, \quad \text{et} \quad x' = \frac{p}{2},$$

dans les précédentes.

58. Nous avons ici, pour la valeur générale du rayon vecteur,

$$r^2 = (x - x' + p)^2 - \frac{p-p'}{p}\left(z + \frac{z'p}{p-p'}\right)^2.$$

Si dans cette valeur on posait $x = x' - p$, toutes les valeurs correspondantes de r seraient imaginaires; et, en effet, aucun plan mené par un point quelconque de la synfocale, perpendiculairement à l'axe Ox, ne peut rencontrer la surface.

Mais par le point D_2 de la synfocale, conjugué au foyer F_2, menons un plan perpendiculaire à l'axe Oz, ce plan coupera le paraboloïde suivant une parabole α, pour chaque point de laquelle on aura

$$z = -\frac{pz'}{p-p'},$$

et partant il vient, pour la distance d'un point quelconque de cette courbe au foyer F_2,

$$r = x - x' + p.$$

Soit d la distance d'un point M quelconque de cette même section à l'axe directeur correspondant; on a

$$d = x - X = x - x' + p. \quad \text{et partant,} \quad r = d.$$

Donc : *Tous les points d'une même section quelconque, faite par un plan perpendiculaire à l'axe* Oz, *sont également distants du foyer conjugué et de l'axe directeur correspondant.*

On démontrera d'ailleurs, en opérant exactement comme au n° **55**, que *la normale à la surface, en un point* M *quelconque de la section* α, *divise en deux parties égales l'angle formé par le rayon vecteur* MF_2 *et une parallèle à l'axe menée par le point* M.

59. Pour obtenir les résultats correspondants dans le paraboloïde hyperbolique

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = 2x,$$

il suffira de changer le signe de p' dans toutes les formules relatives au paraboloïde elliptique, et l'on verra ainsi que, sur le plan des xy, la focale est une parabole qui a pour sommet le foyer de la parabole principale $z^2 = -2p'x$ et pour foyer celui de l'autre parabole principale $y^2 = 2px$; et la synfocale une autre parabole, ayant son axe situé sur la même droite et dirigé dans le même sens que celui de la focale, ayant d'ailleurs pour sommet le pied de la directrice de la parabole $z^2 = -2p'x$, et pour demi-paramètre $P = \frac{p^2}{p+p'}$.

Sur le plan des xz la focale est encore une parabole qui a pour sommet le foyer de la parabole principale $y^2 = 2px$, et pour foyer celui de la deuxième parabole principale $z^2 = -2p'x$; la synfocale est aussi une parabole qui a pour sommet le pied de la directrice de la parabole $y^2 = 2px$, et pour demi-parametre $P = \frac{p'^2}{p+p'}$.

Les plans directeurs sont toujours imaginaires.

On reconnaît enfin que, si par un point quelconque d'une synfocale on mène un plan perpendiculaire à l'un des trois axes des coordonnées qui coupe la surface, il y aura pour cette section un point ou bien deux points de la focale, suivant qu'elle sera une parabole ou une hyperbole, jouissant de toutes les propriétés ordinaires des *foyers conjugués*.

10 Si l'on applique les formules générales du premier paragraphe au cylindre à base elliptique ou hyperbolique

$$\frac{y^2}{b^2} \mp \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ou bien au cylindre à base parabolique

$$z^2 = 2qx,$$

on trouve pour focale, dans le premier cas, deux droites, et dans le second, une seule, parallèles à l'axe du cylindre et passant par les foyers de la base; on trouve pareillement pour synfocales deux droites dans le premier cas et une dans le second, parallèles à l'axe et passant par les pieds des directrices de la base.

Dans l'un comme dans l'autre cas, les plans directeurs sont imaginaires.

Si l'on cherche les propriétés des rayons vecteurs, comme les points conjugués de la focale et de la synfocale sont situés sur une même parallèle à l'axe de la base, on retombe sur les propriétés connues des foyers et des directrices des lignes du deuxième ordre.

41. Concluons de cette discussion une remarque générale: c'est que pour toutes les surfaces du deuxième ordre qui admettent une *génératrice rectiligne*, tous les systèmes de plans directeurs sont constamment imaginaires, tandis que pour chacune des trois surfaces non susceptibles d'être engendrées par une ligne droite, *l'ellipsoïde, l'hyperboloïde à deux nappes, et le paraboloïde elliptique*, il existe pour chacun des points d'une seule focale un système de deux plans directeurs toujours réels.

§ IV.

Application de la théorie des focales à la discussion d'une surface du deuxième ordre donnée par son équation.

42. Soit l'équation générale du deuxième degré entre trois variables,

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{array}{r} \mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'xz + 2\mathrm{B}''xy \\ + 2\mathrm{C}x + 2\mathrm{C}'y + 2\mathrm{C}''z + \mathrm{D} \end{array}\right\} = 0.$$

Cherchons si, sous cette forme, la surface représentée par cette équation admet une ou plusieurs focales. Or l'équation (3) du nº 4 représente toutes les surfaces qui admettent des foyers; cherchons donc si l'on peut déterminer un ou plusieurs systèmes de valeurs des quantités h, m, m', n, n', p, p', x', y' et z', qui rendent l'équation (3) identique avec l'équation donnée (A). Pour cela, multiplions l'équation (3) par un facteur indéterminé s, puis identifions avec (A), nous aurons les relations :

$$(a) \qquad s(1-h) = \mathrm{A}, \quad s(1-hmm') = \mathrm{A}', \quad s(1-hnn') = \mathrm{A}'';$$

$$(b) \qquad \left\{ \begin{aligned} & sh(mn'+m'n) = -2\mathrm{B}, \quad sh(n+n') = -2\mathrm{B}', \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad sh(m+m') = -2\mathrm{B}''; \end{aligned} \right.$$

$$(c) \qquad \left\{ \begin{aligned} & s[2x'+h(p+p')] = -2\mathrm{C}, \quad s[2y'+h(mp'+m'p)] = -2\mathrm{C}'. \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad s[2z'+h(np'+p'n)] = -2\mathrm{C}''; \end{aligned} \right.$$

$$(d) \qquad s(x'^2+y'^2+z'^2-hpp') = \mathrm{D}.$$

43. Nous avons ainsi *dix* équations entre onze indéterminées. Les six premières donneront généralement les valeurs des six inconnues s, h, m, m', n et n'; celles-ci étant substituées dans les quatre dernières, on pourra déduire de deux des équations (c) la valeur de p et p', lesquelles étant substituées dans la troisième équation (c), donneront une équation du premier degré en x', y', z', laquelle sera celle d'un *plan focal*.

Or on tire de la première des équations (a),

$$sh = s - \mathrm{A},$$

et en substituant cette valeur dans les deux autres équations (a), ainsi que dans les équations (b), on a

$$(e) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \qquad mm' = \frac{s-\mathrm{A}'}{s-\mathrm{A}}, \qquad\qquad nn' = \frac{s-\mathrm{A}''}{s-\mathrm{A}}, \\ & m+m' = -\frac{2\mathrm{B}''}{s-\mathrm{A}}, \quad n+n' = -\frac{2\mathrm{B}'}{s-\mathrm{A}}, \quad mn'+m'n = -\frac{2\mathrm{B}}{s-\mathrm{A}}; \end{aligned} \right.$$

et il s'agit d'éliminer m, m', n et n' entre ces cinq équations. On y peut arriver de plusieurs manières : d'abord j'observe que si l'on a deux équations du deuxième degré de la forme

$$(f) \qquad y^2 - \mathrm{H}y + \mathrm{K} = 0, \quad \text{et} \quad z^2 - \mathrm{H}'z + \mathrm{K}' = 0,$$

on peut former une équation en (t) dont les racines soient les sommes des produits 2 à 2 des racines de ces deux équations. Soit posé

$$t = y'z'' + z'y'',$$

on aura

$$(T) \qquad t^2 - HH't + KH'^2 + K'H^2 - 4KK' = 0.$$

Je pose donc

$$H = m + m' = -\frac{2B''}{s-A}, \quad H' = n + n' = -\frac{2B'}{s-A},$$

$$K = mm' = \frac{s-A'}{s-A}, \qquad K' = nn' = \frac{s-A''}{s-A},$$

et j'ai

$$t = mn' + m'n = -\frac{2B}{s-A},$$

valeurs qui, étant substituées dans l'équation (T), nous donnent

$$\frac{4B^2}{(s-A)^2} + \frac{8BB'B''}{(s-A)^3} + \frac{4B'^2(s-A')}{(s-A)^3} + \frac{4B''^2(s-A'')}{(s-A)^3} - \frac{4(s-A')(s-A'')}{(s-A)^2} = 0,$$

d'où l'on déduit

$$(s) \quad \left\{ \begin{array}{l} s^3 - (A + A' + A'')s^2 + (AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2)s \\ \qquad\qquad - (AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2) \end{array} \right\} = 0,$$

équation connue. M. Cauchy a prouvé directement qu'elle a toujours ses trois racines réelles; or il peut y en avoir une, ou même deux égales à zéro, mais elles ne le sont jamais toutes les trois ensemble, car si l'on avait en même temps

$$A + A' + A'' = 0, \quad \text{et} \quad AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2 = 0,$$

on en déduirait

$$A^2 + A'^2 + A''^2 + 2B^2 + 2B'^2 + 2B''^2 = 0,$$

d'où

$$A = 0, \quad A' = 0, \quad A'' = 0, \quad B = 0, \quad B' = 0, \quad B'' = 0,$$

et partant l'équation proposée cesserait d'être du deuxième degré.

Mais pour effectuer autrement l'élimination de m, m',... entre les équations (e), j'observe que ces équations donnent les sommes des quantités m et m', n et n', mn' et $m'n$ en fonction de s, et qu'il est aisé d'en déduire les valeurs des différences des mêmes quantités. Or, *étant* *données les trois fractions*

$$\frac{m}{m'},\quad \frac{n}{n'},\quad \text{et}\quad \frac{mn'}{m'n},$$

si l'on forme les trois suivantes

$$\frac{m+m'}{m-m'},\quad \frac{n+n'}{n-n'},\quad \frac{mn'+m'n}{mn'-m'n},$$

le produit de la première par la somme des deux autres, diminué du produit des deux dernières, est toujours égal à l'unité [*]. On a donc

$$\frac{m+m'}{m-m'}\left(\frac{n+n'}{n-n'}+\frac{mn'+m'n}{mn'-m'n}\right)-\frac{n+n'}{n-n'}\times\frac{mn'+m'n}{mn'-m'n}=1.$$

ou bien

$$(v)\quad \frac{(m+m')(n+n')}{(m-m')(n-n')}+\frac{(m+m')(mn'+m'n)}{(m-m')(mn'-m'n)}+\frac{(n+n')(mn'+m'n)}{(n'-n)(mn'-m'n)}=1.$$

Or on déduit des équations (e) :

$$\begin{aligned}
(m+m')(n+n') &= \frac{4B'B''}{(s-A)^2},\\
(m+m')(mn'+m'n) &= \frac{4BB''}{(s-A)^2},\\
(n+n')(mn'+m'n) &= \frac{4BB'}{(s-A)^2},\\
(m-m')(n-n') &= (m+m')(n+n')-2(mn'+m'n)\\
&= \frac{4[B'B''+B(s-A)]}{(s-A)^2},\\
(mn'-m'n)(m-m') &= (mn'+m'n)(m+m')-2mm'(n+n')\\
&= \frac{4[BB''+B'(s-A')]}{(s-A)^2},\\
(mn'-m'n)(n'-n) &= (mn'+m'n)(n+n')-2nn'(m+m')\\
&= \frac{4[BB'+B''(s-A'')]}{(s-A)^2};
\end{aligned}$$

---

[*] Ce théorème, donné ici sans démonstration, a été généralisé et démontré par M. Cauchy. (*Voir* le Rapport de M. Cauchy, Note VII^{e}.)

et si l'on substitue toutes ces valeurs dans l'équation (v), on a enfin

$$(s_1) \qquad \frac{B'B''}{B'B'' + B(s - A)} + \frac{BB''}{BB'' + B'(s - A)} + \frac{BB'}{BB' + B''(s - A)} = 1,$$

équation qui n'est autre que l'équation (s); mais on l'obtient ainsi immédiatement sous la forme remarquable que lui a donnée M. Jacobi, et qui met en évidence la réalité de ses trois racines.

44. Supposons donc que l'on ait déduit de l'équation (s) une racine reelle et différente de zéro, $s = s_1$; on aura d'abord

$$h_1 = \frac{s_1 - A}{s_1},$$

puis on déduira les valeurs correspondantes de m, m', n et n' des quatre premières équations (e), et l'on aura visiblement pour chaque valeur de s un système unique de valeurs de h, m, m', n et n'.

Or, pour un quelconque de ces systèmes. les deux dernières équations (c) donneront

$$p = \frac{2(ny_1 - mz_1)}{h(mn' - nm')}, \quad \text{et} \quad p' = \frac{2(m'z_1 - n'y_1)}{h(mn' - nm')},$$

en posant, pour abréger,

$$y_{,} = y' + \frac{C'}{s}, \quad \text{et} \quad z_{,} = z' + \frac{C''}{s}.$$

Posant pareillement

$$x_{,} = x' + \frac{C}{s},$$

et substituant ces valeurs dans la première équation (c), on a

$$x_{,}(mn' - m'n) + y_{,}(n - n') + z_{,}(m' - m) = 0,$$

ou bien

$$\frac{x' + \frac{C}{s}}{(m - m')(n - n')} + \frac{y' + \frac{C'}{s}}{(mn' - m'n)(m - m')} + \frac{z' + \frac{C''}{s}}{(mn' - m'n)(n' - n)} = 0,$$

ou enfin, d'après les relations du numéro précédent,

$$(g)\qquad \frac{x' + \frac{C}{s}}{B'B'' + B(s - A)} + \frac{y' + \frac{C'}{s}}{BB'' + B'(s - A')} + \frac{z' + \frac{C'}{s}}{BB' + B''(s - A'')} = 0.$$

Cette équation, pour chaque valeur de s réelle et différente de zéro, représente un *plan focal*, et l'on voit immédiatement que *tout plan représenté par l'équation générale* (g) *est un plan diamétral principal de la surface*. Car, soit pris ce plan pour l'un des plans coordonnés, par exemple pour plan des xy, il faudra que l'on ait $z' = 0$, quels que soient x' et y', ce qui exige que

$$C'' = 0, \quad B = 0, \quad \text{et} \quad B' = 0.$$

45. Supposons que l'on ait déterminé une des trois valeurs de s, en fonction des coefficients A, A',..., B''; l'équation (3) du n° **4**, multipliée par cette valeur, sera identique avec l'équation (A) du n° **42**, et ces deux équations resteront identiques, quel que soit le systeme d'axes de coordonnées auquel on les rapporte simultanément. Or les axes de coordonnées, pour lesquels l'équation (A) prend la forme

$$(L)\qquad Lx^2 + My^2 + Nz^2 + 2Px + 2P'y + 2P''z + D = 0,$$

donnent nécessairement

$$n = 0, \quad n' = 0, \quad m' = -m,$$

et par conséquent, l'équation (3) étant supposée rapportée au meme système d'axes, on aura, pour les équations de condition (a),

$$s(1 - h) = L, \quad s(1 + hm^2) = M, \quad s = N.$$

Donc le coefficient N est précisément l'une des trois racines de l'équation (s). A cause de la symétrie de l'équation (L), on a visiblement

$$L = s_1, \quad M = s_2, \quad N = s_3.$$

Donc généralement : *Étant donnée une équation quelconque du deuxième degré entre trois variables, si l'on forme l'équation* (s), *les trois racines de cette équation* s_1, s_2, s_3 *expriment les valeurs des* *coefficients des carrés des variables que l'on obtiendrait, en changeant la direction des axes, par les formules de la transformation des coordonnées, de manière que l'équation de la surface proposée fût débarrassée des rectangles des variables.*

Il résulte de là que si l'équation (s) a une ou bien deux racines égales à zéro, l'équation de la surface ramenée à la forme L ne contiendra que deux ou bien un seul des carrés des variables.

46. D'après cela, étant donnée une équation quelconque du deuxième degré entre trois variables, pour reconnaître quelle surface elle représente et déterminer complétement cette surface, nous commencerons par former l'équation (s) et nous distinguerons trois cas, suivant que l'on aura

1°. *Les trois valeurs de s différentes de zéro;*

2°. *Une seule des valeurs de s égale à zéro;*

3°. *Deux des valeurs de s égales à zéro.*

Dans le premier cas, si l'on suppose l'équation ramenée à la forme (L), elle renfermera les trois carrés, et par conséquent la surface sera *un ellipsoïde* qui pourra se réduire à *un point* ou devenir *imaginaire*, *un hyperboloïde à une* ou *à deux nappes*, enfin *un cône.*

Dans le deuxième, soit

$$s_1 = 0,$$

on aura

$$L = 0,$$

et l'équation de la surface pourra être ramenée à la forme

$$My^2 + Nz^2 + 2Px + R = 0,$$

et par conséquent la surface sera *l'un des deux paraboloïdes, un cylindre à base d'ellipse* ou *d'hyperbole*, ou enfin *deux plans qui se coupent.*

Dans le troisième cas, soient

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 0,$$

on aura

$$L = 0, \quad M = 0,$$

et l'équation pourra être ramenée à la forme

$$Nz^2 + 2Px + R = 0,$$

et par conséquent la surface ne pourra être qu'*un cylindre parabolique, un système de deux plans parallèles, ou un plan unique.*

47. Pour distinguer maintenant ces différentes variétés, nous transporterons les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes en un certain point de l'espace $(x_{,}, y_{,}, z_{,})$, et l'équation (A) deviendra

$$(A') \quad \left.\begin{array}{r} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2C_{,}x + 2C'_{,}y + 2C''_{,}z + D_{,} \end{array}\right\} = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned} C_{,} &= Ax_{,} + B''y_{,} + B'z_{,} + C, \\ C'_{,} &= B''x_{,} + A'y_{,} + Bz_{,} + C', \\ C''_{,} &= B'x_{,} + By_{,} + A''z_{,} + C'', \\ D_{,} &= Ax_{,}^2 + A'y_{,}^2 + A''z_{,}^2 + 2By_{,}z_{,} + 2B'x_{,}z_{,} \\ &\quad + 2B''x_{,}y_{,} + 2Cx_{,} + 2C'y_{,} + 2C''z' + D. \end{aligned}$$

Si nous posons les trois équations

$$(C) \qquad C_{,} = 0, \quad C'_{,} = 0, \quad C''_{,} = 0,$$

les valeurs qu'on en déduira pour $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ seront les coordonnées du centre de la surface.

Dans le cas où les trois valeurs de s sont différentes de zéro, les équations (C) donneront pour $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ un système unique de valeurs finies, et réciproquement; car toutes les surfaces de cette première classe sont douées d'un centre unique.

Les coordonnées du centre étant ainsi calculées, on les substituera dans $D_{,}$, et il peut arriver qu'elles donnent $D_{,} = 0$. Alors la surface sera un point unique ou un cône; elle sera un point si les trois valeurs de s sont de même signe, et un cône s'il y en a une de signe contraire aux deux autres.

Dans le cas où les coordonnées du centre rendront $D_{,}$ différent de zéro, l'équation de la surface deviendra

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + D_, = 0;$$

et si l'on donne aux axes de coordonnées une direction convenable,

$$s_1 x^2 + s_2 y^2 + s_3 z^2 + D_, = 0.$$

Par conséquent, en désignant par a, b, c les longueurs des demi-axes, on aura

$$a^2 = -\frac{D_,}{s_1}, \quad b^2 = -\frac{D_,}{s_2}, \quad c^2 = -\frac{D_,}{s_3},$$

et l'on distinguera l'espèce de la surface d'après le nombre des racines de l'équation (s) qui seront de même signe que $D_,$, savoir : aucune, *ellipsoïde;* une seule, *hyperboloïde à une nappe;* deux, *hyperboloïde à deux nappes;* toutes trois, *surface imaginaire.*

Quant à la direction des axes, l'équation (s) étant supposée résolue, on substituera successivement les trois valeurs s_1, s_2, s_3 dans l'équation générale (g), et l'on aura les trois plans diamétraux principaux qui se couperont deux à deux suivant trois droites dont la direction sera celle des axes de la surface.

48. Passons au cas où l'équation (s) a une seule de ses racines égale à zéro.

Si la surface consiste en deux plans qui se coupent, un point quelconque de la ligne d'intersection peut être considéré comme un centre, et par conséquent les coordonnées de l'un quelconque de ces points doivent vérifier à la fois les trois équations (C) et donner, en outre,

$$D_, = 0.$$

Donc, si l'on attribue à l'une des trois inconnues $x_,$, $y_,$, $z_,$ une valeur arbitraire quelconque, on déduira de deux des équations (C) des valeurs finies et déterminées pour les deux autres inconnues, et ces trois valeurs devront vérifier la troisième équation (C) et donner

$$D_, = 0.$$

La ligne d'intersection, ainsi que la direction des deux plans, s'obtiendront en substituant successivement les deux valeurs de s dans l'équation (g), laquelle donnera ainsi les deux plans bissecteurs des angles formés par les plans contenus dans l'équation donnée.

Si la surface est un cylindre à base elliptique ou hyperbolique, un point quelconque de l'axe peut être considéré comme un centre; et par conséquent encore, si l'on attribue à l'une des trois inconnues $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ une valeur arbitraire, on déduira de deux quelconques des équations (C) des valeurs finies et déterminées pour les deux autres, et le système des valeurs de $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ ainsi déterminé vérifiera la troisième équation (C), mais donnera $D_{,}$ différent de zéro.

Ce point étant pris pour origine des coordonnées, l'équation du cylindre pourra se ramener à la forme

$$s_2 y^2 + s_3 z^2 + D_{,} = 0,$$

et par conséquent, on aura pour les valeurs des demi-axes de la base

$$b^2 = -\frac{D_{,}}{s_2}, \quad c^2 = -\frac{D_{,}}{s_3},$$

laquelle sera donc une ellipse, une hyperbole ou une courbe imaginaire, suivant que les deux valeurs de s seront toutes les deux de signe contraire à $D_{,}$, une seule ou toutes les deux de même signe.

Quant à la direction de l'axe du cylindre, elle sera donnée par la combinaison de deux quelconques des équations (C); puis, substituant successivement les deux valeurs de s dans l'équation du plan focal (g), on aura deux plans dont l'intersection sera l'axe *principal* de la base du cylindre.

49. Enfin, si l'équation proposée représente l'un ou l'autre des deux paraboloïdes, il n'existe aucun point que l'on puisse considérer comme un centre, et par conséquent chacune des équations (C) est incompatible avec les deux autres. Réciproquement, on reconnaîtra que la surface est un paraboloïde lorsque, avec une seule valeur de s nulle, on aura une ou plusieurs des valeurs de $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ infinies.

Si l'on suppose la surface rapportée à son axe et à son sommet, l'équation sera de la forme

$$s_2 y^2 + s_3 z^2 + 2Qx = 0;$$

et par conséquent, suivant que s_2 et s_3 seront de même signe ou de signe contraire, le paraboloïde sera elliptique ou hyperbolique.

Pour déterminer la surface, nous avons d'abord l'axe par les deux équations

$$\begin{gathered} Vx' + V'y' + V''z' = T, \\ V_{,}x' + V'_{,}y' + V''_{,}z' = T_{,}, \end{gathered}$$

que nous obtenons en substituant successivement à s les deux valeurs s_2 et s_3 dans l'équation générale (g).

Transportons maintenant les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes en un certain point de l'axe (pris arbitrairement, pourvu que ce ne soit pas le sommet de la surface), et soit

$$\begin{gathered} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2C_{,}x + 2C'_{,}y + 2C''_{,}z + D_{,} = 0 \end{gathered}$$

l'équation de la surface rapportée à ces nouvelles coordonnées.

Or. soient α, β, γ les coordonnées du sommet, ce point étant sur l'axe et ses coordonnées réduisant nécessairement l'équation de la surface au premier degré, on obtiendra celles-ci en résolvant les trois equations

$$(\alpha) \qquad \left\{ \begin{aligned} V\alpha + V'\beta + V''\gamma &= 0, \\ V_{,}\alpha + V'_{,}\beta + V''_{,}\gamma &= 0, \\ 2C_{,}\alpha + 2C'_{,}\beta + 2C''_{,}\gamma &= -D_{,}; \end{aligned} \right.$$

et par conséquent elles seront de la forme

$$\alpha = \frac{D_{,}U}{R}, \quad \beta = \frac{D_{,}U'}{R}, \quad \gamma = \frac{D_{,}U''}{R}.$$

On a donc, en désignant par δ la portion de l'axe comprise entre l'origine des coordonnées et le sommet de la surface,

$$\delta = \frac{D_{,}\sqrt{U^2 + U'^2 + U''^2}}{R}.$$

Supposons ensuite que. sans déplacer l'origine. nous changions la direction des axes de coordonnées de maniere que les x soient comptées sur l'axe de la surface, l'équation de celle-ci deviendra

$$s_2 y^2 + s_3 z^2 + 2Qx + D_, = 0,$$

et par conséquent, si l'on fait

$$y = 0, \quad z = 0,$$

on aura

$$2Q\delta + D_, = 0, \quad \text{d'où} \quad Q = -\frac{D_,}{2\delta} = -\frac{R}{2\sqrt{U^2 + U'^2 + U''^2}}$$

On aura donc pour les valeurs des paramètres de la surface

$$-\frac{2Q}{s_2} = \frac{R}{s_2\sqrt{U^2 + U'^2 + U''^2}}, \quad \text{et} \quad -\frac{2Q}{s_3} = \frac{R}{s_3\sqrt{U^2 + U'^2 + U''^2}},$$

U, U', U″ et R étant des quantités qui se calculeront aisément par le moyen des équations (α).

50. Passons au troisième cas, celui où l'équation générale (s) a deux de ses racines égales à zéro

Si l'équation proposée représente un plan unique, un point quelconque de ce plan peut être considéré comme un centre, et par conséquent les équations (C) doivent se réduire à une seule; et de plus, si l'on donne à deux des inconnues $x_,, y_,, z_,$ des valeurs arbitraires, on déduira de l'équation

$$C_, = 0$$

par exemple, une valeur finie pour l'autre inconnue, et ce système de valeurs rendra

$$D_, = 0.$$

Si l'équation proposée représente un système de deux plans parallèles, on peut considérer comme un centre tout point d'un plan parallèle à ceux-ci et également distant de chacun d'eux. Donc encore, dans ce cas, les trois équations doivent se réduire à une seule, et si l'on attribue à deux des inconnues $x_,, y_,, z_,$ des valeurs arbitraires, on aura pour la troisième une valeur finie et déterminée, mais ce système de valeurs rendra $D_,$ différent de zéro.

Supposons le point ainsi déterminé pris pour origine des coordonnées : l'équation deviendra

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + D_, = 0,$$

et pour une direction convenable des axes de coordonnées, elle prendra la forme

$$s_3 z^2 + D_, = 0, \quad \text{d'où} \quad z = \pm\sqrt{-\frac{D_,}{s_3}},$$

valeur réelle ou imaginaire suivant que $D_,$ et s_3 seront de signe contraire ou de même signe.

51. Enfin, si la surface est un cylindre à base parabolique, il n'existe aucun point que l'on puisse considérer comme un centre, et par conséquent les trois équations (C) sont incompatibles deux à deux, et réciproquement.

Si l'on substitue la valeur de s dans l'équation générale (g), on aura le plan diamétral principal. On pourra transporter l'origine des coordonnées en un point quelconque de ce plan sans changer la direction des axes ; puis, en raisonnant comme on l'a fait pour les paraboloïdes, on obtiendra le paramètre de la base du cylindre.

DÉMONSTRATION

D'UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE;

Par J. BERTRAND,

Élève-Ingénieur des Mines.

On sait qu'une couche homogène, comprise entre deux ellipsoïdes homothétiques infiniment voisins, n'exerce pas d'action sur les points de son intérieur lorsqu'on suppose que chacune des molécules qui la composent attire ces points proportionnellement à sa masse et en raison inverse du carré de la distance. Ce théorème remarquable se démontre d'une manière fort simple au moyen de la propriété dont jouissent les deux ellipsoïdes d'intercepter entre eux des portions égales d'une sécante à l'entrée et à la sortie de cette sécante. La démonstration étant fondée uniquement sur cette propriété s'appliquerait également à toutes les surfaces infiniment voisines qui présenteraient le même caractère. Je me suis proposé de chercher directement quelles sont ces surfaces; j'ai trouvé qu'elles doivent nécessairement avoir pour sections planes des courbes du second degré; ce sont, par conséquent, des surfaces du second ordre, et le seul système de surfaces fermées qui jouisse de la propriété est celui qu'on connaissait déjà, celui de deux ellipsoïdes semblables et semblablement placés.

Pour arriver d'une manière directe à la démonstration de ce théorème, supposons que les deux courbes ABC, A'B'C'(*fig.* 1, *Pl. I* soient les sections faites par un même plan dans les deux surfaces qui jouissent de la propriété énoncée. Ces deux courbes doivent jouir évidemment de la même propriété, en sorte que BC étant une sécante quelconque, on doit avoir

$$Bb = Cc_1.$$

Cette seule propriété va nous permettre de trouver l'équation différentielle de la courbe ABC. Supposons, en effet, que l'on se donne deux points A et B de cette courbe et les deux tangentes BO et AO en ces mêmes points; je dis qu'en prenant au hasard un point C dans le plan, et admettant que la courbe y passe, nous pourrons déterminer quelle sera, en ce point, la direction de la normale, et calculer son inclinaison sur les axes de coordonnées, en fonction des coordonnées du point C; faire cela, c'est évidemment trouver l'équation différentielle de la courbe.

Joignons les deux points A et B entre eux, et joignons-les également au point C, pris arbitrairement sur la courbe extérieure; on aura, d'après la définition de nos deux courbes infiniment voisines,

$$(1)\qquad \mathrm{B}b_1 = \mathrm{A}a,\quad \mathrm{A}a_1 = \mathrm{C}c,\quad \mathrm{C}c_1 = \mathrm{B}b.$$

Soient α, α' les angles formés par la normale AN avec les droites AB et AC;

β, β' les angles formés par la normale BN′ avec les deux droites BC et BA;

γ, γ' les angles formés par la normale C, CN″ avec les droites CA et CB.

On aura évidemment, à cause de la distance infiniment petite des deux courbes qui permet de traiter l'arc bb_1 comme une ligne droite parallèle à BO,

$$\frac{\mathrm{B}b_1}{\mathrm{B}b} = \frac{\cos\beta}{\cos\beta'};\qquad \frac{\mathrm{A}a}{\mathrm{A}a_1} = \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha},$$

d'où l'on conclut, en divisant membre à membre et remarquant que $\mathrm{A}a = \mathrm{B}b_1$,

$$(2)\qquad \frac{\mathrm{A}a_1}{\mathrm{B}b} = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha'\cos\beta'},$$

ou, d'après les équations (1),

$$(3)\qquad \frac{\mathrm{C}c}{\mathrm{C}c_1} = \frac{\cos\alpha'\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta'};$$

mais on a évidemment

$$\frac{\mathrm{C}c}{\mathrm{C}c_1} = \frac{\cos\gamma'}{\cos\gamma};$$

donc

$$(4)\qquad \frac{\cos\gamma'}{\cos\gamma} = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha'\cos\beta'}\ [*].$$

Cette dernière équation, convenablement transformée, sera l'équation différentielle de la courbe cherchée; remarquons, en effet, que le second membre ne renfermant que les angles α, α', β et β', est une fonction des coordonnées du point C : quant au premier membre, il renferme les angles γ, γ' formés par la normale à la courbe avec les droites AC et BC; on peut donc l'exprimer au moyen des coordonnées du point C, et de la direction de la normale en ce point, c'est-à-dire en fonction de x, y et $\frac{dy}{dx}$.

Prenons pour axe des x la droite AO, et pour axe des y la droite BO. Faisons AO $= a$, BO $= b$, et désignons par x', y' les coordonnées du

---

[*] L'équation (4) peut s'écrire de la manière suivante,

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \cos\alpha'\cos\beta'\cos\gamma';$$

sous cette forme elle nous apprend que dans toute courbe satisfaisant à la question, et par conséquent dans toute section conique, si par les trois sommets d'un triangle inscrit on mène des normales à la courbe, de manière à diviser chacun des angles du triangle en deux parties $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, le produit des cosinus de trois de ces angles pris de deux en deux est égal au produit des trois autres cosinus. Cette propriété des sections coniques n'est, du reste, qu'un corollaire très-facile du théorème relatif au triangle circonscrit, savoir que les trois droites menées des sommets du triangle aux points de contact opposés se coupent toujours en un même point.

Au surplus l'équation (4) une fois obtenue, on pourrait, à la rigueur, compléter en peu de mots la démonstration qui fait l'objet de cette Note. Il suffirait d'observer que la propriété renfermée dans l'équation (4) est évidemment caractéristique des sections coniques; cette équation permet, en effet, connaissant deux tangentes, leurs points de contact et un troisième point appartenant à la courbe, de trouver la tangente en ce troisième point, et par suite la position du point infiniment voisin : on comprend, d'après cela, que la courbe est complétement déterminée par un point, deux tangentes et leurs points de contact, et sachant d'ailleurs que toutes les sections coniques satisfont, on en conclut qu'elles satisfont seules.

point C; les équations des quatre lignes AB, AC, BC, CN″ seront

$$(AB)\qquad y = -\frac{b}{a}x + b,$$

$$(AC)\qquad y - y' = \frac{y'}{x'-a}(x - x'),$$

$$(BC)\qquad y - y' = \frac{y'-b}{x'}(x - x'),$$

$$(CN'')\qquad y - y' = -\frac{dx'}{dy'}(x - x');$$

et si, pour plus de simplicité, on suppose que les points arbitraires A et B aient été choisis de manière que les tangentes AO et BO soient perpendiculaires, on aura, d'après les formules connues.

$$\cos\gamma = \pm\frac{(x'-a)\,dy' - y'\,dx'}{\sqrt{[y'^2+(x'-a)^2]\,dx'^2+dy'^2}},$$

$$\cos\gamma' = \pm\frac{(y'-b)\,dx' - x'\,dy'}{\sqrt{[x'^2+(y'-b)^2]dx'^2+dy'^2}},$$

$$\cos\alpha' = \pm\frac{y'}{\sqrt{y'^2+(x'-a)^2}},\quad \cos\alpha = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\cos\beta' = \pm\frac{x'}{\sqrt{x'^2+(y'-b)^2}},\quad \cos\beta = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

En substituant ces diverses valeurs dans l'équation (4), il vient

$$(5)\qquad \frac{(x'-a)\,dy' - y'\,dx}{(y'-b)\,dx' - x'dy'} = \pm\frac{ay'}{bx'},$$

en sorte que la courbe cherchée doit satisfaire à l'une ou l'autre des équations différentielles

$$(6)\qquad \frac{(x'-a)\,dy' - y'dx'}{(y'-b)\,dx' - x'\,dy'} = \frac{ay'}{bx'},$$

$$(7)\qquad \frac{(x'-a)\,dy' - y'dx'}{(y'-b)\,dx' - x'dy'} = -\frac{ay'}{bx'}:$$

la première devient, lorsqu'on chasse le dénominateur,

$$(8)\qquad x'(ay' + bx' - ab)\,dy' - y'(ay' + bx' - ab)\,dx' = 0;$$

elle se décompose dans les deux suivantes,

$$ay' + bx' - ab = 0, \tag{9}$$

et

$$x'dy' = y'dx', \tag{10}$$

dont l'intégrale est

$$y' = cx'. \tag{11}$$

Ces deux solutions sont évidemment étrangères à la question, et les seules courbes qui puissent satisfaire s'obtiendront en intégrant l'équation (7).

Si l'on chasse les dénominateurs, cette équation devient

$$x'(ay' - bx' + ab)\,dy' - y'(ay' - bx' - ab)\,dx' = 0, \tag{12}$$

ou

$$(ay' - bx')(x'dy' - y'dx) + ab(x'dy' + y'dx') = 0; \tag{13}$$

pour l'intégrer, posons

$$x'y' = u, \quad \frac{y'}{x'} = v; \tag{14}$$

il viendra

$$x'dy' + y'dx' = du, \tag{15}$$

$$x'dy' - y'dx' = x'^2\,dv = \frac{udv}{v}. \tag{16}$$

L'équation (13) devient ainsi

$$\frac{abdu}{u\sqrt{u}} + \frac{adv}{\sqrt{v}} - \frac{bdv}{v\sqrt{v}} = 0, \tag{17}$$

et en intégrant,

$$\frac{ab}{\sqrt{u}} - a\sqrt{v} - \frac{b}{\sqrt{v}} = C, \tag{18}$$

ou, chassant les dénominateurs et remplaçant u et v par leurs valeurs tirées des équations (14),

$$(ay + bx - ab)^2 = C^2xy.$$

Cette équation représente toutes les courbes du second degré qui touchent les axes des coordonnées aux points A et B. Ces courbes n'ont évidemment pas d'autre enveloppe que ces axes mêmes qui fournissent ainsi la solution singulière. Il résulte de là *que deux courbes infiniment voisines qui jouissent de la propriété d'intercepter entre elles des portions égales sur une sécante quelconque à l'entrée et à la sortie de cette sécante, sont nécessairement des courbes du second degré.*

Ce théorème, tel que nous le donnons ici, ne serait qu'un cas particulier d'un autre théorème plus général qui a été énoncé par M. Olivier (tome III de ce Journal, page 156). Le théorème de M. Olivier est relatif à deux courbes quelconques auxquelles il n'impose pas la condition d'être infiniment voisines; il consiste en ce que deux courbes sont nécessairement des sections coniques, si l'on sait

1°. Que toute sécante passant par un point fixe a ses parties interceptées entre les deux courbes égales entre elles;

2°. Que toute sécante parallèle à une droite fixe a également ses parties interceptées égales.

Mais en lisant attentivement la démonstration de l'auteur, on s'apercevra sans peine qu'elle n'est pas suffisante. Je me contenterai ici de prouver par un exemple que le théorème ne serait pas exact si on lui donnait le degré de généralité supposé par M. Olivier.

Soient, en effet (*fig.* 2), deux axes rectangulaires OX et OY, et MBPO une courbe quelconque symétrique par rapport à ces deux axes; construisons une autre courbe M'B'P'Q', semblable à la première, en prenant le point O pour centre de similitude; il est clair que les deux courbes MBPQ, M'B'P'Q' jouiront des deux propriétés nécessaires pour qu'on puisse leur appliquer le théorème de M. Olivier.

Car, 1° toute sécante, telle que OB', passant par le point O, aura ses parties interceptées BB' et AA' égales entre elles;

2°. Toute sécante, telle que PQ, parallèle à l'axe des y, aura ses parties interceptées PP' et QQ' égales entre elles.

Cependant, d'apres la manière dont les deux courbes ont été construites, il n'est évidemment pas nécessaire qu'elles soient des sections coniques.

THÉORÈMES SUR LES SURFACES DU SECOND DEGRÉ;

Par M. CHASLES.

Si par les différents points d'une section plane quelconque d'une surface du second degré, on mène les normales à la surface, leurs pieds sur chacun des plans principaux de la surface seront situés sur une section conique.

Le cône circonscrit à la surface suivant la section plane rencontrera le plan principal suivant une autre conique; et si l'on conçoit la focale de la surface comprise dans ce plan, la première conique, lieu des pieds des normales, sera la polaire de cette seconde conique par rapport à la focale.

Démonstration. J'ai appelé *focales* ou *coniques excentriques* d'une surface du second degré deux certaines courbes, ellipse et hyperbole, situées dans les deux plans principaux qui contiennent l'axe majeur de la surface. Une troisième courbe, qui a la même expression analytique dans le troisième plan principal, est imaginaire. (*Aperçu historique*, page 385).

La considération de ces courbes donne lieu à de nombreuses propriétés des surfaces du second degré, analogues aux propriétés des foyers dans les sections coniques.

Une de ces propriétés, qui va nous servir ici pour démontrer le théorème énoncé, consiste en ce que, si par un point de la surface, on mène la normale et le plan tangent, lesquels rencontreront un plan principal en un point et suivant une droite, ce point sera le pôle de la droite, par rapport à la *focale* comprise dans le plan principal. (*Aperçu historique*, page 384.)

D'après cela, si la droite enveloppe une section conique, le point sera lui-même sur une section conique. Or cela aura lieu si le point de la surface par lequel on a mené le plan tangent et la normale parcourt une section plane ; car le plan tangent enveloppera le cône circonscrit à la surface suivant cette courbe ; et sa trace sur le plan principal enveloppera une conique.

Les deux parties du théorème sont donc démontrées.

Corollaires. 1° Si le plan de la courbe tracée sur la surface est perpendiculaire au plan principal, le cône ciconscrit à la surface suivant cette courbe aura son sommet dans ce plan, et les pieds des normales seront sur la polaire de ce point. Donc :

Si par les différents points d'une section faite dans une surface du second degré par un plan perpendiculaire à un plan principal, on mène les normales à la surface, leurs pieds sur le plan principal seront situés sur une droite.

Et cette droite sera, par rapport à la focale de la surface, la polaire du sommet du cône circonscrit suivant la section plane.

2°. Par une section plane d'un cône du second degré on peut faire passer une infinité de surfaces du second degré inscrites dans le cône ; leurs centres sont sur la droite menée par le sommet du cône et par le centre de la section. Si l'on conçoit les normales au cône, menées par les différents points de la section, leurs pieds sur un plan principal de l'une quelconque de ces surfaces seront sur une courbe du second degré. Donc :

Si par les différents points d'une section plane d'un cône du second degré on mène les normales au cône, ces droites formeront une surface gauche sur laquelle on pourra tracer une infinité de sections coniques.

On peut considérer tous les points situés à l'infini comme appartenant à un même plan ; ce plan coupe aussi la surface suivant une section conique ; c'est-à-dire que, *si par un point fixe on mène des parallèles aux génératrices de la surface, ces droites formeront un cône du second degré.* Cela résulte de ce que les génératrices de la surface sont normales aux plans tangents à un cône du second degré.

Je ne sais si l'on avait déjà rencontré une surface gauche, ou même une surface quelconque d'un ordre supérieur, c'est-à-dire différente des surfaces du second degré, sur laquelle on pût ainsi tracer, d'une infinité de manières, des sections coniques.

DU DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES EN PRODUITS DE FACTEURS BINOMES;

Par M. Olinde **RODRIGUES**.

1. On sait que pour des valeurs impaires de m et pour un arc quelconque x, on a

$$\sin mx = m \sin x \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{2\pi}{2m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{4\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{(m-1)\pi}{2m}}\right).$$

Si dans cette relation on remplace m par $2n+1$, et qu'on pose

$$\pi = ma, \quad mx = \pi y, \quad Y_n = \frac{\sin \pi y}{\pi y (1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{4}\right)\left(1-\frac{y^2}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{y^2}{n^2}\right)},$$

on aura

$$Y_n = \frac{\sin ay}{ay}\left(\frac{1-\frac{\sin^2 ay}{\sin^2 a}}{1-y^2}\right)\left(\frac{1-\frac{\sin^2 ay}{\sin^2 2a}}{1-\frac{y^2}{4}}\right)\cdots\left(\frac{1-\frac{\sin^2 ay}{\sin^2 an}}{1-\frac{y^2}{n^2}}\right),$$

et également, en passant des sinus aux tangentes,

$$Y_n = \cos^{2n+1} ay \cdot \frac{\operatorname{tang} ay}{ay}\left(\frac{1-\frac{\operatorname{tang}^2 ay}{\operatorname{tang}^2 a}}{1-y^2}\right)\left(\frac{1-\frac{\operatorname{tang}^2 ay}{\operatorname{tang}^2 2a}}{1-\frac{y^2}{n}}\right)\cdots\left(\frac{1-\frac{\operatorname{tang}^2 ay}{\operatorname{tang}^2 an}}{1-\frac{y^2}{n^2}}\right).$$

Quelque grand que puisse être y, on pourra toujours prendre $n > y - \frac{1}{2}$; de manière que l'arc ay, ainsi que tous les arcs a, $2a$, $3a$,..., na, soit compris dans le premier quadrant.

On aura dès lors, parce que dans le premier quadrant les sinus croissent dans un rapport moindre que les arcs, et les tangentes dans un rapport plus grand,

$$1-\frac{\sin^2 ay}{\sin^2 ap} < 1-\frac{y^2}{p^2}, \quad 1-\frac{\operatorname{tang}^2 ay}{\operatorname{tang}^2 ap} > 1-\frac{y^2}{p^2}, \quad \text{si} \quad y < p,$$
$$\frac{\sin^2 ay}{\sin^2 ap}-1 < \frac{y^2}{p^2}-1, \quad \frac{\operatorname{tang}^2 ay}{\operatorname{tang}^2 ap}-1 > \frac{y^2}{p^2}-1, \quad \text{si} \quad y > p;$$

et par conséquent, pour toutes les valeurs de $y < n + \frac{1}{2}$,

$$\mathrm{Y}_n < 1, \quad \mathrm{Y}_n > \cos^{2n+1}\frac{\pi y}{2n+1},$$

d'où l'on conclura

$$\sin \pi y = \pi y (1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{4}\right)\left(1-\frac{y^2}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{y^2}{n^2}\right)\left\{1-\theta\left(1-\cos^{2n+1}\frac{y\pi}{2n+1}\right)\right\},$$

θ désignant un facteur compris entre 0 et 1, fonction de y et de n.

Ainsi se trouvent démontrées, de la manière la plus simple, et la convergence du produit $\pi y\,(1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{4}\right)\ldots$ vers $\sin \pi y$, et les limites de cette convergence, en raison du nombre des facteurs [*].

Quand n est un grand nombre par rapport à y, le facteur *complémentaire* $1-\theta\left(1-\cos^{2n+1}\frac{\pi y}{2n+1}\right)$, peut être remplacé par celui-ci, $\left\{1-\frac{\theta\pi^2 y^2}{2(2n+1)}\right\}$.

En effet, on a

$$\cos\frac{\pi y}{2n+1} > 1-\frac{\pi^2 y^2}{2(2n+1)^2}, \quad \text{et} \quad \cos^{2n+1}\frac{\pi y}{2n+1} > 1-\frac{\pi^2 y^2}{2(2n+1)}$$

si $\pi^2 y^2 < 2(2n+1)^2$, et dès lors tout facteur entre 1 et $\cos^{2n+1}\frac{\pi y}{2n+1}$ est compris dans la forme $1-\frac{\theta\pi^2 y^2}{2(2n+1)}$.

L'erreur *relative*, commise en s'arrêtant au facteur $1-\frac{y^2}{n^2}$, pour obtenir $\sin \pi y$, par son développement en produits de facteurs binômes, est donc réciproque au nombre de ces facteurs, quand ce nombre est très-grand par rapport à l'arc πy.

---

[*] *Cours d'Analyse algébrique*, par M. Cauchy, Note IX^{e}.

2. Mais examinons particulièrement ce qui arrive lorsque $y < 1$. Dans ce cas, les produits de l'ordre impair en y,

$$\pi y, \quad \pi y(1-y^2), \quad \pi y(1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{4}\right), \ldots,$$

que nous désignerons par $P_1, P_2, P_3, \ldots$ forment une série décroissante dès le premier terme, tandis que ceux de l'ordre pair,

$$\pi y(1-y), \quad \pi y(1-y^2)\left(1-\frac{y}{2}\right), \quad \pi y(1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{4}\right)\left(1-\frac{y^2}{3}\right),$$
$$\pi y(1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{4}\right)\left(1-\frac{y^2}{9}\right)\left(1-\frac{y^2}{4}\right), \text{ etc.} \ldots,$$

que nous appellerons $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$, forment, au contraire, une série croissante dès le premier terme, qui converge, ainsi que la première, vers $\sin \pi y$.

En effet, entre les termes consécutifs ou correspondants de ces deux séries, on a évidemment les relations suivantes :

$$P_{n+1} = P_n\left(1-\frac{y^2}{n^2}\right) < P_n,$$
$$Q_{n+1} = Q_n\left(1+\frac{y}{n}\right)\left(1-\frac{y}{n+1}\right) = Q_n\left\{1+\frac{y(1-y)}{n(n+1)}\right\} > Q_n,$$
$$P_{n+1} = Q_n\left(1+\frac{y}{n}\right) = \frac{Q_{n+1}}{1-\dfrac{y}{n+1}}.$$

$$\frac{P_{n+1}}{1+\dfrac{y}{n}} < \sin \pi y < P_n, \quad P_n\left(1-\frac{y}{n}\right) < \sin \pi y < P_n,$$

$$Q_n < \sin \pi y < Q_n\left(1+\frac{y}{n}\right),$$

$$Q_n < \sin \pi y < \frac{Q_n}{1-\dfrac{y}{n}},$$

d'où il résulte que θ désignant toujours un facteur numérique compris entre 0 et 1 et variable d'une expression à l'autre, on pourra écrire indifféremment

$$\sin \pi y = \mathrm{P}_n\left(1-\frac{\theta y}{n}\right) = \frac{\mathrm{P}_n}{1+\frac{\theta y}{n-1}} = \mathrm{Q}_n\left(1+\frac{\theta y}{n}\right) = \frac{\mathrm{Q}_n}{1-\frac{\theta y}{n}}.$$

L'erreur *relative*, commise en prenant P_n ou Q_n pour la valeur de $\sin \pi y$, est donc de l'ordre $\frac{y}{n}$.

5. Mais on peut obtenir une approximation de l'ordre $\frac{y^2}{n^2}$ par la considération suivante :

Quelle que soit la fraction par laquelle on remplace θ dans ces formules, les valeurs qu'on en tirera n'en convergeront pas moins vers $\sin \pi y$ à mesure que n augmentera ; de manière que si l'on substitue à θ les plus grandes ou les moindres fractions qui puissent rendre ces valeurs approchées de $\sin \pi y$, toutes croissantes ou toutes décroissantes, à partir de celles qu'on aura d'abord déduites de P_n ou de Q_n, en y substituant ces limites de θ, celles-ci se trouveront être beaucoup plus rapprochées de $\sin \pi y$, en plus et en moins, que P_n et Q_n.

Considérons d'abord la formule

$$\sin \pi y = \mathrm{P}_n\left(1-\frac{\theta y}{n}\right),$$

et cherchons les limites de θ, qui rendent

$$\mathrm{P}_n\left(1-\frac{\theta y}{n}\right) < \mathrm{P}_{n+1}\left(1-\frac{\theta y}{n+1}\right) < \mathrm{P}_{n+2}\left(1-\frac{\theta y}{n+2}\right), \text{ etc....,}$$

ou

$$\mathrm{P}_n\left(1-\frac{\theta y}{n}\right) > \mathrm{P}_{n+1}\left(1-\frac{\theta y}{n+1}\right) > \mathrm{P}_{n+2}\left(1-\frac{\theta y}{n+2}\right), \text{ etc...:}$$

L'inégalité

$$\mathrm{P}_n\left(1-\frac{\theta y}{n}\right) < \mathrm{P}_{n+1}\left(1-\frac{\theta y}{n+1}\right),$$

au moyen de la relation

$$\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{P}_n\left(1-\frac{y^2}{n^2}\right),$$

revient à celle-ci

$$\theta > \frac{(n+1)y}{n+y^2}.$$

Or il est évident que si l'on prend

$$\theta = \frac{(n+1)\,y}{n+y^2} = \frac{y}{1-\frac{1-y^2}{n+1}},$$

on aura

$$\theta > \frac{(n+2)\,y}{n+1+y^2} > \frac{(n+3)\,y}{n+2+y^2}, \text{ etc.}\ldots$$

Cette valeur de θ est donc la moindre qu'on puisse lui donner pour rendre croissante dès le premier terme la suite $P_n\left(1-\frac{\theta y}{n}\right)$. On aura donc

$$\sin \pi y > P_n\left\{1-\frac{(n+1)y^2}{n(n+y^2)}\right\}.$$

Si, au contraire, on veut satisfaire aux inégalités

$$P_n\left(1-\frac{\theta y}{n}\right) > P_{n+1}\left(1-\frac{\theta y}{n+1}\right) > P_{n+2}\left(1-\frac{\theta y}{n+2}\right), \text{ etc.},$$

il faudra prendre

$$\theta < \frac{y}{1-\frac{1-y^2}{n+1}} < \frac{y}{1-\frac{1-y^2}{n+2}}, \text{ etc.}\ldots;$$

y sera évidemment la plus grande valeur qu'on puisse donner à θ, et l'on aura

$$\sin \pi y < P_n\left(1-\frac{y^2}{n}\right).$$

En combinant ces deux inégalités, on pourra écrire

$$(1) \qquad \sin \pi y = P_n\left(1-\frac{y^2}{n}\right)\left\{1-\frac{\theta y^2(1-y^2)}{n^2-y^4}\right\} = \frac{P_n\left(1-\frac{y^2}{n}\right)}{1+\frac{\varepsilon y^2(1-y^2)}{n^2-y^2}},$$

ε désignant un multiplicateur compris entre 0 et 1, ainsi que θ.

En suivant une marche analogue pour les autres inégalités, on aurait encore

$$(2)\quad \sin \pi y = \frac{P_n \left\{1 + \frac{\theta y^2 (1 - y^2)}{n(n-1)}\right\}}{1 + \frac{y^2}{n-1}} = \frac{P_n}{\left(1 + \frac{y^2}{n-1}\right)\left\{1 - \frac{\delta y^2 (1 - y^2)}{(n - y^2)(n - 1 + y^2)}\right\}},$$

$$(3)\quad \sin \pi y = Q_n \left\{1 + \frac{y(1-y)}{n}\right\}\left\{1 + \frac{\theta y^2 (1-y)^2}{\{n + y(1-y)\}\{n + 1 - y(1-y)\}}\right\} = \frac{Q_n \left\{1 + \frac{y(1-y)}{n}\right\}}{1 - \frac{\mu y^2 (1-y)^2}{n(n+1) + y(1-y)}},$$

$$(4)\quad \sin \pi y = \frac{Q_n \left\{1 - \frac{\theta y^2 (1-y)^2}{n^2}\right\}}{1 - \frac{y(1-y)}{n}} = \frac{Q_n}{\left\{1 - \frac{y(1-y)}{n}\right\}\left\{1 + \frac{\lambda y^2 (1-y)^2}{n^2 - y^2 (1-y)^2}\right\}},$$

θ, δ, λ, μ désignant des facteurs compris entre 0 et 1.

Ainsi donc, en multipliant ou en divisant les produits P_n, Q_n par les facteurs *complémentaires*

$$1 - \frac{y^2}{n}, \quad 1 + \frac{y^2}{n-1}, \quad 1 - \frac{y(1-y)}{n}, \quad 1 + \frac{y(1-y)}{n},$$

on obtiendra la valeur de $\sin \pi y$ avec une erreur *relative*, réciproque au carré de l'indice n.

4. Dans l'application de ces formules, on pourra préférer l'usage des produits Q_n à cause de leur symétrie par rapport à y et $1 - y$.

Soit, en effet, posé

$$x + y = 1, \quad U_s = (1 + x)(1 + y)\left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{y}{2}\right)\ldots\left(1 + \frac{x}{s}\right)\left(1 + \frac{y}{s}\right);$$

on aura

$$Q_{s+1} = \frac{\pi x y\, U_s}{s+1},$$

et par la formule (4),

$$(5)\qquad \sin \pi y = \sin \pi x = \frac{\pi x y\, U_s}{(s + 1 - xy)\left\{1 + \frac{\lambda x^2 y^2}{(s+1)^2 - x^2 y^2}\right\}}.$$

Supposons d'abord

$$x = y = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

on aura

$$(6)\quad \pi = (4s+3)\left\{1 + \frac{\lambda}{16(s+1)^2 - 1}\right\}\frac{2.2}{3.3}\,\frac{4.4}{5.5}\,\frac{6.6}{7.7}\cdots\frac{2s.2s}{2s+1.2s+1},$$

et, par approximation,

$$(7)\quad \pi = (4s+3)\,\frac{2.2}{3.3}\,\frac{4.4}{5.5}\,\frac{6.6}{7.7}\,\frac{8.8}{9.9}\cdots\frac{2s.2s}{2s+1.2s+1},$$

avec une erreur *relative* moindre que $\frac{1}{16(s+1)^2-1}$.

L'expression de Wallis, qui se déduit des produits P_n, donne, en s'arrêtant à $n = s + 1$, dans la formule $\sin \pi y = \frac{P_n}{1 + \frac{\theta y}{n-1}}$, et en négligeant le facteur θ,

$$\pi = 2\,\frac{4}{3}\,\frac{16}{15}\,\frac{36}{35}\,\frac{64}{63}\cdots\frac{(2s)^2}{(2s)^2-1} = (4s+2)\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{2s}{2s+1}\right)^2,$$

avec une erreur *relative* moindre que $\frac{1}{2s+2}$.

Cette valeur approximative de π croît avec le nombre des facteurs; en considérant les produits Q_n et la formule $\sin \pi y = \frac{Q_n}{1 - \frac{\theta y}{n}}$, on aurait celle-ci

$$\pi = 4\,\frac{8}{9}\,\frac{24}{25}\,\frac{48}{49}\cdots\frac{(2s+1)^2-1}{(2s+1)^2} = (4s+4)\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{2s}{2s+1}\right)^2,$$

expression décroissante et convergente, avec une erreur *relative* moindre que $\frac{1}{2s+2}$.

L'expression (7), déduite de la formule (5), est donc la moyenne de ces deux dernières que renferme implicitement celle de Wallis, et qui correspondent, l'une aux produits P_n, et l'autre aux produits Q_n; et l'on voit que, tandis que l'erreur *relative* de celles-ci est réciproque au nombre $s+1$, celle de la moyenne est réciproque au carré de ce nombre.

Si dans la même formule (5) on fait

$$x = \frac{1}{6},\quad y = \frac{5}{6},\quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

on trouve, par approximation,

$$\pi = \left(\frac{36s+31}{10}\right)\left(\frac{6.6}{7.11}\,\frac{12.12}{13.17}\,\frac{18.18}{19.23}\cdots\frac{6s.6s}{6s+1.6s+5}\right).$$

avec une erreur *relative* moindre que $\dfrac{1}{\left\{\dfrac{36(s+1)}{5}\right\}^2-1}$.

Cette expression donnera la valeur de π un peu plus rapidement que l'expression (7).

Toutefois l'usage de ces produits, quelque commode qu'il puisse être pour obtenir la valeur de π sans extraction de racines, exige un trop grand nombre de termes pour donner une approximation de quelques décimales.

5. L'application la plus importante de ces formules est celle qui fournit une expression nouvelle du terme moyen du binôme $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2s}$.

En effet, si l'on représente généralement par $[s]$ le produit $1.2.3\ldots s$, l'expression (6) peut s'écrire ainsi,

$$\pi = (4s+3)\left\{1+\frac{\lambda}{16(s+1)^2-1}\right\}\frac{2^{4s}[s]^4}{(2s+1)^2[2s]^2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{[2s]}{[s]^2} = \frac{2^{2s}}{2s+1}\sqrt{\frac{4s+3}{\pi}}\left\{1+\frac{\mu}{32(s+1)^2-2}\right\},$$

et, par approximation,

$$\frac{[2s]}{[s]^2} = \frac{2^{2s}\sqrt{\dfrac{4s+3}{\pi}}}{2s+1} = \frac{2^{2s}\left(1+\dfrac{1}{4s+2}\right)}{\sqrt{\pi\left(s+\dfrac{3}{4}\right)}},$$

avec une erreur *relative* moindre que $\dfrac{1}{32(s+1)^2-2}$.

En comparant cette expression avec celle que Laplace a donnée dans la *Théorie des Probabilités*, page 138, 1^{re} édition, livre I^{er}, chap. III, on remarquera l'avantage de la nôtre, qui donne une approximation du même ordre que celle qui résulte de l'emploi des trois premiers termes de celle de Laplace, et qui, de plus, indique la limite de l'erreur commise.

NOTE

SUR L'ÉVALUATION DES ARCS DE CERCLE,

EN FONCTION LINÉAIRE DES SINUS OU DES TANGENTES DE FRACTIONS DE CES ARCS, DÉCROISSANT EN PROGRESSION GÉOMÉTRIQUE;

PAR M. OLINDE RODRIGUES.

1. Soient

$$\frac{x}{a^q},\quad \frac{x}{a^{q+1}},\quad \frac{x}{a^{q+2}},\ldots,\quad \frac{x}{a^{q+m}},$$

$m+1$ arcs décroissants en progression géométrique suivant la raison $\frac{1}{a}$; on aura, par le développement de leurs sinus, les $m+1$ équations suivantes,

$$x = a^q \sin\frac{x}{a^q} + \frac{x^3}{[3]\,a^{2q}} - \frac{x^5}{[5]\,a^{4q}} + \frac{x^7}{[7]\,a^{6q}} \ldots + \frac{(-1)^{p+1}x^{2p+1}\theta_q}{[2p+1]\,a^{2pq}}.$$

$$x = a^{q+1} \sin\frac{x}{a^{q+1}} + \frac{x^3}{[3]\,a^{2q+2}} - \frac{x^5}{[5]\,a^{4q+4}} + \frac{x^7}{[7]\,a^{6q+6}} \ldots + \frac{(-1)^{p+1}x^{2p+1}\theta_{q+1}}{[2p+1]\,a^{2pq+2p}},$$

$$x = a^{q+2} \sin\frac{x}{a^{q+2}} + \frac{x^3}{[3]\,a^{2q+4}} - \frac{x^5}{[5]\,a^{4q+8}} + \frac{x^7}{[7]\,a^{6q+12}} \ldots + \frac{(-1)^{p+1}x^{2p+1}\theta_{q+2}}{[2p+1]\,a^{2pq+4p}},$$

. . . .

$$x = a^{q+m} \sin\frac{x}{a^{q+m}} + \frac{x^3}{[3]\,a^{2q+2m}} - \frac{x^5}{[5]\,a^{4q+4m}} + \frac{x^7}{[7]\,a^{6q+6m}} \ldots + \frac{(-1)^{p+1}x^{2p+1}\theta_{q+m}}{[2p+1]\,a^{2pq+2pm}},$$

dans lesquelles θ_q, θ_{q+1}, $\theta_{q+2},\ldots$, θ_{q+m} désignent des fonctions dont la valeur numérique est comprise entre 0 et 1, et p un nombre aussi grand que l'on voudra. Nous représentons généralement par $[s]$ le produit $1.2.3\ldots s$.

En multipliant ces $m+1$ équations par les coefficients successifs du produit

$$\frac{(a^2y-1)(a^4y-1)(a^6y-1)\ldots(a^{2m}y-1)}{(a^2-1)(a^4-1)(a^6-1)\ldots(a^{2m}-1)},$$

développé suivant les puissances ascendantes de y, coefficients que nous représenterons par $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m$, et produit que nous désignerons par $\varphi(y, m)$; puis ajoutant ces $m+1$ équations ainsi multipliées, nous trouvons

$$(1)\quad x = \sum_{i=0}^{i=m} A_i a^{q+i} \sin\frac{x}{a^{q+i}} + \frac{u_1 x^{2m+3}}{[2m+3]a^{2q(m+1)}} - \frac{u_2 x^{2m+5}}{[2m+5]a^{2q(m+2)}} + \frac{u_3 x^{2m+7}}{[2m+7]a^{2q(m+3)}} \ldots \frac{(-1)^{p+1} x^{2p+1}\Theta_p}{[2p+1]a^{2qp}},$$

équation dans laquelle,

$$u_1 = (-1)^m \sum_{i=0}^{i=m} \frac{A_i}{a^{2i(m+1)}} = (-1)^m \varphi\{a^{-2(m+1)}, m\} = a^{-m(m+1)},$$

$$u_2 = (-1)^m \sum_{i=0}^{i=m} \frac{A_i}{a^{2i(m+2)}} = (-1)^m \varphi\{a^{-2(m+2)}. m\} = u_1 \left\{\frac{1-a^{-2(m+1)}}{1-a^{-2}}\right\},$$

$$u_3 = (-1)^m \sum_{i=0}^{i=m} \frac{A_i}{a^{2i(m+3)}} = (-1)^m \varphi\{a^{-2(m+3)}, m\} = u_2 \left\{\frac{1-a^{-2(m+2)}}{1-a^{-4}}\right\},$$

. . . .

$$\Theta_p = \sum_{i=0}^{i=m} \frac{A_i\,\theta_{q+i}}{a^{2ip}}.$$

En effet, par la nature de la fonction $\varphi(y)$, on a évidemment

$$\varphi\left(\frac{y}{a^2},\ m\right) = \frac{y-1}{a^{2m}y-1}\varphi(y, m), \quad \varphi(1, m) = 1, \quad \varphi(a^{-2}, m) = 0,$$

$$\varphi(a^{-4}, m) = 0, \quad \varphi(a^{-6}, m) = 0, \ldots, \quad \varphi(a^{-2m}, m) = 0:$$

et la comparaison des puissances de y dans l'équation identique

$$(a^{2m}y-1)\varphi\left(\frac{y}{a^2},\ m\right) = (y-1)\varphi(y, m),$$

donne, pour les coefficients de $\varphi(y, m)$, les valeurs suivantes :

$$A_0 = \frac{(-1)^m}{(a^2-1)(a^4-1)(a^6-1)\ldots(a^{2m}-1)},$$

$$A_1 = \frac{A_0(1-a^{2m})}{1-a^{-2}} = \frac{A_0 a^2(1-a^{2m})}{a^2-1},$$

$$A_2 = \frac{A_1(1-a^{2m-2})}{1-a^{-4}} = \frac{A_1 a^4(1-a^{2m-2})}{a^4-1},$$

$$A_3 = \frac{A_2(1-a^{2m-4})}{1-a^{-6}} = \frac{A_2 a^6(1-a^{2m-4})}{a^6-1},$$

. . . .

$$A_m = \frac{A_{m-1}(1-a^2)}{1-a^{-2m}} = \frac{A_{m-1} a^{2m}(1-a^2)}{a^{2m}-1} = \frac{a^{m(m+1)}}{(a^2-1)(a^4-1)(a^6-1)\ldots(a^{2m}-1)}.$$

2. L'équation (1) peut s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} x = \psi(m, q) &+ \frac{x^{2m+3}}{[2m+3]\,a^{(m+1)(2q+m)}}\left\{1 - \frac{u_2 x^2}{u_1 a^{2q}(2m+4)(2m+5)}\right\} \\ &+ \frac{u_3 x^{2m+7}}{[2m+7]\,a^{2q(m+3)}}\left\{1 - \frac{u_4 x^2}{u_3 a^{2q}(2m+8)(2m+9)}\right\} \\ &+ \text{etc.} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \pm \frac{x^{2p+1}\,\Theta_p}{[2p+1]\,a^{2pq}}, \end{aligned}$$

en posant

$$\psi(m, q) = \sum_{i=0}^{i=m} A_i\, a^{q+i} \sin \frac{x}{a^{i+q}}.$$

Mais les rapports $\frac{u_2}{u_1}$, $\frac{u_3}{u_2}, \ldots, \frac{u_n}{u_{n-1}}$, décroissent à mesure que l'indice n augmente et convergent vers l'unité ; le coefficient Θ_p étant toujours moindre que la somme de valeurs positives de A_i, quelles que soient les valeurs des fractions θ_{q+i}, le terme $\frac{x^{2p+1}\,\Theta_p}{[2p+1]\,a^{2pq}}$ peut être rendu moindre que toute grandeur assignable ; et de là on peut conclure que, pour toutes les valeurs de

$$x < a^q \sqrt{\frac{1-a^{-2}}{1-a^{-2m-2}}(2m+4)(2m+5)},$$

on aura

$$x > \psi(m, q),$$

et semblablement,

$$x < \psi(m, q) + \frac{x^{2m+3}}{[2m+3]\,a^{(m+1)(m+2q)}},$$

et enfin,

$$x = \psi(m, q) + \frac{\theta\, x^{2m+3}}{[2m+3]\,a^{(m+1)(m+2q)}},$$

θ désignant un facteur compris entre 0 et 1.

5. Avant de passer aux applications numériques de cette formule, nous allons montrer avec quelle simplicité se forment les valeurs successives de la fonction $\psi(m, q)$, linéaire par rapport aux sinus des arcs

$$\frac{x}{a^q},\quad \frac{x}{a^{q+1}},\quad \frac{x}{a^{q+2}},\ldots,\quad \frac{x}{a^{q+m}}.$$

On a

$$\psi(m+1, q) = \sum_{i=0}^{i=m+1} \mathrm{A}'_i\, a^{i+q} \sin\frac{x}{a^{i+q}},$$

A'_i désignant le coefficient de y^i dans le développement de $\varphi(y, m+1)$, soit de $\frac{a^{2m+2}y-1}{a^{2m+2}-1}\varphi(y, m)$.

On aura donc

$$\mathrm{A}'_i = \frac{a^{2m+2}\mathrm{A}_{i-1} - \mathrm{A}_i}{a^{2m+2}-1},\quad \mathrm{A}'_0 = \frac{-\mathrm{A}_0}{a^{2m+2}-1},\quad \mathrm{A}'_1 = \frac{a^{2m+2}\mathrm{A}_0 - \mathrm{A}_1}{a^{2m+2}-1},\ldots,\quad \mathrm{A}'_{m+1} = \frac{a^{2m+2}\mathrm{A}_m}{a^{2m+2}-1},$$

et par conséquent,

$$(2)\qquad \psi(m+1, q) = \frac{a^{2m+2}\psi(m, q+1) - \psi(m, q)}{a^{2m+2}-1} = \psi(m, q+1) + \frac{\psi(m, q+1) - \psi(m, q)}{a^{2m+2}-1}.$$

Pour calculer $\psi(m, q)$, on commencera donc par calculer les produits

$$a^q \sin\frac{x}{a^q},\qquad a^{q+1}\sin\frac{x}{a^{q+1}},\ldots,\ a^{q+m}\sin\frac{x}{a^{q+m}}.$$

Soient les fonctions

$$\psi(0, q),\quad \psi(0, q+1),\quad \psi(0, q+2),\ldots,\quad \psi(0, q+m);$$

puis, au moyen de leurs différences successives que l'on divisera par

$a^2 - 1$, on obtiendra les valeurs de

$$\psi(1, q),\quad \psi(1, q+1),\ldots,\quad \psi(1, q+m):$$

on emploiera de la même manière les différences de celles-ci, en les divisant par $a^4 - 1$, pour former les valeurs de

$$\psi(2, q),\quad \psi(2, q+1),\ldots,\quad \psi(2, q+m),$$

et en poursuivant ainsi, on arrivera bien facilement à déterminer $\psi(m, q)$, sans avoir besoin de calculer et d'employer les coefficients A_i.

Les valeurs successives de $\psi(m, q)$ convergent rapidement vers x, et croissent même indéfiniment avec leurs indices dans des limites de x très-peu différentes de celles que nous avons indiquées ci-dessus; c'est-à-dire que l'on a

$$\psi(m+1, q) > \psi(m, q),\quad \psi(m, q+1) > \psi(m, q),$$

et même

$$\psi(m+1, q) > \psi(m, q+1).$$

Ces trois inégalités se réduisent en effet à une seule, par suite de l'équation (2); il suffit de démontrer l'une d'entre elles.

Or, si dans l'équation (1) on change m en $m+1$, et qu'on accentue les coefficients $u_1, u_2, u_3,\ldots$, pour indiquer cette transformation, on aura

$$x = \psi(m+1, q) + \frac{u'_1 x^{2m+5}}{[2m+5]a^{2q(m+2)}} - \frac{u'_2 x^{2m+7}}{[2m+7]a^{2q(m+3)}} \cdots \frac{(-1)^{p+1} x^{2p+1}\Theta'_p}{[2p+1]a^{2qp}}.$$

Cette équation, comparée à la précédente, donnera

$$\frac{\psi(m+1, q) - \psi(m, q)}{a^q} = \frac{u_1\left(\frac{x}{a^q}\right)^{2m+3}}{[2m+3]} - \frac{(u_2+u'_1)\left(\frac{x}{a^q}\right)^{2m+5}}{[2m+5]} + \frac{(u_3+u'_2)\left(\frac{x}{a^q}\right)^{2m+7}}{[2m+7]} \cdots$$

$$\frac{(-1)^{p+1}\left(\frac{x}{a^q}\right)^{2p+1}}{[2p+1]}(\Theta_p - \Theta'_p);$$

le dernier terme, de l'ordre $2p+1$, pouvant être rendu moindre que toute quantité assignable, il suffira de considérer les premiers pour établir que la différence $\psi(m+1, q) - \psi(m, q)$ est positive.

Mais on a généralement

$$\varphi(y, m+1) = \frac{a^2 y^{m+2} - 1}{a^{2m+2} - 1} \varphi(y, m),$$

et par suite,

$$u'_n = (-1)^{m+1} \varphi\{a^{-2(m+n+1)}, m+1\} = \frac{(-1)^{m+1}(a^{-2n}-1)}{a^{2m+2}-1} \varphi\{a^{-2(m+n+1)}, m\} = \frac{1-a^{-2n}}{a^{2m+2}-1} u_{n+1};$$

$$\frac{u_{n+1} + u'_n}{u_n + u'_{n-1}} = \frac{u_{n+1}}{u_n}\left(1 + \frac{a^2 - 1}{a^{2m+2n+2} - a^2}\right);$$

comme la plus grande valeur de ce rapport correspond à $n = 1$, ce qui donne

$$\frac{u_2 + u'_1}{u_1} = \frac{1 - a^{-2m-4}}{1 - a^{-2}},$$

on en conclura que, pour toutes les valeurs de

$$x < a^q \sqrt{\frac{1 - a^{-2}}{1 - a^{-2m-4}} (2m+4)(2m+5)},$$

on aura

$$\psi(m+1, q) - \psi(m, q) > 0.$$

4. Supposons

$$a = 2, \quad q = 0, \quad x = \frac{2\pi}{n}, \quad n 2^{m-1} \sin \frac{\pi}{n 2^{m-1}} = \mathrm{P}_{n 2^m},$$

P_{n2^m} désignant l'aire du polygone régulier inscrit de $n2^m$ côtés; on aura évidemment, n étant au moins égal à 3,

$$\frac{2\pi}{n} < \sqrt{\frac{1 - 2^{-2}}{1 - 2^{-2m-4}} (2m+4)(2m+5)} < \sqrt{\frac{1 - 2^{-2}}{1 - 2^{-2m-2}} (2m+4)(2m+5)}.$$

et par conséquent,

$$\pi = \psi(m, 0) + \frac{\theta n \left(\frac{\pi}{n}\right)^{2m+3}}{[2m+3] 2^{(m+1)(m-2)}};$$

en posant

$$\psi(m, 0) = \sum_{i=0}^{i=m} \mathrm{A}_i \mathrm{P}_{n2^i}.$$

L'approximation que donne cette formule, en prenant simplement $\pi = \psi(m, 0)$, est très-rapide, car si l'on désigne par ε_m, ε_{m+1} les limites des erreurs correspondantes aux indices m, $m+1$, on aura

$$\varepsilon_m = \frac{n\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2m+3}}{[2m+3]\,2^{(m+1)(m-2)}}, \qquad \varepsilon_{m+1} = \frac{\varepsilon_m\left(\frac{\pi}{n}\right)}{(2m+2)(2m+3)\,2^{2m}}.$$

Si l'on compare cette approximation avec celle qui résulte, ainsi qu'on l'expose dans les Éléments de Géométrie, de l'emploi simple des polygones réguliers inscrits, dont les nombres des côtés sont successivement doublés, on trouve, en partant du carré, qu'il suffit des quatre premiers polygones de 4, 8, 16, 32 côtés, pour que la fonction $\psi(3, 0)$ fournisse la valeur de π avec sept décimales exactes; tandis que la méthode connue, qui revient à n'employer que les fonctions $\psi(0, 0)$, exige le calcul de 14 polygones jusqu'à celui de 32768 côtés pour obtenir la même approximation.

L'emploi de ces quatorze polygones, pour la formation de $\psi(13, 0)$, donnerait, par notre méthode, π avec soixante-dix-neuf décimales exactes.

Pour $m = 1$, on a

$$\psi(1, 0) = P_{2n} + \frac{P_{2n} - P_n}{3},$$

qui donne π avec une erreur moindre que $< \frac{2,6}{n^4}$. Le polygone de 128 côtés, combiné avec le suivant de 256, auquel on ajoutera le tiers de sa différence avec le premier, suffit donc pour donner π avec sept décimales, ainsi qu'il est facile de le vérifier.

5. Considérons maintenant les tangentes. Pour toutes les valeurs de $x < \frac{\pi}{2}$, on a l'équation

$$x = \operatorname{tang} x - t_1 x^3 - t_2 x^5 - t_3 x^7 - \ldots - t_p x^{2p+1}\left(\frac{\pi^2 - 4\theta x^2}{\pi^2 - 4x^2}\right),$$

dans laquelle un coefficient quelconque

$$t_n = \frac{2^{2n+3}}{\pi^{2n+2}}\left(1 + \frac{1}{3^{2n+2}} + \frac{1}{5^{2n+2}} + \frac{1}{7^{2n+2}} + \text{etc}\ldots\right),$$

θ désignant toujours un multiplicateur compris entre 0 et 1.

Écrivons successivement dans cette équation, à la place de x,

$$\frac{x}{a^q},\quad \frac{x}{a^{q+1}},\quad \frac{x}{a^{q+2}},\ldots,\quad \frac{x}{a^{q+m}},$$

et multiplions les nouvelles équations par

$$a^q\,\mathrm{A}_0,\quad a^{q+1}\,\mathrm{A}_1,\quad a^{q+2}\,\mathrm{A}_2,\quad \text{etc.}\ldots,$$

l'addition donnera

$$x = \sum \mathrm{A}_i\,a^{i+q}\ \mathrm{tang}\,\frac{x}{a^{i+q}} + \frac{(-1)^{m+1}\,t_{m+1}\,x^{2m+3}}{a^{(m+1)\,(m+2q)}}\left(1 + \frac{t_{m+2}}{t_{m+1}}\,\frac{u_2}{u_1}\,\frac{x^2}{a^{2q}} + \frac{t_{m+3}}{t_{m+1}}\,\frac{u_3}{u_1}\,\frac{x^4}{a^{4q}}\ldots + \frac{t_p\,x^{2p+1}}{t_{m+1}}\,\Theta_p\right);$$

Θ_p désignant un facteur nécessairement moindre qu'une limite très-facile à assigner, quelles que puissent être les fractions désignées par θ, tandis que le facteur

$$t_p\,x^{2p+1} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{2x}{\pi}\right)^{2p+1}\left(1 + \frac{1}{3^{2p+2}} + \frac{1}{5^{2p+2}}\ldots\text{ etc.}\right)$$

peut devenir moindre que toute grandeur donnée, par l'accroissement du nombre p.

Soit posé

$$\sum_{i=0}^{i=m} \mathrm{A}_i\,a^{i+q}\ \mathrm{tang}\,\frac{x}{a^{i+q}} = \psi\,(m,\,q),$$

on voit déjà que les valeurs de $\psi(0,\,q)$, $\psi(1,\,q)$, $\psi(2,\,q)$, dont le mode de formation a été exposé ci-dessus, seront alternativement moindres et plus grandes que x. Il reste à prouver qu'elles convergeront vers x, et à montrer le degré de l'approximation. Or les coefficients t_{m+1}, t_{m+2}, t_{m+3},... convergent vers zéro, et leurs rapports successifs, $\frac{t_{m+2}}{t_{m+1}}$, $\frac{t_{m+3}}{t_{m+2}}$, $\frac{t_{m+4}}{t_{m+3}}$,... vers une limite supérieure $\frac{4}{\pi^2}$ en même temps que les rapports $\frac{u_2}{u_1}$, $\frac{u_3}{u_2}$, $\frac{u_3}{u_2}$,... vers leur limite inférieure qui est l'unité.

On aura donc

$$1 + \frac{t_{m+2}\,u_2}{t_{m+1}\,u_1}\,\frac{x^2}{a^{2q}} + \frac{t_{m+3}}{t_{m+1}}\,\frac{u_3}{u_1}\,\frac{x^4}{a^{4q}}\ldots < \frac{1}{1 - \frac{u^2}{u_1}\left(\frac{2x}{\pi a^q}\right)^2},$$

et enfin,

$$x = \psi(m, q) + \frac{(-1)^{m+1}\theta\, t_{m+1}\, x^{2m+3}}{\left\{1 - \frac{u_2}{u_1}\left(\frac{2x}{\pi a^q}\right)^2\right\} a^{(m+1)(m+2q)}}.$$

Les limites de l'erreur pour chaque valeur de $\psi(m, q)$ seront donc exprimées par la fraction

$$\frac{t_{m+1}\, x^{2m+3}}{\left\{1 - \frac{u_2}{u_1}\left(\frac{2x}{\pi a^q}\right)^2\right\} a^{(m+1)(m+2q)}},$$

et décroîtront très-rapidement.

Il reste à démontrer que des deux valeurs consécutives $\psi(m, q)$, $\psi(m+1, q)$, la seconde différera moins de x que la première.

Si m est pair, on aura

$$\psi(m, q) > x, \quad \psi(m+1, q) < x;$$

il faut prouver qu'on aura aussi

$$\psi(m, q) - x > x - \psi(m+1, q), \quad \text{ou} \quad 2x - \psi(m, q) - \psi(m+1, q) < 0.$$

Si m est impair, on aura

$$\psi(m, q) < x, \quad \psi(m+1, q) > x;$$

l'inégalité à démontrer devient

$$\psi(m+1, q) - x < x - \psi(m, q), \quad \text{ou} \quad 2x - \psi(m, q) - \psi(m+1, q) > 0.$$

Ces deux inégalités sont comprises dans celle-ci,

$$\frac{2x - \psi(m, q) - \psi(m+1, q)}{(-1)^{m+1}} > 0,$$

que nous allons établir.

En effet, en ajoutant les deux équations

$$\frac{x - \psi(m, q)}{(-1)^{m+1} a^q} = t_{m+1}\left(\frac{x}{a^q}\right)^{2m+3} u_1 + t_{m+2}\left(\frac{x}{a^q}\right)^{2m+5} u_2 + t_{m+3}\left(\frac{x}{a^q}\right)^{2m+7} u_3 \ldots + t_p\left(\frac{x}{a^q}\right)^{2p+1} \Theta_p,$$

$$\frac{x - \psi(m+1, q)}{(-1)^{m+1} a^q} = - t_{m+2}\left(\frac{x}{a^q}\right)^{2m+1} u'_1 - t_{m+3}\left(\frac{x}{a^q}\right)^{2m+2} u'_2 \ldots\ldots\ldots\ldots - t_p\left(\frac{x}{a^q}\right)^{2p+1} \Theta_p,$$

on trouve

$$\frac{2x - \psi m, q - \psi(m+1, q)}{(-1)^{m+1} a^q} = t_{m+1}\left(\frac{x}{a^q}\right)^{2m+3} u_1 + t_{m+2}\left(\frac{x}{a^q}\right)^{2m+5} (u_2 - u'_1)\, t_{m+3}\left(\frac{x}{a^q}\right)^{2m+7} (u_3 - u'_2 + \ldots > 0,$$

car on a généralement

$$u_{n+1} - u'_n = u_{n+1}\left(1 - \frac{1 - a^{-2n}}{a^{2m+2} - 1}\right) > 0.$$

Le produit a^{i+q} tang $\frac{x}{a^{i+q}}$ exprimant l'aire du secteur polygonal régulier de a^{i+q} còtés circonscrit à l'arc $2x$, il en résulte que le mode de formation successive des fonctions $\psi(m, q)$ s'applique aux aires des polygones réguliers circonscrits, comme à celles des polygones inscrits. et donnerait la valeur de π avec une approximation du même ordre.

6. Le même procédé s'applique à la recherche du rayon du cercle, dont l'aire doit être équivalente à celle d'un polygone régulier donné, que l'on transforme successivement en polygones équivalents d'un nombre de côtés double, ou dont la circonférence doit être égale au contour d'un polygone régulier donné que l'on transforme successivement en polygones isopérimètres d'un nombre de côtés double, au moyen des rayons des cercles inscrits ou circonscrits à ces polygones.

Il suffit, pour le comprendre, de considérer les développements des fonctions cot x, cosée x; nous ne nous y arrêterons pas.

En général, le mode d'évaluation que nous venons d'exposer pour les arcs de cercle en fonction linéaire des sinus ou des tangentes de parties de ces arcs décroissant en progression géométrique, présente un procédé pour le retour des suites convergentes, qui pourra s'employer avec avantage toutes les fois que, par la nature de la fonction développée, il sera facile de calculer les valeurs de cette fonction correspondantes aux fractions de la variable, décroissant en progression géométrique.

NOTE

SUR UNE CLASSE D'INTÉGRALES DÉFINIES MULTIPLES;

Par M. TCHEBICHEF.

Théorème. « Quelle que soit la forme de la fonction f, on a

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \varphi_1(x)\,\varphi_2(y)\,\varphi_3(z)\ldots f(x^m + y^n + z^p + \ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots$$
$$= \int_0^\infty \Phi(u) f(u)\,du,$$

» équation où $\Phi(u)$ se détermine par les fonctions données $\varphi_1(x)$,
» $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(z)$,... au moyen des quadratures, en prenant

$$\Phi(u^2) = \frac{\psi(u\sqrt{-1}) - \psi(-u\sqrt{-1})}{2\pi u^2\sqrt{-1}}, \tag{1}$$

» et

$$\psi(u) = \int_0^\infty e^{-\alpha}\left[\int_0^\infty \varphi_1(x)\,e^{-\frac{\alpha x^m}{u^2}}\,dx \int_0^\infty \varphi_2(y)\,e^{-\frac{\alpha y^n}{u^2}}\,dy \int_0^\infty \varphi_3(z)\,e^{-\frac{\alpha z^p}{u^2}}\,dz\ldots\right]d\alpha. \text{ »} \tag{2}$$

Ce théorème suppose que les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ sont telles que,

1°. $\psi(u)$ et sa dérivée restent finies pour toutes les valeurs réelles et positives de u, ou pour toutes les valeurs imaginaires de u, dont la partie réelle est une quantité positive;

2°. Que la fonction $\psi(u)$ devient zéro pour

$$u = a \pm z\sqrt{-1}, \quad \text{ou} \quad u = z \pm a\sqrt{-1},$$

lorsque $a = \infty$, quelle que soit la valeur de z, pourvu qu'elle soit réelle et positive.

Soient, par exemple,

$$1^{\circ}. \qquad m = n = p = \ldots = 1,$$

$$\varphi_1(x) = x^{a-1}, \quad \varphi_2(y) = y^{b-1}, \quad \varphi_3(z) = z^{c-1}, \ldots;$$

dans ce cas, pour trouver la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \ldots f(x + y + z + \ldots)\, dx\, dy\, dz \ldots,$$

on a d'abord par l'équation (2),

$$\psi(u) = \int_0^\infty e^{-\alpha} \left[\int_0^\infty x^{a-1} e^{-\frac{\alpha x}{u^2}} dx \int_0^\infty y^{b-1} e^{-\frac{\alpha y}{u^2}} dy \int_0^\infty z^{c-1} e^{-\frac{\alpha z}{u^2}} dz \ldots \right] d\alpha,$$

$$= \int_0^\infty e^{-\alpha} \left[\left(\frac{u^2}{\alpha}\right)^a \Gamma(a) \left(\frac{u^2}{\alpha}\right)^b \Gamma(b) \left(\frac{u^2}{\alpha}\right)^c \Gamma(c) \ldots \right] d\alpha$$

$$= \Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c) \ldots u^{2(a+b+c+\ldots)} \int_0^\infty e^{-\alpha} \alpha^{-(a+b+c+\ldots)} d\alpha$$

$$= \Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c) \ldots \Gamma(1 - a - b - c - \ldots)\, u^{2(a+b+c+\ldots)},$$

et en substituant cette valeur de $\psi(u)$ dans l'équation (1), on trouve

$$\Phi(u^2) = \Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c) \ldots \Gamma(1 - a - b - c - \ldots) \frac{(\sqrt{-1})^{2(a+b+c+\ldots)} (-\sqrt{-1})^{2(a+b+c+\ldots)}}{2\pi\sqrt{-1}} u^{2(a+b+c+\ldots-1)}$$

$$= \Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c) \ldots \Gamma(1 - a - b - c - \ldots) \frac{\sin \frac{\pi}{2}(a + b + c + \ldots)}{\pi} u^{2(a-b+c+\ldots-1)}.$$

Cette équation donne

$$\Phi(u) = \Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c) \ldots \Gamma(1 - a - b - c - \ldots) \frac{\sin \frac{\pi}{2}(a + b + c + \ldots)}{\pi} u^{a+b+c+\ldots-1}.$$

Mais, d'après une propriété connue de la fonction Γ, on a

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2}(a + b + c + \ldots)}{\pi} \Gamma(1 - a - b - c - \ldots) = \frac{1}{\Gamma(a + b + c + \ldots)};$$

donc l'intégrale

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \ldots f(x+y+z+\ldots)\, dx\, dy\, dz \ldots$$
$$= \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)\ldots}{\Gamma(a+b+c+\ldots)} \int_0^\infty u^{a+b+c+\ldots-1} f(u)\, du,$$

ce qui a déjà été démontré par M. Liouville.

2°. Soient

$$m = n = p = \ldots = 2,$$
$$\varphi_1(x) = \cos ax, \quad \varphi_2(y) = \cos by, \quad \varphi_3(z) = \cos cz, \ldots,$$

on aura, pour trouver l'intégrale

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \cos ax \cos by \cos cz \ldots f(x^2 + y^2 + z^2 + \ldots)\, dx\, dy\, dz \ldots,$$

d'abord

$$\psi(u) = \int_0^\infty e^{-\alpha} \left[\int_0^\infty \cos ax\, e^{-\frac{\alpha x^2}{u^2}} dx \int_0^\infty \cos by\, e^{-\frac{\alpha y^2}{u^2}} dy \int_0^\infty \cos cz\, e^{-\frac{\alpha z}{u^2}} dz \ldots \right] d\alpha$$
$$= \int_0^\infty e^{-\alpha} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} u\, e^{-\frac{a^2u^2}{4\alpha}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} u\, e^{-\frac{b^2u^2}{4\alpha}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} u\, e^{-\frac{c^2u^2}{4\alpha}} \times \ldots \right] d\alpha$$
$$= u^\mu \frac{\pi^{\frac{\mu}{2}}}{2^\mu} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha - \frac{\rho u^2}{4\alpha}}}{\alpha^{\frac{\mu}{2}}}\, d\alpha,$$

où μ désigne le nombre des variables $x, y, z, \ldots$, et $\rho = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots$. Mais on sait que, pour un nombre impair μ, on a

$$u^\mu \frac{\pi^{\frac{\mu}{2}}}{2^\mu} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha - \frac{\rho u^2}{4\alpha}}}{\alpha^{\frac{\mu}{2}}}\, d\alpha = u^\mu \frac{\pi^{\frac{\mu}{2}}}{2^\mu} \frac{\sqrt{\pi}}{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}} \frac{d^{\frac{\mu-1}{2}} . e^{-u\sqrt{\rho}}}{\left(d.\rho \frac{u^2}{4}\right)^{\frac{\mu-1}{2}}}$$
$$= u^\mu \frac{\pi^{\frac{\mu+1}{2}}}{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}} \left(\frac{4}{u^2}\right)^{\frac{\mu-1}{2}} \frac{d^{\frac{\mu-1}{2}} e^{u\sqrt{\rho}}}{(d\rho)^{\frac{\mu-1}{2}}};$$

donc

$$\psi(u) = \frac{1}{(-1)^{\mu-1}} \frac{\pi^{\frac{\mu+1}{2}}}{2} u \frac{d^{\frac{\mu-1}{2}}.e^{-u\sqrt{\rho}}}{(d\rho)^{\frac{\mu-1}{2}}},$$

et

$$\Phi(u^2) = \frac{\psi(\sqrt{-1}) - \psi(-u\sqrt{-1})}{2\pi u^2 \sqrt{-1}} = \frac{\pi^{\frac{\mu-1}{2}}}{2(-1)^{\mu-1}} \frac{d^{\frac{\mu-1}{2}}.\cos u\sqrt{\rho}}{d\rho)^{\frac{\mu-1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{u}};$$

d'où

$$\Phi(u) = \frac{\pi^{\frac{\mu-1}{2}}}{2(-1)^{\mu-1}} \frac{d^{\frac{\mu-1}{2}}.\cos\sqrt{u\rho}}{(d\rho)^{\frac{\mu-1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{u}};$$

donc, pour un nombre impair des variables x, y, z,..., l'intégrale

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \cos ax \cos by \cos cz \ldots f(x^2+y^2+z^2+\ldots)\, dx\, dy\, dz \ldots\ldots$$
$$= \frac{\pi^{\frac{\mu-1}{2}}}{2(-1)^{\mu-1}} \int_0^\infty \frac{d^{\frac{\mu-1}{2}}.\cos\sqrt{u\rho}}{(d\rho)^{\frac{\mu-1}{2}}} f(u)\, du.$$

ce qui est le théorème de M. Cauchy (*Journal de l'Ecole Polytechnique*, XIX^e^ cahier), d'où il déduit, comme cas particulier, la formule de Poisson.

NOTE

SUR UNE FORMULE RELATIVE AUX INTÉGRALES MULTIPLES;

PAR E. CATALAN [*].

Cette Note a pour but la détermination de l'intégrale d'ordre n,

$$(1)\quad A = \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\ldots\varphi_n(x_n) f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$$

Considérons d'abord, pour plus de simplicité, l'intégrale double

$$(2)\qquad B = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) f(x_1 + x_2)\,dx_1\,dx_2.$$

Afin de pouvoir séparer les variables, j'emploie la formule de Fourier :

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\alpha u - \alpha x) f(u)\,du.$$

Elle donne, en remplaçant x par $x_1 + x_2$,

$$B = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\,dx_1\,dx_2 \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\alpha u - \alpha x_1 - \alpha x_2) f(u)\,du$$

En vertu des relations qui existent entre les lignes trigonométriques et les exponentielles imaginaires, le second membre sera égal à la partie réelle de

$$C = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\,dx_1\,dx_2 \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha u - \alpha x_1 - \alpha x_2)\sqrt{-1}} f(u)\,du.$$

---

[*] Ayant cherché à démontrer le théorème de M. *Tchebichef*, je suis arrivé à la formule (7), laquelle ne diffère de celle de ce géomètre que par la manière dont elle est écrite.

Changeant l'ordre des intégrations, nous aurons

$$(3)\quad C = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du \int_0^\infty e^{\alpha u\sqrt{-1}}\,d\alpha \int_0^\infty \varphi_1(x_1)\,e^{-\alpha x_1\sqrt{-1}}\,dx_1 \int_0^\infty \varphi_2(x_2)\,e^{-\alpha x_2\sqrt{-1}}\,dx_2.$$

Posons

$$(4)\qquad \psi_1(\alpha) = \int_0^\infty \varphi_1(x_1)\,e^{-\alpha x_1\sqrt{-1}}\,dx_1,\quad \psi_2(\alpha) = \int_0^\infty \varphi_2(x_2)\,e^{-\alpha x_2\sqrt{-1}}\,dx_2,$$

$$(5)\qquad F(u) = \int_0^\infty e^{\alpha u\sqrt{-1}}\,\psi_1(\alpha)\,\psi_2(\alpha)\,d\alpha,$$

d'où

$$(6)\qquad C = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,F(u)\,du;$$

et la partie réelle de cette dernière intégrale sera la valeur de B.

La méthode que nous venons d'employer est évidemment générale; donc, pour trouver l'intégrale (1), nous ferons

$$\psi_1(\alpha) = \int_0^\infty \varphi_1(x_1)\,e^{-\alpha x_1\sqrt{-1}}\,dx_1,$$

$$\psi_2(\alpha) = \int_0^\infty \varphi_2(x_2)\,e^{-\alpha x_2\sqrt{-1}}\,dx_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi_n(\alpha) = \int_0^\infty \varphi_n(x_n)\,e^{-\alpha x_n\sqrt{-1}}\,dx_n.$$

$$F(u) = \int_0^\infty e^{\alpha u\sqrt{-1}}\,\psi_1(\alpha)\,\psi_2(\alpha)\ldots\psi_n(\alpha)\,d\alpha;$$

et nous aurons

$$(7)\qquad A = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,F(u)\,du,$$

pourvu que, dans cette dernière intégrale, nous négligions la partie imaginaire.

NOTE

SUR LA LIGNE DE LONGUEUR DONNÉE QUI RENFERME UNE AIRE MAXIMUM SUR UNE SURFACE;

PAR M. CH. DELAUNAY.

Lorsqu'on cherche, parmi les diverses courbes planes isopérimètres, celle qui renferme une aire maximum, on trouve qu'en chacun de ses points elle a le même rayon de courbure; d'où l'on conclut immédiatement que cette courbe est un cercle. On peut se proposer de déterminer, de la même manière, parmi les diverses courbes isopérimètres tracées sur une surface quelconque, celle qui renferme une aire maximum sur cette surface : telle est la question dont je donne ici la solution.

Il est évident qu'on arrivera au même résultat, quant à la nature de la courbe cherchée, soit qu'on suppose que cette courbe forme à elle seule tout le contour de l'aire qui doit être un maximum, soit qu'on considère une partie de ce contour comme ayant une figure invariable, l'autre partie seulement étant formée par une portion de la courbe cherchée. Nous admettrons donc que l'aire soit limitée de trois côtés par des courbes se projetant sur le plan des xy suivant des lignes droites parallèles aux axes des x et des y : en sorte que l'expression de cette aire sera

$$\int_a^b dx \int_c^y dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}:$$

a, b, c étant des constantes; p et q désignant, comme à l'ordinaire, les dérivées partielles de z relatives à x et à y tirées de l'équation de la surface; et la limite supérieure de l'intégrale relative à y étant la valeur de y pour un point quelconque de la courbe cherchée. Cette courbe devra être déterminée de manière à rendre l'expression précédente un maximum, en même temps que l'intégrale

$$\int_a^b dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

conservera une valeur constante; c'est-à-dire qu'elle devra rendre la quantité

$$\int_a^b dx\int_c^y dy\sqrt{1+p^2+q^2}+m\int_a^b dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

un maximum absolu, m étant une constante.

Pour trouver ce maximum absolu, on devra satisfaire à l'équation

$$\int_a^b dx\left[\delta y\sqrt{1+p^2+q^2}+m\frac{\frac{dy}{dx}\frac{d\delta y}{dx}+\frac{dz}{dx}\frac{d\delta z}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}\right]=0.$$

Remarquons maintenant que, la courbe cherchée étant située tout entière sur la surface donnée, on a pour un point quelconque de cette courbe,

$$\frac{dz}{dx}=p+q\frac{dy}{dx},$$

et aussi

$$\delta z=q\delta y;$$

en vertu de ces relations, l'équation précédente deviendra

$$\int_a^b dx\left[\delta y\sqrt{1+p^2+q^2}+m\frac{\frac{dy}{dx}\frac{d\delta y}{dx}+\left(p+q\frac{dy}{dx}\right)\frac{dq\delta y}{dx}}{\sqrt{1+p^2+2pq\frac{dy}{dx}+(1+q^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\right]=0.$$

Si nous employons enfin le procédé ordinaire de l'intégration par parties, pour dégager δy dans tous les termes, et que nous égalions le coefficient de δy à zéro, nous trouverons l'équation suivante,

$$\sqrt{1+p^2+q^2}-m\frac{d}{dx}\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+p^2+2pq\frac{dy}{dx}+(1+q^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}-mq\frac{d}{dx}\frac{p+q\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+p^2+2pq\frac{dy}{dx}+(1+q^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}=0,$$

qui est l'équation différentielle de la courbe cherchée. En développant les calculs, désignant par r, s, t les dérivées partielles $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, tirées de l'équation de la surface, et remarquant que

$$\sqrt{1+p^2+2pq\frac{dy}{dx}+(1+q^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{ds}{dx},$$

on mettra aisément cette équation sous la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2}(1+p^2+q^2)+\left[r+2s\frac{dy}{dx}+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\left(q-p\frac{dy}{dx}\right)$$
$$=\frac{1}{m}\frac{ds^3}{dx^3}\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Pour interpréter cette équation différentielle, nous prendrons l'équation du plan osculateur de la courbe, qui est

$$\left[p\frac{d^2y}{dx^2}-r\frac{dy}{dx}-2s\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-t\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right](x-x'$$
$$+\left[q\frac{d^2y}{dx^2}+r+2s\frac{dy}{dx}+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right](y-y')-\frac{d^2y}{dx^2}(z-z')=0,$$

et l'équation du plan tangent à la surface, au même point, qui est

$$z-z'=p(x-x')+q(y-y');$$

x', y', z' étant les coordonnées courantes de ces deux plans.

En désignant par θ l'angle de ces deux plans, et calculant le cosinus de cet angle, on trouvera la valeur suivante,

$$\cos\theta=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}(1+p^2+q^2)+\left[r+2s\frac{dy}{dx}+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\left(q-p\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{1+p^2+q^2}\sqrt{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2(1+p^2+q^2)+\left[r+2s\frac{dy}{dx}+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]+2\left[r+2s\frac{dy}{dx}+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{d^2y}{dx^2}\left(q-p\frac{dy}{dx}\right)}}$$

D'un autre côté, en nommant ρ le rayon de courbure de la courbe, on a

$$\frac{ds^2}{\rho^2}=\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2;$$

d'où, en développant,

$$\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{ds}{dx}\right)^6 = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2(1+p^2+q^2)+\left[r+2s\frac{dy}{dx}+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$
$$+2\left[r+2s\frac{dy}{dx}+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{d^2y}{dx^2}\left(q-p\frac{dy}{dx}\right).$$

En combinant cette relation avec la valeur de cos θ, on trouve

$$\frac{d^2y}{dx^2}(1+p^2+q^2)+\left[r+2s\frac{dy}{dx}+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\left(q-p\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\cos\theta\sqrt{1+p^2+q^2}}{\rho}\left(\frac{ds}{dx}\right)^3;$$

et par suite, l'équation différentielle de la courbe cherchée deviendra simplement

$$\rho = m\cos\theta.$$

Ainsi *cette courbe jouit de la propriété que, en chacun de ses points, son rayon de courbure est proportionnel au cosinus de l'angle formé par son plan osculateur et le plan tangent à la surface.*

Cette propriété peut être énoncée autrement : en effet, si l'on conçoit toutes les sphères qui contiennent le cercle osculateur de la courbe, et qui, par conséquent, ont un contact du second ordre avec cette courbe, leurs centres seront situés sur une perpendiculaire au plan osculateur, passant par le centre de courbure; et il est facile de voir que celle de ces sphères qui a son centre sur le plan tangent à la surface a pour rayon

$$\frac{\rho}{\cos\theta};$$

on peut donc dire que *en chaque point de la courbe de longueur donnée qui renferme une aire maximum sur une surface, la sphère qui contient le cercle osculateur de la courbe et dont le centre est sur le plan tangent à la surface, a un rayon constant.*

NOTE

SUR LA DÉTERMINATION D'UNE FONCTION ARBITRAIRE;

Par M. CELLÉRIER.

Cette Note a pour objet de déterminer la forme d'une fonction arbitraire soumise aux conditions suivantes :

Désignons par t, x, y, z, quatre variables qui seront, si l'on veut. le temps et les trois coordonnées d'un point quelconque de l'espace ; et faisons

$$(1) \qquad \varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{M} e^{(ux+vy+wz+st)\sqrt{-1}} \, du\, dv\, dw,$$

en représentant par M une fonction donnée des variables u, v, w, par rapport auxquelles s'effectue l'intégration, et par s une fonction donnée de la quantité

$$\sqrt{u^2 + v^2 + w^2},$$

que nous désignerons par h.

Nommons φ' une autre fonction de x, y, z, t, de la forme

$$(2) \qquad \varphi' = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{M}' e^{(u'x+v'y+w'z+st)\sqrt{-1}} \, du'\, dv'\, dw',$$

en représentant par s une fonction connue de la quantité

$$h' = \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2},$$

mais telle qu'à une même valeur de s dans l'une et l'autre intégrale répondent des valeurs différentes de h et h'. Quant à M', c'est une fonction inconnue de u', v', w', qui doit être telle que l'on ait

$$\varphi' = \varphi,$$

quel que soit t, pour toutes les valeurs de x, y, z satisfaisant à l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2,$$

où l désigne une constante donnée. Notre but est précisément de trouver cette fonction M'.

Si l'on fait, dans la formule (1),

$$u = h\cos\alpha, \quad v = h\sin\alpha\cos 6, \quad w = h\sin\alpha\sin 6,$$

et dans la formule (2),

$$u' = h'\cos\alpha, \quad v' = h'\sin\alpha\cos 6, \quad w' = h'\sin\alpha\sin 6;$$

puis, dans l'une et l'autre,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$x = r\cos\psi, \quad y = r\sin\psi\cos\theta, \quad z = r\sin\psi\sin\theta,$$

et

$$\cos\psi\cos\alpha + \sin\psi\sin\alpha\cos(\theta - 6) = p.$$

Si, enfin, on considère à présent M et M' comme des fonctions, la première de h, α, 6, et la seconde de h', α, 6, on devra faire

$$du\,dv\,dw = h^2 \sin\alpha dh\,d\alpha\,d6,$$

$$du'\,dv'\,dw' = h'^2 \sin\alpha dh' d\alpha\,d6;$$

puis, étendre les intégrations relatives à h et h' de 0 à l'infini; celles relatives à α de 0 à π, π étant le rapport de la circonférence au diamètre, et enfin celles relatives à 6 de 0 à 2π.

On trouvera ainsi

$$\varphi = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathrm{M} e^{(hrp+st)\sqrt{-1}}\, h^2 \sin\alpha dh\,d\alpha\,d6,$$

$$\varphi' = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathrm{M}' e^{(h'rp+st)\sqrt{-1}}\, h'^2 \sin\alpha dh' d\alpha d6.$$

L'équation

$$\varphi = \varphi'$$

devra avoir lieu, quels que soient t, ψ, θ, et pour la valeur particulière,

$$r = l.$$

Il faut d'abord pour cela que les éléments de φ et φ' correspondant à une même valeur de s soient égaux ; et en considérant h, h' comme des fonctions connues de s, et changeant par conséquent dh et dh' en

$$\frac{dh}{ds}\,ds, \quad \frac{dh'}{ds}\,ds,$$

sous les signes d'intégration, il en résulte

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & h^2 \frac{dh}{ds} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{M}\, e^{hlp\sqrt{-1}} \sin \alpha\, d\alpha\, d\text{\textbeta} \\ & = h'^2 \frac{dh'}{ds} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{M}' e^{h'lp\sqrt{-1}} \sin \alpha\, d\alpha\, d\text{\textbeta}, \end{aligned} \right.$$

relation qui doit avoir lieu quels que soient s, ψ, θ.

On sait qu'en désignant par ρ une quantité réelle numériquement inférieure à l'unité, et par P_n le coefficient de ρ^n dans le développement de

$$(1 - 2p\rho + \rho^2)^{-\frac{1}{2}},$$

suivant les puissances ascendantes de ρ, on aura, quelle que soit la fonction de p représentée par $f(p)$,

$$(4) \qquad f(p) = \sum \left(\frac{2n+1}{2}\right) \mathrm{P}_n \int_{-1}^{+1} f(p) \mathrm{P}_n\, dp,$$

la somme $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs du nombre entier n, depuis 0 jusqu'à l'infini.

Appliquons ce mode de développement à la fonction

$$e^{hlp\sqrt{-1}} = \cos(hlp) + \sqrt{-1} \sin(hlp),$$

on trouvera

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos(hlp) &= \sum \left(\frac{2n+1}{2}\right) \mathrm{P}_n \int_{-1}^{+1} \cos(hlp)\, \mathrm{P}_n\, dp, \\ \sin(hlp) &= \sum \left(\frac{2n+1}{2}\right) \mathrm{P}_n \int_{-1}^{+1} \sin(hlp)\, \mathrm{P}_n\, dp. \end{aligned} \right.$$

On sait que l'expression P_n est donnée par la formule

$$P_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n.2^n} \frac{d^n(p^2-1)^n}{dp^n}.$$

D'ailleurs, comme $(p^2-1)^n$ et ses coefficients différentiels des $n-1$ premiers ordres s'annulent par la supposition de $p = \pm 1$, on trouvera en intégrant par partie, et faisant successivement n égal à un nombre pair $2m$ et à un nombre impair $2m+1$,

$$(6)\left\{\begin{aligned}
&\int_{-1}^{+1} \cos(hlp) \frac{d^{2m}(p^2-1)^{2m}}{dp^{2m}} dp = (-1)^m (hl)^{2m} \int_{-1}^{+1} (p^2-1)^{2m} \cos(hlp)\, dp,\\
&\int_{-1}^{+1} \sin(hlp) \frac{d^{2m}(p^2-1)^{2m}}{dp^{2m}} dp = (-1)^m (hl)^{2m} \int_{-1}^{+1} (p^2-1)^{2m} \sin(hlp)\, dp,\\
&\int_{-1}^{+1} \cos(hlp) \frac{d^{2m+1}(p^2-1)^{2m+1}}{dp^{2m+1}} dp = (-1)^m (hl)^{2m+1} \int_{-1}^{+1} (p^2-1)^{2m+1} \sin(hlp)\, dp,\\
&\int_{-1}^{+1} \sin(hlp) \frac{d^{2m+1}(p^2-1)^{2m+1}}{dp^{2m+1}} dp = (-1)^{m+1} (hl)^{2m+1} \int_{-1}^{+1} (p^2-1)^{2m+1} \cos(hlp)\, dp.
\end{aligned}\right.$$

Il est clair, en outre, que la deuxième et la troisième de ces valeurs sont nulles, parce que les intégrales

$$\int_{-1}^{+1} (p^2-1)^{2m} \sin(hlp)\, dp, \quad \int_{-1}^{+1} (p^2-1)^{2m+1} \sin(hlp)\, dp,$$

se composent d'éléments égaux deux à deux et de signes contraires.

En faisant, pour abréger, $hl = \gamma$, on a

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \cos \gamma p\, dp = \frac{\sin \gamma}{\gamma};$$

puis, en différentiant $2i$ fois par rapport à γ, i étant un entier quelconque,

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} p^{2i} \cos \gamma p\, dp = (-1)^i \frac{d^{2i}\left(\frac{\sin \gamma}{\gamma}\right)}{d\gamma^{2i}}$$
$$= \left[\frac{1}{\gamma} - \frac{2i(2i-1)}{\gamma^3} + \frac{2i(2i-1)(2i-2)(2i-3)}{\gamma^5} - \ldots\right] \sin \gamma$$
$$+ \left[\frac{2i}{\gamma} - \frac{2i(2i-1)(2i-2)}{\gamma^3} + \frac{2i(2i-1)(2i-2)(2i-3)(2i-4)}{\gamma^5} - \ldots\right] \frac{\cos \gamma}{\gamma}.$$

En développant $(p^2-1)^n$ dans l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1}(p^2-1)^n\cos\gamma p\,dp,$$

et calculant chaque terme par la formule précédente, on trouvera

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(p^2-1)^n\cos\gamma p\,dp\\
&=\frac{\sin\gamma}{\gamma}\left[1-\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\ldots\right]\\
&+\frac{\cos\gamma}{\gamma^2}\left[2n-\frac{n}{1}(2n-2)+\frac{n(n-1)}{1.2}(2n-4)-\ldots\right]\\
&-\frac{\sin\gamma}{\gamma^3}\left[2n(2n-1)-\frac{n}{1}(2n-2)(2n-3)+\frac{n(n-1)}{1.2}(2n-4)(2n-5)-\ldots\right]\\
&-\frac{\cos\gamma}{\gamma^4}\left[2n(2n-1)(2n-2)-\frac{n}{1}(2n-2)(2n-3)(2n-4)+\ldots\right]+\ldots,
\end{aligned}$$

série dont la loi est facile à saisir. Les coefficients de

$$\frac{\sin\gamma}{\gamma},\quad \frac{\cos\gamma}{\gamma^2},\quad -\frac{\sin\gamma}{\gamma^3},\quad -\frac{\cos\gamma}{\gamma^4},\ \text{etc.},$$

sont les valeurs des expressions

$$(x^2-1)^n,\quad \frac{d(x^2-1)^n}{dx},\quad \frac{d^2(x^2-1)^n}{dx^2},\ldots$$

quand, après avoir développé $(x^2-1)^n$ et effectué les différentiations, on pose $x=1$.

Or la valeur $x=1$ annule évidemment l'expression

$$(x^2-1)^n$$

et ses coefficients différentiels des $n-1$ premiers ordres.

Si donc l'on fait successivement $n=2m$ et $n=2m+1$, on aura

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(p^2-1)^{2m}\cos\gamma p\,dp\\
&=(-1)^m\left[\frac{\sin\gamma}{\gamma^{2m+1}}\frac{d^{2m}(x^2-1)^{2m}}{dx^{2m}}+\frac{\cos\gamma}{\gamma^{2m+2}}\frac{d^{2m+1}(x^2-1)^{2m}}{dx^{2m+1}}-\frac{\sin\gamma}{\gamma^{2m+3}}\frac{d^{2m+2}(x^2-1)^{2m}}{dx^{2m+2}}-\ldots\right],\\
&\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(p^2-1)^{2m+1}\cos\gamma p\,dp\\
&=(-1)^m\left[\frac{\cos\gamma}{\gamma^{2m+2}}\frac{d^{2m+1}(x^2-1)^{2m+1}}{dx^{2m+1}}-\frac{\sin\gamma}{\gamma^{2m+3}}\frac{d^{2m+2}(x^2-1)^{2m+1}}{dx^{2m+2}}-\text{etc.}\ldots\right],
\end{aligned}\right.$$

en faisant toujours $x=1$ après les différentiations.

En désignant par i. i' deux entiers quelconques, on a

$$\frac{d^i(x^2-1)^n}{dx^i} = \frac{d^i[(x-1)^n(x+1)^n]}{dx^i} = (x+1)^n \frac{d^i(x-1)^n}{dx^i} + \frac{n}{1}\frac{d(x+1)^n}{dx}\frac{d^{i-1}(x-1)^n}{dx^{i-1}} + \ldots;$$

puis, faisant successivement $i = n$, $i = n + i'$, et dans les deux cas $x = 1$, après les différentiations

$$\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} = (x+1)^n \frac{d^n(x-1)^n}{dx^n} = 1.2.3\ldots n.2^n,$$

$$\frac{d^{n+i'}(x^2-1)^n}{dx^{n+i'}} = \frac{(n+i')(n+i'-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots i'}\frac{d^{i'}(x+1)^n}{dx^{i'}}\frac{d^n(x-1)^n}{dx^n}$$

$$= 1.2.3\ldots n\, 2^n \frac{(n+i')(n+i'-1)(n+i'-2)\ldots(n-i'+1)}{2.4.6\ldots 2i'}.$$

Par conséquent, en faisant successivement $i' = 1, 2, 3,\ldots$ et substituant les résultats dans les formules (7), elles deviennent

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(p^2-1)^{2m}\cos\gamma p\, dp \\
&= (-1)^m\, 1.2.3\ldots(2m)\, 2^{2m}\left[\begin{aligned}&\frac{\sin\gamma}{\gamma^{2m+1}} + \frac{(2m+1)\,2m}{2}\frac{\cos\gamma}{\gamma^{2m+2}} \\ &\quad - \frac{(2m+2)(2m+1)\,2m(2m-1)}{2.4}\frac{\sin\gamma}{\gamma^{2m+3}} - \ldots\end{aligned}\right], \\
&\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(p^2-1)^{2m+1}\cos\gamma p\, dp \\
&= (-1)^m 1.2.3\ldots(2m+1)2^{2m+1}\left[\begin{aligned}&\frac{\cos\gamma}{\gamma^{2m+2}} - \frac{(2m+2)(2m+1)}{2}\frac{\sin\gamma}{\gamma^{2m+3}} \\ &\quad - \frac{(2m+3)(2m+2)(2m+1)\,2m}{2.4}\frac{\cos\gamma}{\gamma^{2m+4}} + \ldots\end{aligned}\right].
\end{aligned}\right.$$

Si dans les seconds membres de ces équations, on substituait partout

$$\sin(2\gamma - \gamma'),\quad \cos(2\gamma - \gamma'),$$

à $\sin\gamma$ et $\cos\gamma$, en désignant par γ' une constante indéterminée, ils coïncideraient évidemment avec les valeurs des expressions

$$(9)\quad 1.2.3\ldots(2m)\frac{d^{2m}\left[\dfrac{\sin(2\gamma-\gamma')}{\gamma^{2m+1}}\right]}{d\gamma^{2m}},\quad 1.2.3\ldots(2m+1)\frac{d^{2m+1}\left[\dfrac{\sin(2\gamma-\gamma')}{\gamma^{2m+2}}\right]}{d\gamma^{2m+1}},$$

obtenues en regardant γ' comme constante dans les différentiations relatives à γ. Mais si l'on fait $\gamma' = \gamma$ après les différentiations, comme

$$\sin(2\gamma - \gamma'), \text{ et } \cos(2\gamma - \gamma'),$$

se réduisent à $\sin\gamma$ et $\cos\gamma$, la substitution d'une de ces valeurs à l'autre sera permise dans cette hypothèse, et les deux formules (8) pourront être réduites à une seule, savoir

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(p^2-1)^n \cos\gamma p\,dp = 1.2.3\ldots n\,\frac{d^n\left[\dfrac{\sin(2\gamma-\gamma')}{\gamma^{n+1}}\right]}{d\gamma^n},$$

en posant $\gamma' = \gamma$ après les différentiations.

Comme d'ailleurs on a

$$\frac{d^n\left[\dfrac{\sin(2\gamma-\gamma')}{\gamma^{n+1}}\right]}{d\gamma^n} = \cos\gamma'\,\frac{d^n\left(\dfrac{\sin 2\gamma}{\gamma^{n+1}}\right)}{d\gamma^n} - \sin\gamma'\,\frac{d^n\left(\dfrac{\cos 2\gamma}{\gamma^{n+1}}\right)}{d\gamma^n},$$

valeur où γ' ne se trouve qu'en dehors des signes de la différentiation, on trouve, en y faisant immédiatement $\gamma' = \gamma$,

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(p^2-1)^n \cos\gamma p\,dp = 1.2.3\ldots n\left[\cos\gamma\,\frac{d^n\left(\dfrac{\sin 2\gamma}{\gamma^{n+1}}\right)}{d\gamma^n} - \sin\gamma\,\frac{d^n\left(\dfrac{\cos 2\gamma}{\gamma^{n+1}}\right)}{d\gamma^{n+1}}\right].$$

Si donc on fait, pour abréger,

$$\cos\gamma\,\frac{d^n\left(\dfrac{\sin 2\gamma}{\gamma^{n+1}}\right)}{d\gamma^n} - \sin\gamma\,\frac{d^n\left(\dfrac{\cos 2\gamma}{\gamma^{n+1}}\right)}{d\gamma^n} = f(\gamma, n),$$

les formules (6) deviendront

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\cos(hlp)\,\frac{d^{2m}(p^2-1)^{2m}}{dp^{2m}}\,dp = (-1)^m\,1.2.3\ldots(2m)(hl)^{2m} f(hl, 2m),$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\sin(hlp)\,\frac{d^{2m}(p^2-1)^{2m}}{dp^{2m}}\,dp = 0,$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\cos(hlp)\,\frac{d^{2m+1}(p^2-1)^{2m+1}}{dp^{2m+1}}\,dp = 0,$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\sin(hlp)\,\frac{d^{2m+1}(p^2-1)^{2m+1}}{dp^{2m+1}}\,dp = (-1)^{m+1}\,1.2.3\ldots(2m+1)(hl)^{2m+1} f(hl.\ 2m+1).$$

Ces valeurs étant substituées dans les formules (5), il en résultera

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} \cos(hlp) &= \sum (-1)^m \, (4m+1) \left(\frac{hl}{2}\right)^{2m} f(hl\,,\, 2m)\, \mathrm{P}_{2m}, \\ \sin(hlp) &= \sum (-1)^{m+1} (4m+3) \left(\frac{hl}{2}\right)^{2m+1} f(hl,\, 2m+1)\, \mathrm{P}_{2m+1}, \end{aligned} \right.$$

les sommes $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs entières de m depuis zéro jusqu'à l'infini. Ces séries sont rapidement convergentes, car l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} (p^2-1)^n \cos\gamma p\, dp = 1.2.3\ldots n f(\gamma, n),$$

décroissant évidemment quand n augmente, l'expression $f(\gamma, n)$ décroît aussi et même plus rapidement que

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}.$$

Les équations (10) donnent ensuite

$$(11)\qquad e^{hlp\sqrt{-1}} = \sum (-\sqrt{-1})^n (2n+1) \left(\frac{hl}{2}\right)^n f(hl, n)\, \mathrm{P}_n.$$

On trouverait, de même,

$$(12)\qquad e^{h'lp\sqrt{-1}} = \sum (-\sqrt{-1})^n (2n+1) \left(\frac{h'l}{2}\right)^n f(h'l, n)\, \mathrm{P}_n.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (3), et qu'on fasse, en même temps,

$$\mathrm{U}_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{M}\,\mathrm{P}_n \sin\alpha\, d\alpha\, d\text{ϐ},$$

$$\mathrm{U}'_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{M}'\mathrm{P}_n \sin\alpha\, d\alpha\, d\text{ϐ},$$

on aura

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} & h^2 \frac{dh}{ds} \sum (-\sqrt{-1})^n \left(\frac{hl}{2}\right)^n f(hl, n)\, \mathrm{U}_n \\ &= h'^2 \frac{dh'}{ds} \sum (-\sqrt{-1})^n \left(\frac{h'l}{2}\right)^n f(h'l, n)\, \mathrm{U}'_n. \end{aligned} \right.$$

D'après les propriétés connues des fonctions de ψ, θ, représentées par U_n, U'_n, on a, pour deux nombres entiers quelconques n' et n, pourvu qu'ils soient différents l'un de l'autre,

$$(14)\quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_{n'}U_n \sin\psi\,d\psi\,d\theta = 0, \qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_{n'}U'_n \sin\psi\,d\psi\,d\theta = 0.$$

et pour $n' = n$,

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_n U_n \sin\psi\,d\psi\,d\theta = \frac{4\pi}{2n+1} V_n, \\ &\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_n U'_n \sin\psi\,d\psi\,d\theta = \frac{4\pi}{2n+1} V'_n, \end{aligned}\right.$$

en indiquant par V_n, V'_n ce que deviennent U_n, U'_n quand on y change ψ, θ en α, ϵ; de sorte qu'en désignant par N ce que devient M par le changement inverse de α, ϵ en ψ, θ, on aura

$$(16)\quad V_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} N P_n \sin\psi\,d\psi\,d\theta.$$

En outre, M et M' seront données par les développements convergents

$$M = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + \ldots,$$
$$M' = V'_0 + V'_1 + V'_2 + V'_3 + \ldots.$$

Maintenant, l'équation (13) ayant lieu par hypothèse, pour toutes les valeurs de ψ, θ, si on la multiplie par

$$P_m \sin\psi\,d\psi\,d\theta,$$

où m est un entier quelconque, et qu'on intègre par rapport à ψ et θ entre les limites

$$\psi = 0, \quad \psi = \pi; \quad \theta = 0, \quad \theta = 2\pi;$$

tous les termes de $\sum$ disparaîtront dans les deux membres, sauf celui où $n=m$. En vertu des équations (14) et (15), on aura donc

$$h^{m+2}\frac{dh}{ds}f(hl, m)V_m = h'^{m+2}\frac{dh'}{ds}f(h'l, m)V'_m.$$

Cette relation donne la valeur de V'_m au moyen de V_m qui se tire de l'équation (16). Il en résulte donc

$$M' = V'_0 + V'_1 + V'_2 + \dots$$

$$= \frac{1}{4\pi} \frac{\frac{dh}{ds}}{\frac{dh'}{ds}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} N \sum \left\{ (2m+1) \frac{h^{m+2}}{h'^{m+2}} \frac{f(hl, m)}{f(h'l, m)} P_m \right\} \sin\psi \, d\psi \, d\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi} \frac{dh}{dh'} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} N \sum \left\{ (2m+1) \left(\frac{h'}{h}\right)^{m-1} \frac{\cos hl \frac{d^m\left(\frac{\sin 2hl}{l^{m+1}}\right)}{dl^m} - \sin hl \frac{d^m\left(\frac{\cos 2hl}{l^{m+1}}\right)}{dl^m}}{\cos h'l \frac{d^m\left(\frac{\sin 2h'l}{l^{m+1}}\right)}{dl^m} - \sin h'l \frac{d^m\left(\frac{\cos 2h'l}{l^{m+1}}\right)}{dl^m}} P_m \right\} \sin\psi \, d\psi \, d\theta.$$

De la sorte M' se trouve entièrement déterminé en fonction de α, β, puisque N se déduit de la fonction donnée M par un simple changement des lettres α, β en ψ, θ.

NOTE

SUR UNE CLASSE PARTICULIÈRE D'INTÉGRALES DÉFINIES;

Par M. CELLÉRIER.

Je me propose de montrer dans cette Note comment on peut arriver d'une manière très-simple à la valeur de l'intégrale

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{M}\,dx,$$

où M est une fonction entière quelconque de x, $\frac{1}{x}$, et des quantités

$$(2) \qquad \sin ax, \quad \cos ax, \quad \sin a'x, \quad \cos a'x, \quad \sin a''x, \quad \cos a''x, \ldots,$$

en désignant par a, a', a'',... des constantes réelles quelconques.

On suppose ici que l'intégrale (1) a une valeur finie et déterminée. Les termes de M qui changent de signe quand on remplace x par $-x$ disparaissant dans l'intégrale, on pourra n'avoir égard qu'aux termes pairs par rapport à x, et par conséquent n'étendre l'intégration que depuis zéro jusqu'à l'infini en doublant le résultat. Si $\frac{1}{x^n}$ est la plus haute puissance de $\frac{1}{x}$ contenue dans M, on n'aura donc qu'à examiner l'intégrale

$$(3) \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{N}}{x^n}\,dx,$$

où N est une fonction entière de x, et des quantités (2), qui contient seulement des puissances paires ou impaires de x, suivant que n est pair ou impair. Pour que l'expression (3) soit finie, il est nécessaire d'ailleurs que $\frac{\mathrm{N}}{x^n}$ se réduise à une quantité finie quand $x = 0$; il est clair également que la plus haute puissance de x contenue dans N devra être tout au plus x^{n-1}, sans quoi l'intégrale (3) ne convergerait pas vers une limite unique et déterminée quand, après y avoir remplacé la limite infinie de l'intégration par une quantité très-grande h, on ferait croître celle-ci jusqu'à l'infini.

Considérons d'abord le cas très-simple où

$$(4)\qquad \mathrm{N} = \mathrm{P}\cos ax + \mathrm{Q}\sin ax + \mathrm{R},$$

P, Q, R étant des fonctions entières de x, et a une constante réelle. Pour que $\frac{\mathrm{N}}{x^n}$ soit une fonction paire de x, il faudra d'abord que P et R contiennent seulement les puissances

$$x^{n-2},\quad x^{n-4},\quad x^{n-6},\ldots,$$

et Q seulement

$$x^{n-1},\quad x^{n-3},\quad x^{n-5},\ldots.$$

Cela posé, si l'on désigne par q le terme indépendant de x du coefficient de $\sin ax$ dans l'expression

$$\frac{d^{n-1}\mathrm{N}}{dx^{n-1}},$$

on aura

$$(5)\qquad \int_0^\infty \frac{\mathrm{N}}{x^n}\,dx = \frac{\pm q}{1.2.3\ldots(n-1)}\,\frac{\pi}{2},$$

en prenant le signe + ou − suivant que a est positive ou négative.

Ce théorème a lieu pour de petites valeurs de n, entre autres pour $n = 2$. En effet, dans ce cas, la valeur la plus générale de l'expression (4) étant

$$\mathrm{N} = m\cos ax + m'x\sin ax + m'',$$

où m, m', m'' sont des constantes, la supposition que $\frac{\mathrm{N}}{x^2}$ reste fini quand $x = 0$, donne

$$m + m'' = 0.$$

Par conséquent,

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{N}}{x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{m' x \sin ax - m(1-\cos ax)}{x^2}\,dx.$$

En même temps, la valeur de q est

$$q = m' - ma.$$

En intégrant par partie, on a

$$\int \frac{1-\cos ax}{x^2}\,dx = -\frac{1-\cos ax}{x} + \int \frac{a \sin ax}{x}\,dx;$$

puis, $\frac{1-\cos ax}{x}$ s'évanouissant aux limites 0 et ∞,

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos ax}{x^2}\,dx = a \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx,$$

et

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{N}}{x^2}\,dx = (m' - ma)\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \pm\, q\,\frac{\pi}{2};$$

le théorème se vérifie ainsi.

Donnant maintenant à n une valeur quelconque, je vais montrer que le théorème a lieu, s'il est exact pour le nombre $n-1$.

Soit

$$cx^{n-1} \sin ax$$

le terme de Q sin ax proportionnel à x^{n-1}; on aura

$$\int \frac{\mathrm{N} - cx^{n-1}\sin ax}{x^n}\,dx = -\frac{\mathrm{N} - cx^{n-1}\sin ax}{(a-1)\,x^{n-1}}$$

$$+\frac{1}{(n-1)}\int \frac{d\,(\mathrm{N} - cx^{n-1}\sin ax)}{dx}\,\frac{dx}{x^{n-1}}.$$

Comme

$$\frac{cx^{n-1}\sin ax}{x^n}, \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{N} - cx^{n-1}\sin ax}{x^n},$$

conservent une valeur finie pour $x = 0$, la quantité

$$\frac{\mathrm{N} - cx^{n-1}\sin ax}{x^{n-1}}$$

s'évanouit à cette limite. Il en est de même pour $x = \infty$, parce que $\mathrm{N} - cx^{n-1} \sin ax$ ne contient, hors des signes trigonométriques, que des puissances de x égales ou inférieures à x^{n-2}. D'ailleurs, dans l'expression

$$\frac{d(\mathrm{N} - cx^{n-1}\sin ax)}{dx} = \left[\frac{d\mathrm{P}}{dx} + a(\mathrm{Q} - cx^{n-1})\right]\cos ax$$
$$+ \left[\frac{d(\mathrm{Q} - cx^{n-1})}{dx} - a\mathrm{P}\right]\sin ax + \frac{d\mathrm{R}}{dx},$$

il est clair que le coefficient de $\sin ax$ contiendra seulement les puissances x^{n-2}, x^{n-4}, x^{n-6},..., et celui de $\cos ax$ et $\frac{d\mathrm{R}}{dx}$ seulement x^{n-3}, x^{n-5},..., conditions requises pour que le théorème soit applicable; et comme il a lieu pour le nombre $n - 1$, on aura

$$\int_0^\infty \frac{d(\mathrm{N} - cx^{n-1}\sin ax)}{dx}\,\frac{dx}{x^{n-1}} = \frac{\pm q'}{1.2.3\ldots(n-2)}\,\frac{\pi}{2},$$

q' étant le terme indépendant de x du coefficient de $\sin ax$ dans l'expression

$$\frac{d^{n-1}(\mathrm{N} - cx^{n-1}\sin ax)}{dx^{n-1}} = \frac{d^{n-1}\mathrm{N}}{dx^{n-1}} - c\,\frac{d^{n-1}(x^{n-1}\sin ax)}{dx^{n-1}}.$$

Le seul terme de cette espèce, donné par l'expression

$$\frac{d^{n-1}(x^{n-1}\sin ax)}{dx^{n-1}},$$

étant

$$(n-1)(n-2)\ldots3.2.1,$$

et celui qui provient de

$$\frac{d^{n-1}\mathrm{N}}{dx^{n-1}}$$

étant égal à q, on aura

$$q' = q - 1.2.3\ldots(n-1)c.$$

Par conséquent,

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{N} - cx^{n-1}\sin ax}{x^n}\,dx = \frac{1}{n-1}\int_0^\infty \frac{d(\mathrm{N} - cx^{n-1}\sin ax)}{dx}\,\frac{dx}{x^{n-1}}$$
$$= \frac{\pm q'}{1.2.3\ldots(n-1)}\,\frac{\pi}{2},$$

et

$$\int_0^\infty \frac{N}{r^n} = c\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx \pm \frac{q}{1.2.3\ldots(n-1)}\,\frac{\pi}{2} \mp c\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pm q}{1.2.3\ldots(n-1)}\,\frac{\pi}{2}$$

L'équation (5) a donc lieu pour le nombre n; et puisqu'elle est exacte pour $n = 2$, elle est généralement vraie.

Maintenant, faisons

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} N = P_1 \cos a_1x + Q_1 \sin a_1x + P_2 \cos a_2x + Q_2 \sin a_2x \\ + P_3 \cos a_3x + Q_3 \sin a_3x + \ldots + R, \end{aligned}\right.$$

en désignant par a_1, a_2, a_3,... des constantes, par P_1, P_2, P_3,... et R des polynômes contenant les seules puissances x^{n-2}, x^{n-4},... et par Q_1, Q_2,... des polynômes contenant seulement x^{n-1}, x^{n-3},...; ces dernières conditions sont nécessaires et suffisantes pour que

$$\frac{N}{r^n}$$

soit une fonction paire de x et s'évanouisse pour $x = \infty$. Si, en outre, elle reste finie pour $x = 0$, il faudra pour cela qu'en développant les sinus et cosinus contenus dans N, les puissances x^{n-2}, x^{n-4},... disparaissent identiquement. Si donc on désigne par

$$R_1,\quad R_2,\quad R_3,\ldots$$

l'ensemble des termes d'ordre inférieur à x^n fournis par le développement de

$$P_1 \cos a_1 x + Q_1 \sin a_1 x,$$
$$P_2 \cos a_2 x + Q_2 \sin a_2 x, \ldots,$$

on devra avoir identiquement

$$R + R_1 + R_2 + R_3 + \ldots = 0,$$

et N prendra la forme

$$N = P_1 \cos a_1x + Q_1 \sin a_1x - R_1 + P_2 \cos a_2x + Q_2 \sin a_2x - R_2 + \ldots$$

Les expressions

$$\frac{\mathrm{P}_1 \cos a_1 x + \mathrm{Q}_1 \sin a_1 x - \mathrm{R}_1}{x^n},$$

$$\frac{\mathrm{P}_2 \cos a_2 x + \mathrm{Q}_2 \sin a_2 x - \mathrm{R}_2}{x^n}, \ldots$$

étant toutes des fonctions paires qui restent finies pour $x = 0$ et s'évanouissent pour $x = \infty$, l'équation (5) aura lieu pour chacune d'elles; en ajoutant les résultats, on aura

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{N}}{x^n}\, dx = \frac{\pm q_1 \pm q_2 \pm q_3 \pm \ldots}{1.2.3\ldots(n-1)} \frac{\pi}{2},$$

les quantités q_1, q_2.... étant les termes indépendants de x des coefficients respectifs de

$$\sin a_1 x, \quad \sin a_2 x, \ldots$$

dans l'expression

$$\frac{d^{n-1}\mathrm{N}}{dx^{n-1}},$$

et le signe + ou — devant être choisi devant chacun d'eux suivant que celle des quantités a_1, a_2,... à laquelle il correspond est positive ou négative.

Toute fonction entière N de x, et des expressions (2), telle que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{N}}{x^n}\, dx$$

ait une valeur finie et déterminée, peut être ramenée à la forme (6); mais il n'est pas nécessaire d'opérer cette réduction pour connaître la somme

$$(7) \qquad \pm q_1 \pm q_2 \pm q_3 \ldots.$$

et par conséquent la valeur de l'intégrale. Il suffira de former l'expression

$$\frac{d^{n-1}\mathrm{N}}{dx^{n-1}},$$

et après avoir supprimé tous les termes qui contiennent x hors des signes sinus ou cosinus, de calculer l'expression (7) pour chacun de ceux qui restent, ce qui peut se faire immédiatement sans autre réduction. On reconnaîtra, par exemple, que cette somme, pour un terme de la forme

$$\sin ax \cos a'x,$$

est égal à ± 1 ou à 0 suivant que $a - a'$ et $a + a'$ sont ou non de même signe. Généralement elle est égale à + 1 pour un terme

$$\sin ax\,(\cos a'x)^{\alpha}\,(\cos a''x)^{\beta}\,(\cos a'''x)^{\gamma}\ldots$$

si a étant positif surpasse la somme des valeurs numériques de

$$\alpha a',\quad \beta a'',\quad \gamma a''',\ldots.$$

L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{N}\,dx}{(x-h)^n},$$

où h est une constante réelle, se ramène aux précédentes en changeant x en $h + x$. Il en sera de même de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{N}\,dx}{\mathrm{F}(x)},$$

où $\mathrm{F}(x)$ est une fonction entière de x. On décomposera chaque terme de

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{F}(x)}$$

en fractions rationnelles. Celles qui correspondent à des racines réelles de

$$\mathrm{F}(x) = 0$$

pourront s'intégrer par la méthode précédente. Celles, au contraire, qui dépendent des racines imaginaires étant de la forme

$$\frac{\mathrm{N}}{(x^2 + r^2)^n},$$

où r est une constante réelle, s'intégreront aisément en les déduisant des formules connues

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{x^2+r^2} = \frac{e^{-ar}}{r}\frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\infty \frac{x\sin ax\,dx}{x^2+r^2} = e^{-ar}\frac{\pi}{2},$$

par des différentiations par rapport à r.

Tous les résultats qui précedent ont beaucoup d'analogie avec ceux auxquels conduit le calcul des résidus, et pourraient sans doute être obtenus par ce calcul. Mais j'ai pensé qu'il ne serait pas inutile d'y arriver directement. Sans déterminer aucune intégrale définie qui ne pût être connue par d'autres méthodes, ils pourront servir à en abréger le calcul.

SUR UNE REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES DE PREMIÈRE ESPÈCE.

(Extrait d'une Lettre adressée à M. LIOUVILLE. — 11 avril 1843.)

PAR M. WILLIAM **ROBERTS** (DE DUBLIN).

« Voici un résultat de géométrie que j'ai trouvé, et qui me semble avoir quelque degré d'intéret.

» Étant donnée la base d'un triangle, dont le rectangle formé par les côtés est égal au carré de la demi-base, on sait que le lieu du sommet est la lemniscate de Bernoulli, et que sa longueur peut s'exprimer par une fonction elliptique de premiere espece, le module étant sin 45°.

» Cherchons donc une courbe sphérique à laquelle appartient une propriété analogue. Soit $2y$ la base commune des triangles sphériques, dont les côtés α et β sont liés par la relation

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha \sin\tfrac{1}{2}\beta = \sin^2\tfrac{1}{2}y,$$

et si l'on appelle θ l'arc d'un grand cercle du milieu de la base au sommet, et ψ l'angle qu'il fait avec la base, on aura, pour l'équation polaire du lieu des sommets,

$$(1 - \sin^2 y \sin^2\psi)\cos^2\tfrac{1}{2}\theta = \cos y.$$

La forme de cette courbe sera semblable à celle de la lemniscate; et son arc, compté depuis l'extrémité du demi-axe, sera aussi exprimé par une fonction de la première espèce, dont le module est toujours plus petit que sin 45°. L'amplitude φ de la fonction sera déterminée par l'équation

$$\sqrt{\cos y} \operatorname{tang} \psi = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + \cos y \cos^2 \varphi}},$$

et $\sqrt{\left(\frac{\cos y}{1 + \cos y}\right)}$ sera le module.

» Ceci, avec l'aide des transformations dues à Lagrange et à M. Jacobi, fournit tres-simplement une représentation géométrique de la première transcendante elliptique, ce que Legendre a beaucoup désiré.

» J'ai d'autres résultats du même genre, que je serai charmé de vous communiquer, si vous considérez ce que j'ai donné comme digne de votre attention. »

* * *

SUR L'ÉQUATION

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0\,;$$

Par J. LIOUVILLE.

Soit u une intégrale particulière de l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0; \tag{1}$$

en sorte que l'on ait

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0,$$

et par conséquent

$$\frac{d\frac{du}{dx}}{dx} = -\frac{d\frac{du}{dy}}{dy}.$$

La quantité

$$\frac{du}{dx}dy - \frac{du}{dy}dx$$

sera dès lors une différentielle exacte. Posons donc

$$\int\left(\frac{du}{dx}dy - \frac{du}{dy}dx\right) = v,$$

et par suite

$$\frac{dv}{dy} = \frac{du}{dx}, \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{du}{dy}. \tag{2}$$

De là résultera sans difficulté

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = 0,$$

d'où l'on conclut que v est aussi une intégrale de l'équation (1). De plus on aura évidemment

$$\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}\frac{dv}{dy}=0.$$

Les courbes représentées par l'une ou l'autre des deux équations

$$u=constante,\quad v=constante,$$

sont donc du genre de celles que M. Lamé nomme *isothermes;* et chacune des courbes du premier système $u=$ *constante* coupe à angle droit toutes les courbes du second système.

Maintenant désignons par α, β deux variables nouvelles, et posons

$$(3)\qquad u=\alpha,\quad v=\beta,$$

ce qui nous permettra d'exprimer x et y, et par suite φ, en fonction de α et β. Il nous viendra, en ayant égard aux relations (3) et (2),

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}=\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2-2\frac{d^2\varphi}{d\alpha d\beta}\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}+\frac{d^2\varphi}{d\beta^2}\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d\varphi}{d\beta}\frac{d^2v}{dx^2},$$

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2}=\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}\left(\frac{du}{dy}\right)^2+2\frac{d^2\varphi}{d\alpha d\beta}\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}+\frac{d^2\varphi}{d\beta^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d\varphi}{d\beta}\frac{d^2v}{dy^2};$$

ajoutant donc pour égaler la somme à zéro, puis supprimant les termes en $\frac{d\varphi}{d\alpha}$, $\frac{d\varphi}{d\beta}$, dont les coefficients sont nuls, et divisant par $\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2$, on a

$$(4)\qquad \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}+\frac{d^2\varphi}{d\beta^2}=0.$$

Cette transformation de l'équation (1) dans l'équation (4) a été utilement employée par M. Lamé dans la théorie de la chaleur. Pour l'opérer, il faut connaître les deux fonctions u et v. Notre but était ici de montrer comment l'une d'elles (u par exemple) étant connue, l'autre s'en déduit immédiatement.

L'équation (1) étant satisfaite soit par $\varphi=x$, soit par $\varphi=y$, l'équation (4) doit l'être également, en sorte que

$$(5)\qquad \frac{d^2x}{d\alpha^2}+\frac{d^2x}{d\beta^2}=0,\quad \frac{d^2y}{d\alpha^2}+\frac{d^2y}{d\beta^2}=0.$$

Donc si l'on regarde α et β comme les coordonnées rectangulaires d'un point, et x, y comme des fonctions de α, β, chacune des équations

$$x=constante,\quad y=constante,$$

représentera un système de courbes *isothermes*. J'ajoute que les courbes du premier système coupent à angles droits celles du second.

Différentions, en effet, l'équation $u = \alpha$ par rapport à α et β successivement : nous obtiendrons

$$\frac{du}{dx}\frac{dx}{d\alpha} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{d\alpha} = 1, \quad \frac{du}{dx}\frac{dx}{d\beta} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{d\beta} = 0.$$

L'équation $v = \beta$, eu égard aux relations (2), fournira de même

$$\frac{du}{dy}\frac{dx}{d\alpha} - \frac{du}{dx}\frac{dy}{d\alpha} = 0, \quad \frac{du}{dy}\frac{dx}{d\beta} - \frac{du}{dx}\frac{dy}{d\beta} = -1.$$

De ces quatre équations, en posant pour abréger,

$$\Delta = \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2,$$

on tire

$$\frac{dy}{d\beta} = \frac{1}{\Delta}\frac{du}{dx} = \frac{dx}{d\alpha}, \quad \frac{dy}{d\alpha} = -\frac{1}{\Delta}\frac{du}{dy} = -\frac{dx}{d\beta},$$

et par conséquent

$$\frac{dy}{d\alpha}\frac{dx}{d\alpha} + \frac{dy}{d\beta}\frac{dx}{d\beta} = 0,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

La réciprocité établie par nos calculs entre les fonctions u, v ou α, β de x, y, et les fonctions x, y de α, β, réciprocité qui se retrouve même dans les formules

$$\frac{dy}{d\beta} = \frac{dx}{d\alpha}, \quad \frac{dy}{d\alpha} = -\frac{dx}{d\beta},$$

analogues aux formules (2) et dont les équations (5) sont, du reste, une conséquence immédiate, méritait, je crois, d'être indiquée. Au surplus, les résultats auxquels nous venons d'arriver peuvent aussi se déduire de l'intégrale sous forme finie qui vérifie l'équation (1), ou plutôt de cette remarque que $u + v\sqrt{-1}$ se réduit à une simple fonction de $x + y\sqrt{-1}$. Mais il paraît plus convenable d'éviter l'emploi des imaginaires.

SUR LES NOMBRES PREMIERS COMPLEXES QUE L'ON DOIT CONSIDÉRER DANS LA THÉORIE DES RÉSIDUS DE CINQUIÈME, HUITIÈME ET DOUZIÈME PUISSANCE;

Par M. C.-G.-J. JACOBI [*],

(Extrait du *Journal de M. Crelle*, tome XIX. — Traduction de M. Faye.)

Dans ses recherches sur les résidus biquadratiques, M. Gauss a introduit les nombres complexes de la forme $a + b\sqrt{-1}$ comme modules ou comme diviseurs. Par là il a pu établir, sur le caractère biquadratique de deux nombres premiers complexes de la forme $a + b\sqrt{-1}$, une loi de réciprocité aussi simple et aussi complète que l'est ce fleuron de l'arithmétique la plus relevée, ce célèbre théorème fondamental sur les résidus quadratiques.

Mais, quelque simplicité que puisse apporter dans ces matières l'introduction des nombres complexes comme modules, elle n'en appartient pas moins aux plus profondes spéculations de la science; je dirai plus, il m'est impossible de croire que la seule arithmétique ait dirigé M. Gauss dans ces mystérieuses recherches; je penserais plutôt qu'il doit ces découvertes à l'étude des transcendantes elliptiques et probablement à l'espèce de celle qui donne la rectification des arcs de la lemniscate.

Par exemple, dans la théorie de la multiplication et de la division des arcs de la lemniscate, les nombres complexes de la forme $a+b\sqrt{-1}$ jouent précisément le rôle de nombres ordinaires. De même qu'on exprime rationnellement les fonctions trigonométriques des arcs de cercle multipliés par n, de même on peut multiplier les arcs de la lemniscate par un nombre complexe $a + b\sqrt{-1}$; de même qu'on divise le cercle en n parties par la résolution d'une équation du $n^{ième}$ degré, de même on peut diviser les arcs de la lemniscate en $a + b\sqrt{-1}$ parties par la résolution d'une équation du degré $a^2 + b^2$. Lorsqu'il s'agit de diviser un arc en 15 parties, on le partage en 3 et en 5, et on déduit de ces deux divisions la division cherchée; de même, lorsqu'il s'agit de diviser un arc de lemniscate en 17 parties, on le divise d'abord en $1 + 4\sqrt{-1}$ et en $1 - 4\sqrt{-1}$ parties, et on déduit de ces deux divisions celle en 17 parties.

---

[*] Lu à l'Académie royale de Berlin, le 16 mai 1839.

C'est ainsi que dans la recherche de chaque espèce particulière d'intégrale elliptique, pour peu qu'on veuille pénétrer leur nature, on se trouve inévitablement forcé d'introduire les nombres $a + b\sqrt{-1}$ comme diviseurs. Ces recherches de calcul intégral paraissent sans doute beaucoup plus compliquées et plus difficiles que les propositions ordinaires de la théorie des nombres, mais ce n'est pas toujours l'idée la plus simple qui se présente la première à l'esprit. M. Gauss assure, dans les *Disquisitiones arithmeticæ,* que sa méthode pour la division du cercle peut être appliquée à la lemniscate, et il promet un ample traité sur ce sujet, à une époque où il ne s'était certainement pas encore occupé des résidus biquadratiques.

C'est Abel qui, le premier, a su délier M. Gauss de sa promesse; il a du moins donné les premiers traits fondamentaux de l'extension à la lemniscate de la méthode de M. Gauss pour la division du cercle, dans son premier travail sur les transcendantes elliptiques publié par le Journal de M. Crelle. On résoudrait un problème aussi intéressant que difficile en interprétant géométriquement cette division de la lemniscate en $a + b\sqrt{-1}$ parties, et la détermination de la $p^{ième}$ partie d'un arc par sa division en $a + b\sqrt{-1}$ et en $a - b\sqrt{-1}$ parties. La géométrie, dans ces derniers temps, a assigné aux imaginaires une place dans son domaine, et les admirables travaux de M. Steiner sur ce sujet font espérer qu'elle finira par s'emparer complétement de ces idées abstruses.

Il n'était pas besoin d'idées nouvelles pour trouver les lois de la réciprocité cubique; il suffisait pour cela d'introduire d'une manière tout à fait analogue, comme modules ou comme diviseurs, les nombres complexes de la forme $\frac{a + b\sqrt{-3}}{2}$ ou d'autres semblables qui sont composés des racines cubiques de l'unité. On peut aussi rattacher ces recherches à la théorie de quelques intégrales elliptiques particulières. La loi de réciprocité pour les résidus cubiques, dont j'ai donné communication dans une Note précédente, est encore plus simple que celle que M. Gauss a posée pour les résidus biquadratiques, et elle se déduit immédiatement des formules connues pour la division du cercle.

Maintenant que M. Gauss a exposé, dans son second Mémoire sur les résidus biquadratiques, les éléments des nombres complexes de la forme $a + b\sqrt{-1}$, il reste encore à démêler parmi les méthodes et les solutions de l'arithmétique celles qui peuvent s'appliquer aussi à ces nombres complexes. Par exemple, on voit facilement que la méthode de Lagrange pour réduire les formes quadratiques peut s'étendre aussi aux expressions telles que $py^2 + qyz + rz^2$, dans lesquelles p, q, r, y, z représentent des nombres complexes de cette forme. Pour prendre la forme complexe la plus simple, $y^2 - \sqrt{-1}.z^2$, on peut prouver que tout nombre $a + b\sqrt{-1}$ qui divise une telle forme doit avoir aussi cette forme, et la démonstration est complétement analogue à celle de cette proposition connue que tout nombre qui divise $y^2 + z^2$ doit aussi être la somme de deux carrés. Soit $p = a^2 + b^2$ un nombre premier de la forme $8n + 1$; on prouve aussitôt par les éléments de la théorie de ces nombres complexes que $\sqrt{-1}$ est le reste quadratique de $a + b\sqrt{-1}$, ou, ce qui revient au même, que $a + b\sqrt{-1}$ est diviseur d'une forme $y^2 - \sqrt{-1}\,.\,z^2$, et qu'ainsi il doit être de même forme en vertu du théorème cité plus haut. Si l'on partage cette expression en deux facteurs

$$y + \sqrt[4]{-1}\,.\,z \quad \text{et} \quad y - \sqrt[4]{-1}\,.\,z,$$

et qu'on pose

$$y = y' + y''\sqrt{-1}, \quad z = z' + z''\sqrt{-1},$$

où y', y'', z', z'' représentent des nombres réels entiers, alors on obtient $a + b\sqrt{-1}$ décomposé en deux facteurs,

$$y' + y''\sqrt{-1} + \sqrt[4]{-1}\left(z' + z''\sqrt{-1}\right),$$
$$y' + y''\sqrt{-1} - \sqrt[4]{-1}\left(z' + z''\sqrt{-1}\right),$$

c'est-à-dire en deux nombres complexes qui sont composés des racines huitièmes de l'unité. Representons par α la racine huitième de l'unité ou bien $\sqrt[4]{-1}$, et posons

$$\varphi\alpha = y' + y''\alpha^2 + z'a + z''\alpha^3,$$

il viendra

$$a + b\sqrt{-1} = a + b\alpha^2 = \varphi\alpha\,.\,\varphi\alpha^5;$$

et si l'on remplace α par α^3,

$$a - b\sqrt{-1} = a - b\alpha^2 = \varphi\alpha^3\,.\,\varphi\alpha^7.$$

Le nombre premier $p = a^2 + b^2$, de la forme $8n + 1$, est ainsi toujours le produit des quatre nombres complexes

$$\varphi\alpha, \quad \varphi\alpha^3, \quad \varphi\alpha^5, \quad \varphi\alpha^7.$$

On voit facilement que le produit $\varphi\alpha\,.\,\varphi\alpha^3$ garde la forme $c + d\sqrt{-2}$, et que le produit $\varphi\alpha\,.\,\varphi\alpha^7$ garde la forme $e + f\sqrt{2}$. Les trois manières dont on peut ranger ces quatre facteurs deux à deux donnent l'expression du même nombre premier sous trois formes

$$a^2 + b^2, \quad c^2 + 2d^2, \quad e^2 + 2f^2,$$

qui sont déduites ici d'une source commune, en sorte que les six nombres a, b, c, d, e, f sont exprimés rationnellement par quatre autres nombres y', y'', z', z''. Cette décomposition des nombres premiers de la forme $8n+1$ en quatre facteurs complexes composés des huit racines de l'unité peut aussi être obtenue par les méthodes ordinaires de l'arithmétique. Ces mêmes méthodes peuvent encore servir à démontrer que les nombres premiers de la forme $12n + 1$ peuvent être decomposés en quatre facteurs complexes formés des racines douzièmes de l'unité; les trois combinaisons deux à deux que l'on peut faire avec ces quatre facteurs donnent les expressions du nombre premier sous les trois formes

$$a^2 + b^2, \quad c^2 + 3d^2, \quad e^2 - 3f^2.$$

Pour trouver ces décompositions, on peut suivre des règles faciles d'après lesquelles M. le professeur Zornow, à Kœnigsberg, a eu la bonté de calculer pour moi ces décompositions pour les nombres premiers de la forme $8n + 1$ et $12n + 1$ jusqu'à 1000.

A l'époque où je m'occupais de ces considérations, je dirigeai mon attention sur certaines propriétés des nombres complexes auxquelles conduit la théorie de la division du cercle. J'ai remarqué dans la Note citée que, si λ est un diviseur de $p - 1$, le nombre premier p peut être représenté de plusieurs manières comme produit de deux nombres complexes formés des racines $\lambda^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Il arrive alors, et on peut le démontrer par la théorie de la division du cercle, que l'on peut multiplier entre eux plusieurs de ces nombres complexes et diviser ensuite leur produit par d'autres nombres complexes du même genre, de telle sorte que le quotient soit aussi un nombre complexe entier, et cela sans qu'on voie comment les nombres complexes du dénominateur disparaissent devant ceux du numérateur. Je me suis convaincu, en considérant directement cette circonstance remarquable, que ces facteurs complexes du nombre premier p doivent être, en général, combinés de nouveau, de telle sorte que si on les décompose en vrais nombres premiers complexes, alors ceux qui forment les facteurs du dénominateur se laissent détruire isolément par les facteurs du numérateur. Comme j'étais déjà parvenu à ce résultat par une voie tout à fait différente pour $\lambda = 8$ et pour $\lambda = 12$, je risquai aussi cette recherche un peu pénible pour $\lambda = 5$, et, en effet, je réussis, pour les nombres premiers de la forme $5n + 1$, à décomposer leurs deux facteurs composés des racines de l'unité en deux nouveaux facteurs entiers de même genre; et ainsi il n'était pas difficile de trouver une démonstration générale de la possibilité de cette décomposition. Les nombres premiers de la forme $5n + 1$, $8n + 1$, $12n + 1$ peuvent donc être représentés par les produits de quatre nombres complexes entiers qui sont respectivement composés des racines cinquième, huitième et douzième de l'unité. En outre, il est clair que pour les nombres premiers de la forme $5n + 1$, on pourra les représenter sous la forme $a^2 - 5b^2$ au moyen d'une autre combinaison par couple de leurs quatre facteurs.

Les nouveaux facteurs sont nécessairement des nombres premiers. Soit, par exemple, $f\alpha$ un de ces nombres, dans lequel α est pour les trois genres de nombres premiers respectivement une racine cinquième, huitième, douzième de l'unité; alors $f\alpha$ ne pourra être représenté par le produit de deux nombres entiers complexes de la même forme $\varphi\alpha$ et $\psi\alpha$, à moins que l'un de ces derniers ne soit tel que le produit de ses quatre valeurs ne soit égal à l'unité. Car l'on voit facilement que le produit des quatre valeurs de $f\alpha$, $\varphi\alpha$ et $\psi\alpha$ est un nombre réel; et comme le produit des quatre valeurs de $f\alpha$ est un nombre premier, les deux autres produits ne peuvent donner de nombres réels qui soient tous les deux et en même temps différents de l'unité, puisque leur produit devient égal au nombre premier.

Il reste à chercher la loi de réciprocité entre les nombres premiers fx, par la théorie des restes des puissances cinquième, huitième et douzième, et il serait peut-être facile de les trouver par une simple induction, puisque l'on connaît leur véritable forme, si une pareille induction ne devait être extrêmement pénible. Si l'on étend la loi de réciprocité aux nombres composés, comme je l'ai fait dans une Note précédemment communiquée à l'Académie sur les résidus quadratiques, cubiques et biquadratiques, on pourra déduire immédiatement de la théorie de la division du cercle les lois simples de réciprocité, par rapport aux restes des cinquième, huitième et douzième puissances, pour le cas particulier où l'un des nombres serait réel. Il reste à décider par des recherches ultérieures si de nouveaux artifices permettront de déduire de la même source les lois générales pour deux nombres complexes.

RECHERCHES
SUR L'ORBITE DE MERCURE ET SUR SES PERTURBATIONS.
DÉTERMINATION DE LA MASSE DE VÉNUS
ET DU DIAMÈTRE DU SOLEIL;

PAR U.-J. LE VERRIER.

> Adeò ut cœlestis hic Mercurius non minùs astronomos torserit, quàm terrestris alchimistas eludat.
>
> (RICCIOLI, *Almagest. nov.* lib. VII, sect. III, cap. I.

1. Nulle planète n'a demandé aux astronomes plus de soins et de peines que Mercure, et ne leur a donné en récompense tant d'inquiétudes, tant de contrariétés : en les comparant à celles dont le mercure terrestre était la source pour les alchimistes, Riccioli n'a fait qu'émettre l'opinion de tous les astronomes de son temps, et celle de ses prédécesseurs. « Si je connaissais quelqu'un, disait Mœstlinus, qui s'occupât » de Mercure, je me croirais obligé de lui écrire pour lui conseiller » charitablement de mieux employer son temps. » Les astronomes qui, depuis Mœstlinus et Riccioli, ont eu le malheur de s'attacher à la théorie de Mercure, Lalande en particulier, ont dû plus d'une fois se ranger à leur avis.

L'immense difficulté que Mercure a présentée aux anciens astronomes venait surtout de ce que la planète, plongée durant le jour dans les rayons du Soleil, ne pouvait être vue que le soir et le matin dans les vapeurs de l'horizon : en sorte qu'avant l'invention et le perfectionnement des lunettes, il était impossible de l'observer hors de ses élongations. Copernic, empêché par les brouillards de la Vistule, et par la longue durée des crépuscules en été, ne put jamais parvenir à voir Mercure. L'astronome Schoner est cité pour avoir fait à Nuremberg quelques observations de Mercure.

On n'avait donc sur cette planète qu'un petit nombre de données fort peu précises, pour arriver à la détermination d'une orbite très-excentrique. Il n'en résulta pas cependant de grands inconvénients jusqu'en l'année 1631. Les Tables et les observations, avant cette époque, étaient également mauvaises : le tout pouvait marcher ensemble, dans les mêmes limites d'erreur. Mais lorsque, après avoir construit ses Tables rudolphines, Kœpler en vint à prédire, en 1627, un passage de Mercure sur le Soleil pour le 7 novembre 1631, il comprit parfaitement qu'on allait se trouver désormais dans un grand embarras : qu'on serait obligé d'annoncer des phénomènes susceptibles d'être observés avec la plus grande précision, en se fondant sur des Tables très-défectueuses. Et cet immortel auteur n'osa pas assurer que son calcul pût représenter le lieu de Mercure dans ses conjonctions, avec une précision de plus d'un jour.

Kœpler mourut en 1631, quelques jours avant l'époque qu'il avait fixée pour un passage de Vénus sur le Soleil. Ce passage ne fut pas observé. Mais celui de Mercure arriva comme il avait été prédit, et fut aperçu en plusieurs points de l'Europe. Gassendi l'observa à la chambre obscure. Lorsque, le 7 novembre au matin, les nuages vinrent à se dissiper, Gassendi remarqua, sur l'image du Soleil, un point noir, très-net, qu'il prit pour une tache solaire. On attribuait alors à Mercure un diamètre de trois minutes, tandis que la tache avait un diamètre à peine sensible. Gassendi la compara aux bords du Soleil, dans l'intention de lui rapporter ensuite la position de Mercure s'il venait à paraître sur le disque du Soleil. Plusieurs fois, à différents intervalles, il reprit cette mesure ; et ce fut en voyant que la prétendue tache avait un mouvement propre très-rapide, qu'il comprit enfin que Mercure était sous ses yeux. Gassendi écrivit à Schickard pour lui rendre compte de son observation : « Plus heureux, dit-il, que tous ces philosophes hermétiques, occupés
» à chercher *Mercurium in sole* (c'est-à-dire la pierre philosophale),
» je l'ai trouvé, je l'ai contemplé là où personne avant moi ne
» l'avait vu. »

L'observation de Gassendi apprit que les Tables de Ptolomée étaient en erreur de $4^{\circ}25'$; les Tables prussiennes de Reinhold de 5°; celles de Longomontanus de $7^{\circ}13'$; celles de Lansberg de $1^{\circ}21'$; et enfin les Tables rudolphines de $14'24''$.

A l'occasion du passage de 1651, Skakerlœus entreprit un voyage aux grandes Indes, qui n'a servi à rien. Halley fut plus heureux, et en 1677 il fit à Sainte-Hélène la première observation complète d'un passage de Mercure sur le Soleil.

Hevelius observa avec soin le passage de 1661. Cependant Cassini fils, pour expliquer les erreurs des Tables de son père, s'en prit à l'emploi de l'observation d'Hevelius.

La Hire, dont les Tables paraissaient exactes suivant des observations méridiennes, prédit pour le 5 mai 1707 un passage de Mercure sur le Soleil, visible à Paris. Le 5 mai, le Soleil se lève dans tout son éclat, fournit sa course entière sans que le plus léger nuage l'obscurcisse, et Mercure ne paraît pas sur son disque. Le passage eut lieu dans la nuit, et fut entrevu le 6 au matin par Rœmer, à Copenhague.

En mai 1720, de l'Isle attendit vainement un passage indiqué par les Éphémérides, et qui n'eut pas lieu.

Lors du passage de 1753, Lalande alla observer à Meudon, afin de procurer à Louis XV la satisfaction de voir Mercure sur le Soleil. Les Tables de la Hire indiquaient l'entrée sur le disque du Soleil pour le 5 mai au soir; et celles de Halley pour le 6 mai à $6^{h}30^{m}$ du matin. Elle eut réellement lieu le 6 à $2^{h}30^{m}$ du matin.

Après un grand nombre d'essais infructueux sur la théorie de Mercure, Lalande se décide à apprendre le grec, afin de discuter de nouveau les observations qui nous ont été transmises par l'Almageste. Il espère enfin n'avoir plus qu'à jouir du fruit de ses longs travaux, lorsque le passage du 4 mai 1786 vient durement lui apprendre que Mercure est bien toujours cette planète qui, suivant l'opinion de Tycho-Brahé, n'est propre qu'à décrier la réputation des astronomes. « Au » lever du Soleil, dit Delambre, il pleuvait; tous les astronomes de » Paris étaient à leurs lunettes; mais, fatigués d'attendre, ils quittèrent » leur poste une demi-heure après le moment de la sortie calculée » (par les Tables de Lalande), ne conservant plus aucune espérance.... Je pris le parti d'attendre jusqu'après le moment in-

» diqué par les Tables de Halley; mais je n'eus pas besoin de tant
» de constance. L'observation arriva plus tard de trois quarts d'heure
» (53 minutes) que suivant Lalande, mais trois quarts d'heure plus
» tôt que suivant Halley. Le Monnier et Pingré, Lalande et son
» neveu, Méchain, Cassini et ses trois adjoints, trompés par l'annonce,
» avaient tous manqué l'observation. Je leur montrai la mienne le
» soir même; ils ne voulaient presque pas y croire. Ce fut la pre-
» mière observation que j'eus l'occasion de porter à l'Académie des
» Sciences, et c'est de là que je date ma carrière d'astronome ob-
» servateur. »

Lalande, toutefois, ne se rebuta pas, et il eut la satisfaction de prédire les passages de 1789, 1799 et 1802, avec plus d'exactitude.

M. de Lindenau s'est occupé de Mercure en 1813. Mais cet astronome ne me paraît pas avoir été heureux dans ses recherches. Un peu de soin l'aurait garanti des fautes nombreuses qu'on y rencontre.

La théorie de Mercure peut être reprise aujourd'hui avec avantage. Les observations méridiennes de cette planète ont été multipliées depuis quarante ans; et, grâce au zèle et à l'habileté persévérante de ses astronomes, l'Observatoire de Paris en possède plus qu'aucun autre de l'Europe. Dans ces derniers temps, depuis 1836 jusqu'en 1842, deux cents observations complètes de Mercure ont été faites, nombre prodigieux si l'on considère la difficulté qu'on a de voir cette planète dans nos climats, et qui a exigé qu'on en saisît attentivement toutes les occasions. Aussi n'est-il pas douteux qu'on en trouverait à peine la moitié autant dans les autres observatoires de l'Europe, quoique je me plaise d'ailleurs à reconnaître leur juste renommée.

Pour la précision, la prééminence appartient encore à la France, et de beaucoup. La discussion d'un grand nombre d'observations du Soleil m'a fait voir que l'erreur moyenne de chacune d'elles ne dépassait pas $\frac{1}{17}$ de seconde de temps à l'Observatoire de Paris. C'est un admirable résultat de la perfection des observations, et dont on a d'autant plus droit d'être fier, qu'il serait facile d'indiquer tel autre lieu dans lequel on observe aussi avec zèle et habileté, et où cependant l'erreur commise est à peu près du double.

Je dois à la libéralité scientifique de l'illustre directeur de notre Observatoire, M. Arago, d'avoir pu puiser sans réserve dans ces précieux recueils, encore inédits. J'ai fait tous mes efforts pour que l'exactitude de la théorie ne restât pas au-dessous de la précision des observations qui m'étaient confiées.

§ 1^er.

Éléments provisoires de l'orbite de Mercure. Diamètre et masse de la planète.

2. Le moyen mouvement, admis dans les Tables de M. de Lindenau, pour une année commune de 365 jours, et par rapport à l'équinoxe mobile, est de $49^s 23^\circ 43' 3'',613$; et par suite, ce mouvement en une année julienne est de $49^s 24^\circ 44' 26'',752$. La précession des équinoxes est supposée de $50'',11$.

J'adopterai, dans la suite de ce travail, la valeur suivante de la précession annuelle,

$$50'',2235 + t.0'',000\,244,$$

le temps t étant compté à partir du 1^er janvier 1800. Cette précession surpassant celle des Tables actuelles de Mercure de $0'',1135$, la différence devra être ajoutée au moyen mouvement annuel de la planète par rapport aux équinoxes, et ainsi le moyen mouvement pour une année julienne deviendra égal à $49^s 24^\circ 44' 26'',8655$. C'est ce nombre dont nous aurons à chercher plus tard la correction.

3. En retranchant la précession du moyen mouvement de Mercure rapporté à l'équinoxe, nous trouverons pour son moyen mouvement sidéral, exprimé en secondes sexagésimales, $5\,381\,016'',642$. Pour en déduire le demi-grand axe a de l'orbite, appelons n'' et n les moyens mouvements sidéraux de la Terre et de Mercure, m'' et m les masses respectives de ces deux planètes. Nous aurons

$$a = \left(\frac{n''}{n}\right)^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{m - m''}{3}\right);$$

n'' est égal à $1\,295\,977'',382$. Suivant ce que nous dirons plus bas de la masse de Mercure, et d'après la masse connue de la Terre, $(m'' - m)$ est égal à 0,000 002 16. On en déduit

$$a = 0,387\,098\,7.$$

On lit à la page 31 des anciennes Tables : « *Semi-axis major* » $a = 0,387\,093\,8$. » On voit que les deux dernières décimales de ce nombre sont inexactes.

4. *Époque pour l'an* 1800.

Les Tables donnent la longitude moyenne égale à $3^s\,18^\circ\,4'\,48'',3$, pour le midi du 31 décembre 1799, temps moyen de l'Observatoire du Séeberg. Nous la réduirons au midi moyen de l'Observatoire de Paris, en lui ajoutant $5'\,43'',6$. De plus, pour nous conformer aux usages du Bureau des Longitudes de France, nous transporterons l'époque de chaque année au minuit moyen qui la sépare de l'année précédente, en ajoutant à la longitude moyenne, déterminée pour le midi moyen du 31 décembre 1799, le mouvement pour douze heures, qui est de $2^\circ\,2'\,46'',3$. Nous obtiendrons ainsi l'époque ε suivante,

$$\varepsilon = 3^s\,20^\circ\,13'\,18'',2.$$

5. *Excentricité et longitude du périhélie.*

La Table VI de l'équation du centre, donnée par M. de Lindenau, suppose l'excentricité suivante, en 1800,

$$e = 0,205\,617\,9.$$

On lit cependant à la page 31 : « *Excentricitas* 1800 = 0,205 616 3. » Les deux dernières décimales sont inexactes.

La longitude du périhélie, au 1^{er} janvier 1800, a pour valeur

$$\varpi = 2^s\,14^\circ\,20'\,5'',8.$$

6. *Inclinaison et longitude du nœud.*

Leurs valeurs φ et θ sont, d'après les Tables, pour le 1er janvier 1800, les suivantes,

$$\varphi = 7^\circ\,0'\,5'',9,$$
$$\theta = 1^s\,15^\circ\,57'\,9'',0.$$

7. *Diamètre de la planète.*

On peut le déduire avec précision de l'intervalle de temps qui sépare le contact intérieur et le contact extérieur, lorsque la planète, dans ses passages, quitte le disque du Soleil. On peut aussi l'obtenir par des mesures micrométriques pendant la durée du passage. Il paraît être très-exactement de 3″,34 à la distance moyenne.

Je l'ai supposé, il est vrai, de 3″,23 à cette distance, dans la discussion des différents passages de la planète sur le Soleil; mais il n'en résultera aucun inconvénient: je ne considérerai que les contacts intérieurs, et j'introduirai comme inconnue dans les équations de condition la correction qu'on doit apporter à la différence des demi-diamètres du Soleil et de Mercure pour faire concorder les observations de l'entrée et de la sortie. On pourra donc toujours restituer à Mercure tel diamètre qu'on voudra, pour en déduire la valeur la plus exacte du diamètre du Soleil qu'il convient d'employer dans les observations des passages.

8. *Masse.*

En comparant les masses de la Terre, de Jupiter et de Saturne à leurs volumes, on a remarqué que les densités de ces planètes étaient à peu près en raison inverse de leurs moyennes distances au Soleil. Cette loi n'est pas vraie pour Vénus et Uranus. En l'étendant, toutefois, à Mercure, on en déduirait la densité de cette planète, et par suite sa masse, puisque son volume se conclut du diamètre apparent observé à la distance moyenne. On trouverait ainsi que la masse de la planete est à peu près un deux-millionième de celle du Soleil.

Dans plusieurs recherches, j'ai réduit cette masse à $\frac{1}{3\,000\,000}$, en considération des perturbations qu'elle a fait éprouver à la comete d'Encke, dans son passage au périhélie en 1838. Suivant M. Encke, la masse de Mercure serait encore plus faible, et égale à $\frac{1}{5\,000\,000}$ de la masse du Soleil. Nous conclurons donc seulement que cette masse est fort petite, et qu'elle ne peut avoir aucune influence sensible sur le calcul du grand axe de l'orbite.

§ II.

Formules employées au calcul des perturbations.

9. J'ai déterminé les inégalités des éléments et des coordonnées elliptiques par la méthode de la variation des constantes arbitraires. Le grand nombre d'acceptions sous lesquelles les différents auteurs ont souvent pris un même élément, m'oblige, quel que soit mon désir d'abréger, à bien préciser le sens des quantités que j'emploierai.

Désignons par m la masse de la planète troublée, par a le demi-grand axe de son orbite, par e son excentricité, par φ l'inclinaison du plan de l'orbite sur un plan fixe qui sera celui de l'écliptique en 1800.

Menons dans le plan fixe, par le centre du Soleil, une droite invariable pour servir d'origine aux longitudes projetées sur ce plan, et supposons que cette droite soit la ligne des équinoxes au 1$^{\text{er}}$ janvier 1800. Désignons par θ la longitude du nœud ascendant de m, comptée à partir de cette ligne.

Si dans le plan de l'orbite de m nous reportons, à partir du nœud ascendant et dans le sens rétrograde, un angle égal à θ, nous obtiendrons une droite dont la position sera toujours facile à retrouver, malgré les déplacements de l'orbite; nous la prendrons pour servir d'origine aux longitudes dans l'orbite. Nous représenterons par ε la longitude de l'époque au 1$^{\text{er}}$ janvier 1800, comptée à partir de cette origine; ϖ sera la longitude du périhélie dans l'orbite, rapportée à la même origine.

Enfin, désignons par les mêmes lettres, mais affectées d'un accent, les éléments de la planète perturbatrice, en sorte que m', a',... soient sa masse, son demi-grand axe, etc.....

Je prendrai pour la fonction perturbatrice, provenant de l'action de m' sur m, l'expression suivante

$$\mathrm{R} = (r^2 + r'^2 - 2\,rr'\cos v)^{-\frac{1}{2}} - \frac{r\cos v}{r'^2},$$

r et r' étant les rayons vecteurs des deux planètes, et v l'angle compris entre ces rayons vecteurs.

Si nous considérons R comme fonction du temps t et des éléments a, ε, e, ϖ, φ et θ de l'orbite troublée, nous aurons les expressions suivantes de la variation différentielle seconde du moyen mouvement $\rho = nt$, et des variations différentielles des éléments elliptiques :

$$\frac{1}{m'}\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{3an^2}{\mu}\frac{dR}{d\varepsilon},$$

$$\frac{1}{m'}\frac{da}{dt} = \frac{2a^2n}{\mu}\frac{dR}{d\varepsilon},$$

$$\frac{1}{m'}\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2a^2n}{\mu}\frac{dR}{da} + \frac{an}{\mu}\frac{e}{1+(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}}\frac{dR}{de} + \frac{an}{\mu}\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{dR}{d\varphi},$$

$$\frac{1}{m'}\frac{de}{dt} = -\frac{an}{\mu}\frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{e}\frac{dR}{d\varpi} - \frac{an}{\mu}\frac{e}{1+(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}}\frac{dR}{d\varepsilon},$$

$$\frac{1}{m'}\frac{d\varpi}{dt} = \frac{an}{\mu}\frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{e}\frac{dR}{de} + \frac{an}{\mu}\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{dR}{d\varphi},$$

$$\frac{1}{m'}\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{an}{\mu}\frac{(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sin\varphi}\frac{dR}{d\theta} - \frac{an}{\mu}\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{dR}{d\varepsilon} + \frac{dR}{d\varpi}\right),$$

$$\frac{1}{m'}\frac{d\theta}{dt} = \frac{an}{\mu}\frac{(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sin\varphi}\frac{dR}{d\varphi}.$$

μ représente le rapport de la somme des masses du Soleil et de la planète troublée, à la masse du Soleil.

10. En ne considérant d'abord que la première puissance des masses perturbatrices, comme on doit commencer par le faire dans tous les cas, et ce qui, d'ailleurs, suffit pour la théorie particulière de Mercure, à cause de la petitesse de ses inégalités, on pourra, dans la fonction R, remplacer r, r' et v par leurs valeurs en fonctions des éléments des orbites et du temps. La même simplification devra être apportée aux fonctions dérivées de R, qui deviendront ainsi susceptibles d'etre développées par rapport aux sinus et aux cosinus des multiples des longitudes moyennes. Et cela étant fait, l'intégration des formules précédentes fera connaître les inégalités finies $\delta\rho$, δa, $\delta\varepsilon$, δe, $d\varpi$, $\delta\varphi$ et $\delta\theta$ des éléments elliptiques en fonctions du temps.

On en conclura les variations finies de la longitude v dans l'orbite, du rayon vecteur r, et de la latitude héliocentrique λ par les formules suivantes, dans lesquelles z représente l'anomalie moyenne $nt + \varepsilon - \varpi$:

$$\begin{aligned}
\partial v &= \partial\rho + \partial\varepsilon \\
&+ \left\{\left(2e - \tfrac{1}{4}e^3\right)\cos z + \left(\tfrac{5}{2}e^2 - \tfrac{11}{12}e^4\right)\cos 2z + \tfrac{13}{4}e^3\cos 3z + \tfrac{103}{24}e^4\cos 4z\right\}\partial z \\
&+ \left\{\left(2 - \tfrac{3}{4}e^2\right)\sin z + \left(\tfrac{5}{2}e - \tfrac{11}{6}e^3\right)\sin 2z + \left(\tfrac{13}{4}e^2 - \tfrac{215}{64}e^4\right)\sin 3z + \tfrac{103}{24}e^3\sin 4z\right\}\partial e;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial r &= \left\{\left(1 + \tfrac{1}{2}e^2\right) - \left(e - \tfrac{3}{8}e^3\right)\cos z - \tfrac{1}{2}e^2\cos 2z\right\}\partial a \\
&+ \left\{ae - a\left(1 - \tfrac{9}{8}e^2\right)\cos z - ae\cos 2z - \tfrac{9}{8}ae^2\cos 3z\right\}\partial e \\
&+ \left\{a\left(e - \tfrac{3}{8}e^3\right)\sin z + ae^2\sin 2z\right\}\partial z;
\end{aligned}$$

$$\partial\lambda = \sin(v - \theta)\,\partial\varphi - \cos(v - \theta)\tang\varphi\,\partial\theta.$$

Cette dernière formule suppose, selon l'usage des Tables, qu'on prenne la longitude troublée pour argument de la latitude.

11. La réduction en série de la fonction R peut s'effectuer par différentes méthodes que j'ai suivies tour à tour suivant les circonstances. On peut développer algébriquement chacun de ses termes suivant les puissances des excentricités et des inclinaisons. J'ai publié des Tables complètes et exactes des valeurs numériques des différents coefficients qui entrent dans les expressions auxquelles on est conduit par cette méthode. Ce mode de développement offre cet avantage, que la fraction R étant une fois réduite en série, on en déduit immédiatement les développements de ses dérivées partielles par la différentiation. Mais, d'un autre côté, on est obligé, pour ne pas tomber dans des longueurs inextricables, de ne conserver que ceux des termes qui peuvent devenir sensibles; c'est une élimination délicate, et dans laquelle on peut s'égarer.

On évite ce dernier inconvénient en calculant directement la valeur numérique des coefficients de la fonction perturbatrice par des intégrales doubles. C'est une marche sûre, mais très-pénible; le développement des fonctions dérivées se déduisant alors moins simplement de celui de la fonction R, même en s'aidant des relations que j'indiquerai plus bas comme moyen de vérification. On pourra souvent conserver en partie les avantages qu'offrent les deux méthodes, en les réunissant comme je vais l'indiquer sommairement.

12. Soient l' et l les longitudes moyennes $n't + \varepsilon'$ et $nt + \varepsilon$ de deux planètes m' et m, et posons, en général, pour l'expression du développement de la fonction perturbatrice :

$$\mathrm{R} = \sum (i', i) \sin (i'l' - il) + \sum [i', i] \cos (i'l' - il).$$

Dans la méthode des intégrales doubles, on commencera par lui donner la forme

$$\mathrm{R} = \sum \mathrm{A}_{s,i'} \sin i'l' + \sum \mathrm{A}_{c,i'} \cos i'l',$$

$\mathrm{A}_{s,i'}$ et $\mathrm{A}_{c,i'}$ étant des fonctions de la longitude vraie et du rayon vecteur de m, des éléments de l'orbite de m', et de l'inclinaison relative des orbites des deux planètes. On déterminera par interpolation les valeurs numériques de $\mathrm{A}_{s,i'}$ et $\mathrm{A}_{c,i'}$ pour des longitudes moyennes de m équidistantes entre elles ; puis, par une seconde interpolation, on en déduira les valeurs des différents coefficients (i', i) et $[i', i]$. La première interpolation peut être évitée, en formant l'expression algébrique des quantités $\mathrm{A}_{s,i'}$ et $\mathrm{A}_{c,i'}$.

Bornons-nous à la première partie de l'expression n° 9 de R, la seule qui fournisse les inégalités à longue période pour lesquelles il est surtout commode d'opérer, comme je l'indique ici. En y remplaçant le cosinus de l'angle v par sa valeur en fonction des longitudes vraies t' et t, comptées de l'intersection mutuelle des orbites, et en fonction de l'inclinaison relative Φ de ces orbites, cette expression deviendra

$$\mathrm{R} = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos t \cos t' - 2rr' \cos \Phi \sin t \sin t')^{-\frac{1}{2}} ;$$

nous avons à la développer suivant les sinus et les cosinus des multiples de la longitude moyenne l', en attribuant à t et à r des valeurs particulières.

Si nous négligeons d'abord l'excentricité de m', r' et t' se réduiront à a' et à l', et en désignant par R_0 ce que devient alors R, nous aurons

$$R_0 = [a'^2 + r^2 - 2a'r \cos t (\cos l' + \cos \Phi \operatorname{tang} t \sin l')]^{-\frac{1}{2}}.$$

En posant

$$\operatorname{tang} \tau = \cos \Phi \operatorname{tang} t, \quad \text{et} \quad \frac{\cos t}{\cos \tau} = \cos \lambda,$$

il viendra plus simplement

$$R_0 = [a'^2 + r^2 - 2a'r \cos \lambda \cos (l' - \tau)]^{-\frac{1}{2}},$$

τ étant la distance de m à son nœud, projetée sur l'orbite de m', et λ la latitude de m au-dessus du plan de l'orbite de m'.

Posons actuellement,

$$\begin{aligned} K(1 + \alpha^2) &= a'^2 + r^2, \\ K\alpha &= a'r \cos \lambda, \end{aligned}$$

deux relations dont on déduira les valeurs de α et de K. La valeur de α en particulier dépendra de l'équation réciproque,

$$\alpha^2 - \frac{1}{\cos \lambda}\left(\frac{a'}{r} + \frac{r}{a'}\right)\alpha + 1 = 0.$$

Parmi les deux racines positives que fournit cette équation, on prendra celle qui est plus petite que l'unité, et l'on aura

$$R_0 = K^{-\frac{1}{2}}[1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos (l' - \tau)]^{-\frac{1}{2}}.$$

On sait développer cette expression, et en posant

$$R_0 = K^{-\frac{1}{2}} \sum b_{\frac{1}{2}}^{(i')} \cos i'(l' - \tau),$$

i' ayant toutes les valeurs entières et positives, zéro compris, on trouvera pour les parties de $A_{s,i'}$ et $A_{c,i'}$ indépendantes de l'excentricité de m',

$$\begin{aligned} A_{s,i'} &= K^{-\frac{1}{2}} b_{\frac{1}{2}}^{(i')} \sin i'\tau, \\ A_{c,i'} &= K^{-\frac{1}{2}} b_{\frac{1}{2}}^{(i')} \cos i'\tau. \end{aligned}$$

La simplicité et l'exactitude du calcul sont ainsi indépendantes de l'inclinaison mutuelle des orbites.

13. Désignons actuellement par R_1 la partie de R dépendante de la première puissance de l'excentricité de m'. Nous aurons

$$R_1 = \frac{dR_0}{de'} \times e',$$

en indiquant par $\frac{dR_0}{de'}$ la dérivée de R par rapport à e', dans laquelle on a ensuite fait $e' = 0$. La différentiation de R nous donnera

$$\begin{aligned} R_1 = & -\tfrac{1}{2} e' \left[a'^2 + r^2 - 2a'r\cos\lambda\cos(l' - \tau)\right]^{-\frac{3}{2}} \\ & \times \left\{2\frac{dr'_0}{de'}r'_0 - 2r\cos t\,\frac{d.r'_0\cos t'_0}{de'} - 2r\sin t\cos\Phi\,\frac{d.r'_0\sin t'_0}{de'}\right\}. \end{aligned}$$

On posera, comme ci-dessus,

$$\left[a'^2 + r^2 - 2a'r\cos\lambda\cos(l' - \tau)\right]^{-\frac{3}{2}} = K^{-\frac{3}{2}} \sum b_{\frac{3}{2}}^{(i')} \cos i'(l' - \tau),$$

et quant au dernier facteur de l'expression de R_1, on le trouvera, en le développant, égal à

$$\left\{\begin{aligned} & -2a'^2\cos(l' - \varpi') + 3a'\cos\varpi'.r\cos t - a'r\cos t\cos(2l' - \varpi') \\ & + \cos\Phi\left[3a'\sin\varpi'.r\sin t - a'r\sin t\sin(2l' - \varpi')\right] \end{aligned}\right\}.$$

Il reste à porter ces expressions dans la valeur de R_1 et à les multiplier l'une par l'autre, en s'arrêtant aux termes en $i'l'$. Si, d'ailleurs, on réunit l'expression qu'on trouvera ainsi avec celle du numéro précédent, on obtiendra, pour la valeur complète des coefficients $A_{s,i'}$ et $A_{c,i'}$,

$$A_{s,i'} = K^{-\frac{1}{2}} b_{\frac{1}{2}}^{(i')} \sin i'\tau - \frac{e'}{2} a'r K^{-\frac{3}{2}} \left\{M\sin[(i'-1)\tau + \varpi'] + N\sin[(i'-1)\tau - \varpi']\right\},$$

$$A_{c,i'} = K^{-\frac{1}{2}} b_{\frac{1}{2}}^{(i')} \cos i'\tau - \frac{e'}{2} a'r K^{-\frac{3}{2}} \left\{M\cos[(i'-1)\tau + \varpi'] + N\cos[(i'-1)\tau - \varpi']\right\},$$

expressions dans lesquelles j'ai posé pour abréger,

$$M = \left\{\frac{3}{2} b_{\frac{3}{2}}^{(i')} - \frac{a'}{r\cos\lambda} b_{\frac{3}{2}}^{(i'-1)} - \frac{1}{2} b_{\frac{3}{2}}^{(i'-2)}\right\}\cos\lambda,$$

$$N = \left\{\frac{3}{2} b_{\frac{3}{2}}^{(i')} - \frac{a'}{r\cos\lambda} b_{\frac{3}{2}}^{(i'+1)} - \frac{1}{2} b_{\frac{3}{2}}^{(i'+2)}\right\}\cos\lambda.$$

Si l'on rapporte les lettres accentuées à Vénus, e' sera très-petit, et son carré sera négligeable. Les résultats précédents permettront de reconnaître simplement que les perturbations des ordres élevés sont toutes insensibles au delà du troisième, malgré la petitesse de leur argument, et malgré la grandeur de l'excentricité de Mercure.

Mais on pourra aussi rapporter les lettres accentuées à Mercure. Et alors le développement étant effectué par cette voie jusqu'à la troisième puissance de l'excentricité, on s'en servira avec avantage pour passer aux expressions des dérivées partielles de R prises par rapport aux éléments de Mercure, et dont on a besoin dans la théorie de cette planète.

14. Considérons en particulier une perturbation de la longitude moyenne, donnée par la réunion des termes semblables compris dans $\delta\rho$ et $\delta\varepsilon$, et d'un ordre élevé égal à la quantité positive $(i - i')$. Cette perturbation existera aussi dans l'anomalie moyenne : on pourrait donc l'y introduire algébriquement, et chercher par les formules du n° **10** les inégalités correspondantes de l'équation du centre et du rayon vecteur. Mais on introduirait ainsi dans ces coordonnées plusieurs inégalités qu'on ne pourrait pas réduire avec les inégalités sensibles qui proviennent des variations des autres éléments de l'orbite.

On évite cet inconvénient, et la complication des tables qui en résulterait, en réservant les inégalités de la longitude moyenne pour ajouter, dans le calcul de chaque lieu héliocentrique, leur grandeur numérique à la valeur angulaire de la longitude moyenne, et à celle de l'anomalie moyenne qui sert aux calculs de l'équation du centre et du rayon vecteur. En cela, je ne ferai que me conformer aux usages de la *Mécanique céleste*. Si l'on n'aperçoit pas toujours clairement au premier abord, et du point de vue analytique, le but que son immortel auteur s'est proposé d'atteindre dans la détermination des constantes introduites par les intégrations, on ne tarde pas à reconnaître que le calcul a sans cesse été plié avec une admirable intelligence aux exigences astronomiques. Plus on examine avec soin la forme des résultats auxquels Laplace s'est arrêté, et plus on reconnaît la nécessité de s'y astreindre.

15. Si j'insiste sur ce mérite astronomique de la *Mécanique céleste,* c'est qu'il a été souvent méconnu par les géomètres, et quelquefois même par les astronomes. On regrette d'avoir à reprocher aux Tables de Gotha, sur lesquelles sont calculées toutes les éphémérides de Mercure, des fautes telles que les suivantes.

Les perturbations à longue période, au lieu d'être appliquées à la longitude moyenne, ont été ajoutées à la longitude vraie, contrairement à ce que prescrit la *Mécanique céleste,* dans le courant du second et du sixième livre. C'est ce qu'on voit clairement dans le *paradigma calculi,* donné à la page 39. Il en peut résulter une erreur d'environ 4",0 sur la longitude héliocentrique; tandis qu'à la page 32 l'auteur indique qu'il n'a voulu négliger que les perturbations inférieures à 0",5.

La perturbation de la longitude vraie, argument VIII des Tables, dépendante de l'angle $5n' - 3n$, a été changée de signe. Il suffit, pour s'en convaincre, de comparer sa valeur inscrite à la page 32 de la Table, avec son expression donnée à la page 97 du troisième volume de la *Mécanique céleste.*

Il en est de même de la perturbation de la longitude, argument IX de la Table, dépendante de l'angle $3n' - n$. Malheureusement, d'ailleurs, ce ne sont pas de simples fautes d'impression : les Tables sont bien construites sur ces perturbations changées de signes. La somme de ces deux nouvelles erreurs peut s'élever à 5",0. En sorte que, par les seules inexactitudes commises par l'auteur, en empruntant les perturbations à la *Mécanique céleste,* l'erreur de la longitude héliocentrique peut être de 9",0. Les perturbations dues à l'action de Vénus pouvant se trouver ainsi en erreur de la moitié de leur valeur maximum, quelle confiance pourrait-on accorder à la correction de la masse de Vénus, à laquelle l'auteur les a fait concourir, et qui est tout à fait inconciliable avec la diminution observée de l'obliquité de l'écliptique? Mais c'est un sujet sur lequel j'aurai à revenir.

Enfin, les perturbations du rayon vecteur, dépendantes de la différence des moyens mouvements de Mercure et de Vénus, ont toutes été changées de signes. Voir la page 32 de la Table, et la page 96 du troisième volume de la *Mécanique céleste.*

16. En ne développant pas l'inégalité de la longitude moyenne, dépendante d'un argument $in - i'n'$ d'un ordre élevé, les inégalités de la longitude vraie qui dériveront de cet argument ne pourront provenir que de la variation de l'excentricité et de celle du périhélie. On les obtiendra sensiblement par les formules

$$\partial e = -\frac{anm'}{e}\int \frac{d\mathrm{R}}{d\varpi}\,dt,$$

$$\partial\varpi = \quad \frac{anm'}{e}\int \frac{d\mathrm{R}}{de}\,dt,$$

$$d\nu = 2\partial e \sin(nt + \varepsilon - \varpi) - 2e\partial\varpi \cos(nt + \varepsilon - \varpi).$$

Un terme quelconque de R, correspondant à l'argument $in - i'n'$, et de l'ordre le moins élevé, est toujours de la forme

$$\mathrm{M}e^h \cos(int - i'n't + i\varepsilon - i'\varepsilon' - \psi - h\varpi),$$

l'exposant h de l'excentricité étant égal au multiplicateur de $-\varpi$ sous le signe cosinus. On en déduit successivement

$$\partial e = \quad \frac{anm'he^{h-1}\mathrm{M}}{in - i'n'}\cos(int - i'n't + i\varepsilon - i'\varepsilon' - \psi - h\varpi),$$

$$\partial\varpi = \quad \frac{anm'he^{h-2}\mathrm{M}}{in - i'n'}\sin(int - i'n't + i\varepsilon' - \psi - h\varpi),$$

$$\partial\nu = -\frac{2\,anm'\,he^{h-1}\mathrm{M}}{in - i'n'}\sin[(i-1)\,nt - i'n't + (i-1)\varepsilon - i'\varepsilon' - \psi - (h-1)\,\varpi].$$

On voit donc que $\partial\nu$ ne renfermera aucun terme dépendant de l'argument $(i+1)n - i'n'$. Ce terme s'évanouira à cause de la forme particulière du développement de la fonction perturbatrice, et de celle des expressions différentielles des variations de l'excentricité et du périhélie. J'ai toujours eu soin de calculer les variations de l'excentricité et du périhélie indépendamment l'une de l'autre, afin d'obtenir des vérifications par la réduction à zéro de la somme des nombres qui composent le coefficient d'un des termes de la forme de ceux que nous venons de considérer.

17. La vérification précédente s'applique à l'ensemble des calculs. On pourra obtenir par le moyen suivant autant de vérifications qu'on le voudra des développements des dérivées partielles de la fonction R. Reprenons l'expression n° 9 de cette fonction; désignons le facteur $\cos\upsilon$ par s, et différentions par rapport à a. Nous trouverons, en remarquant que $a\dfrac{dr}{da}$ est égal à r,

$$a\,\frac{d\mathrm{R}}{da} = -\left[(r^2 + r'^2 - 2rr's)^{-\frac{3}{2}}(r - r's) + \frac{s}{r'^2}\right] r.$$

Prenons actuellement la dérivée de R par rapport à ε,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon} = &-\left[(r^2 + r'^2 - 2rr's)^{-\frac{3}{2}}(r - r's) + \frac{s}{r'^2}\right]\frac{dr}{d\varepsilon}\\ &+\left[(r^2 + r'^2 - 2rr's)^{-\frac{3}{2}}\,rr' - \frac{r}{r'^2}\right]\frac{ds}{d\varepsilon}.\end{aligned}$$

Dans cette expression le coefficient de $\dfrac{dr}{d\varepsilon}$ peut se remplacer par sa valeur en fonction de $a\,\dfrac{d\mathrm{R}}{da}$; et en observant d'ailleurs que s ne contient ε que parce qu'il est fonction de la longitude v de Mercure, le second terme pourra s'écrire plus simplement sous la forme $\mathrm{G}\,\dfrac{dv}{d\varepsilon}$, et l'on aura

$$\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon} = a\,\frac{d\mathrm{R}}{da}\cdot\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varepsilon} + \mathrm{G}\,\frac{dv}{d\varepsilon}.$$

Nous trouverons de même, en conservant à la lettre G sa signification,

$$\frac{d\mathrm{R}}{de} = a\,\frac{d\mathrm{R}}{da}\cdot\frac{1}{r}\frac{dr}{de} + \mathrm{G}\,\frac{dv}{de},$$

$$\frac{d\mathrm{R}}{d\varpi} = a\,\frac{d\mathrm{R}}{da}\cdot\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varpi} + \mathrm{G}\,\frac{dv}{d\varpi}.$$

On déduit des trois équations précédentes trois valeurs de G qui doivent être identiques. En les désignant par M, P, Q, leurs expressions seront les suivantes :

$$\mathrm{M} = \frac{\dfrac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon} - a\,\dfrac{d\mathrm{R}}{da}\cdot\dfrac{1}{r}\dfrac{dr}{d\varepsilon}}{\dfrac{dv}{d\varepsilon}},$$

$$\mathrm{P} = \frac{\dfrac{d\mathrm{R}}{de} - a\,\dfrac{d\mathrm{R}}{da}\cdot\dfrac{1}{r}\dfrac{dr}{de}}{\dfrac{dv}{de}},\qquad \mathrm{Q} = \frac{\dfrac{d\mathrm{R}}{d\varpi} - a\,\dfrac{d\mathrm{R}}{da}\cdot\dfrac{1}{r}\dfrac{dr}{d\varpi}}{\dfrac{dv}{d\varpi}}.$$

Pour appliquer cette remarque à la vérification des développements des dérivées partielles, il faudra attribuer à la longitude de Mercure une valeur particulière. Les dérivées de r et v ne seront plus des séries, mais bien des nombres faciles à calculer. Et alors l'égalité des quantités M, P et Q devra se vérifier séparément pour chacun des coefficients des sinus et des cosinus des multiples de la longitude moyenne de Vénus. La vérification sera très-simple si l'on attribue à la longitude moyenne de Mercure une des valeurs suivantes, 0°, 90°, 180° ou 270°. Mais le choix ne sera pas indifférent entre ces quatre positions; et il faudra prendre celle qui ne fera pas acquérir une valeur trop petite aux trois dérivées $\frac{dv}{d\varepsilon}$, $\frac{dv}{de}$, $\frac{dv}{d\varpi}$, et à l'une au moins des trois quantités $\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varepsilon}$, $\frac{1}{r}\frac{dr}{de}$ et $\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varpi}$. La longitude $l = 270°$ satisfait bien à ces conditions, et l'on trouve dans ce cas, en multipliant les quantités M, P et Q par $\frac{dv}{d\varepsilon}$, que les trois expressions

$$\frac{dR}{d\varepsilon} + 0{,}032\, a\,\frac{dR}{da},$$

$$-\, 1{,}971\,\frac{dR}{de} + 1{,}614\, a\,\frac{dR}{da},$$

$$2{,}117\,\frac{dR}{d\varpi} - 0{,}068\, a\,\frac{dR}{da},$$

doivent être égales entre elles.

§ III.

Variations séculaires des éléments de l'orbite.

18. J'ai traité avec détail des inégalités séculaires des orbites des sept planètes principales dans les Additions à la *Connaissance des Temps* pour 1843 et 1844. Je renverrai à cet ouvrage, ou bien au tome V du présent Recueil, page 220, pour l'expression en termes finis des éléments de l'orbite de Mercure à une époque quelconque. Ces formules générales ne nous seront ici d'aucun usage. Il est, au contraire, indispensable de rappeler les expressions des variations annuelles des éléments elliptiques, telles que je les ai obtenues dans la *Connaissance des Temps* pour 1844, en ne négligeant que les termes du cinquième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons.

Si nous substituons d'abord aux variables e et ϖ, φ et θ les arbitraires suivantes,

$$h = e\sin\varpi,\quad p = \operatorname{tang}\varphi\sin\theta,$$
$$l = e\cos\varpi,\quad q = \operatorname{tang}\varphi\cos\theta,$$

nous trouverons pour les expressions de leurs variations, en fonctions du temps t, compté à partir du 1^{er} janvier 1800 :

$$\delta h = 0'',334\,t - 0'',000\,014\,0\,t^2,$$
$$\delta l = -1'',033\,t - 0'',000\,004\,8\,t^2,$$
$$\delta p = -0'',534\,t - 0'',000\,001\,0\,t^2,$$
$$\delta q = 0'',244\,t - 0'',000\,005\,8\,t^2.$$

Ces termes ont été calculés en supposant pour les différentes planètes les masses suivantes :

Vénus....... $m' = \frac{1}{401\,847}$, Jupiter..... $m^{\text{iv}} = \frac{1}{1\,050}$,
La Terre..... $m'' = \frac{1}{354\,986}$, Saturne..... $m^{\text{v}} = \frac{1}{3\,512}$,
Mars........ $m''' = \frac{1}{2\,680\,637}$, Uranus..... $m^{\text{vi}} = \frac{1}{17\,918}$.

J'ai ajouté les termes proportionnels au carré du temps, que je n'avais pas calculés dans le travail cité. Les variations de p et q sont relatives au plan de l'écliptique de 1800, et à la ligne fixe passant à cette époque par l'équinoxe du printemps.

19. Nous allons déduire des formules précédentes les variations du double de l'excentricité, et de la longitude du périhélie pour l'époque de 1800, en négligeant les termes proportionnels au carré du temps, ce qui suffira toujours aux usages astronomiques; à moins qu'on ne voulût remonter aux observations qui nous ont été transmises par Ptolémée, ce qu'on ferait alors aisément au moyen des valeurs de δh, δl, δp et δq. Nous avons, pour calculer $2\delta e$ et $\delta\varpi$, les relations suivantes :

$$2\,\delta e = \frac{2h}{e}\,\delta h + \frac{2l}{e}\,\delta l,$$
$$\delta\varpi = \frac{l}{e^2}\,\delta h - \frac{h}{e^2}\,\delta l.$$

Il nous sera de plus nécessaire de connaître les corrections que ces variations subiraient par des changements apportés aux masses perturbatrices adoptées dans le numéro précédent. Si nous désignons par ν', ν'', ν''', ν^{iv}, ν^{v} les rapports des changements que pourraient réclamer les masses de Vénus, la Terre..., aux masses mêmes des planètes, nous obtiendrons :

$$2\,\delta e = 0'',0850\,t + (0'',056\,\nu' + 0'',022\,\nu'' - 0'',001\,\nu''' + 0'',007\,\nu^{\text{iv}} + 0'',001\,\nu^{\text{v}}) \times t,$$
$$\delta\varpi = 5'',278\;\,t + (2'',81\;\,\nu' + 0'',83\;\,\nu'' + 0'',03\;\,\nu''' + 1'',52\;\,\nu^{\text{iv}} + 0'',08\;\,\nu^{\text{v}}) \times t.$$

20. Nous pourrions semblablement calculer les mouvements de l'inclinaison et du nœud de la planète sur l'écliptique de 1800. Mais comme c'est à l'écliptique mobile que nous rapportons les positions des astres, il est préférable de déterminer les changements qu'éprouve l'orbite de Mercure par rapport à cette écliptique. Si nous désignons par φ_1 et θ_1 l'inclinaison de l'orbite, et la longitude de son nœud ascendant, rapportées à l'écliptique mobile, les variations de ces éléments seront données par les formules suivantes,

$$\delta\varphi_1 = (\delta p - \delta p'')\sin\theta + (\delta q - \delta q'')\cos\theta,$$
$$\delta\theta_1 = (\delta p - \delta p'')\frac{\cos\theta}{\operatorname{tang}\varphi} - (\delta q - \delta q'')\frac{\sin\theta}{\operatorname{tang}\varphi};$$

$\delta p''$ et $\delta q''$ se rapportent au mouvement de l'écliptique vraie par rapport au plan fixe de 1800, et l'on a

$$\delta p'' = 0'',0627, \quad \delta q'' = -\,0'',4755\,[*].$$

En tenant d'ailleurs compte des changements qu'on devrait apporter à ces nombres par suite de corrections introduites dans les masses perturbatrices, on trouvera

$$\delta\varphi_1 = \quad 0'',0711\,t + (-0'',001\,\nu - 0'',003\,\nu' - 0'',013\,\nu'' + 0'',079\,\nu^{\text{iv}} + 0'',009\,\nu^{\text{v}})\,t,$$
$$\delta\theta_1 = -\,7'',585\,t + (-0'',07\,\nu - 4'',09\,\nu' - 0'',92\,\nu'' - 0'',11\,\nu''' - 2'',28\,\nu^{\text{iv}} - 0'',11\,\nu^{\text{v}})\,t.$$

---

[*] Je viens de voir avec plaisir, dans un Rapport de M. Struve sur un Mémoire de M. Peters, que ces nombres s'accordent aussi bien qu'on peut le désirer avec la variation observée de l'obliquité de l'écliptique. Nouvelle preuve que la masse de Vénus est bien déterminée, et qu'on ne doit pas l'augmenter énormément comme l'a fait M. de Lindenau. Voir les *Astronomische Nachrichten*, n° 486, pages 89 et 90.

Le mouvement séculaire de l'inclinaison relative est fort différent de celui qu'on avait obtenu en s'arrêtant aux premières puissances des excentricités et des inclinaisons, et que M. de Lindenau (page 31) porte, par l'accroissement de la masse de Vénus, jusqu'à 18″,38; tandis que je trouve seulement 7″,11. Je ne puis toutefois douter en aucune façon du nombre que je donne ici, et que j'ai déterminé par deux procédés entièrement distincts l'un de l'autre, savoir, par des développements algébriques et ensuite par interpolation.

§ IV.

Variations périodiques des éléments de l'orbite et des coordonnées héliocentriques.

21. Les changements considérables que les termes d'ordre supérieur apportent au mouvement de l'inclinaison relative, à cause de la grandeur de l'excentricité de Mercure, et du voisinage de Vénus, doivent nous faire craindre qu'il n'en soit de même dans le calcul des perturbations périodiques. Et, en effet, plusieurs termes du second ordre sont aussi sensibles que ceux du premier, bien que leurs arguments ne soient pas plus petits. Je dois donc, afin de convaincre le lecteur que je n'ai rien négligé d'important, rapporter tous les développements relatifs aux perturbations que Vénus produit dans le mouvement de Mercure. Les séries relatives aux actions de la Terre, de Jupiter et de Saturne étant très-convergentes, je ne les traiterai pas avec le même détail, et je me bornerai à donner pour ces planètes les perturbations que leur action m'a fournies. Mars et Uranus n'ont aucune influence sensible.

Perturbations produites par Vénus.

22. L'excentricité de cette planète étant très-petite, on reconnaît aisément, par les formules du n° **15**, qu'elle n'a aucune influence sur les perturbations de Mercure, si ce n'est sur celle à longue période, dépendante de l'argument $5n' - 2n$, et qu'elle affecte légèrement. Je calculerai ce terme à part, de manière à ne laisser aucun doute à son égard; et alors, dans les développements généraux qui vont suivre, je pourrai supposer nulle l'excentricité de Vénus. Je ne négligerai, au contraire, aucune puissance de l'excentricité de Mercure, ou de l'inclinaison relative qui puisse influer sur les décimales conservées : c'est ce qui importait surtout, à cause de la grandeur de l'excentricité de Mercure.

Soient toujours l' et l les longitudes moyennes de Vénus et de Mercure. Pour éviter l'emploi des décimales, je donnerai les expressions de $100\,000\,\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}$, $1\,000\,a\,\frac{d\mathrm{R}}{da}$, $1\,000\,\frac{d\mathrm{R}}{de}$ et $10\,000\,\frac{d\mathrm{R}}{d\varpi}$. Désignant, d'ailleurs, les sinus et cosinus par les seules lettres S et C, nous aurons :

$$100\,000\,\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon} =$$

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & -\ 1720\,\mathrm{S}(0l'-1l) & +\ 296\,\mathrm{S}(0l'-2l) & +\ 36\,\mathrm{S}(0l'-3l) & & \\
+\ 0\,\mathrm{C}(0l'-0l) & -\ 5682\,\mathrm{C}(0l'-1l) & +\ 216\,\mathrm{C}(0l'-2l) & +\ 54\,\mathrm{C}(0l'-3l) & & \\[1ex]
+10812\,\mathrm{S}(1l'-1l) & -\ 964\,\mathrm{S}(1l'-2l) & +\ 417\,\mathrm{S}(1l'-3l) & +\ 0\,\mathrm{S}(1l'-4l) & & \\
-\ 40\,\mathrm{C}(1l'-1l) & -\ 2612\,\mathrm{C}(1l'-2l) & +\ 45\,\mathrm{C}(1l'-3l) & +\ 72\,\mathrm{C}(1l'-4l) & & \\
 & +\ 0\,\mathrm{S}(1l'+0l) & +\ 595\,\mathrm{S}(1l'+1l) & -\ 52\,\mathrm{S}(1l'+2l) & & \\
 & +\ 0\,\mathrm{C}(1l'+0l) & +\ 523\,\mathrm{C}(1l'+1l) & -\ 36\,\mathrm{C}(1l'+2l) & & \\[1ex]
+62470\,\mathrm{S}(2l'-2l) & +\ 4140\,\mathrm{S}(2l'-3l) & -3592\,\mathrm{S}(2l'-4l) & -\ 875\,\mathrm{S}(2l'-5l) & +114\,\mathrm{S}(2l'-6l) & \\
-\ 300\,\mathrm{C}(2l'-2l) & +15477\,\mathrm{C}(2l'-3l) & +2396\,\mathrm{C}(2l'-4l) & -\ 740\,\mathrm{C}(2l'-5l) & -264\,\mathrm{C}(2l'-6l) & \\
 & -\ 5856\,\mathrm{S}(2l'-1l) & +\ 0\,\mathrm{S}(2l'+0l) & -\ 187\,\mathrm{S}(2l'+1l) & +\ 6\,\mathrm{S}(2l'+2l) & \\
 & +20987\,\mathrm{C}(2l'-1l) & +\ 0\,\mathrm{C}(2l'+0l) & +\ 84\,\mathrm{C}(2l'+1l) & -\ 4\,\mathrm{C}(2l'+2l) & \\[1ex]
+36105\,\mathrm{S}(3l'-3l) & +\ 3576\,\mathrm{S}(3l'-4l) & -3630\,\mathrm{S}(3l'-5l) & -\ 936\,\mathrm{S}(3l'-6l) & +\ 91\,\mathrm{S}(3l'-7l) & \\
-\ 309\,\mathrm{C}(3l'-3l) & +13244\,\mathrm{C}(3l'-4l) & +2340\,\mathrm{C}(3l'-5l) & -\ 834\,\mathrm{C}(3l'-6l) & -329\,\mathrm{C}(3l'-7l) & \\
 & -\ 7292\,\mathrm{S}(3l'-2l) & -4192\,\mathrm{S}(3l'-1l) & +\ 0\,\mathrm{S}(3l'+0l) & +\ 5\,\mathrm{S}(3l'+1l) & \\
 & +26422\,\mathrm{C}(3l'-2l) & -2658\,\mathrm{C}(3l'-1l) & +\ 0\,\mathrm{C}(3l'+0l) & -\ 39\,\mathrm{C}(3l'+1l) & \\[1ex]
+17728\,\mathrm{S}(4l'-4l) & +\ 2530\,\mathrm{S}(4l'-5l) & -3006\,\mathrm{S}(4l'-6l) & -\ 882\,\mathrm{S}(4l'-7l) & +160\,\mathrm{S}(4l'-8l) & \\
-\ 256\,\mathrm{C}(4l'-4l) & +\ 9270\,\mathrm{C}(4l'-5l) & +1902\,\mathrm{C}(4l'-6l) & -\ 756\,\mathrm{C}(4l'-7l) & -304\,\mathrm{C}(4l'-8l) & \\
 & -\ 6144\,\mathrm{S}(4l'-3l) & -7246\,\mathrm{S}(4l'-2l) & +\ 828\,\mathrm{S}(4l'-1l) & +\ 0\,\mathrm{S}(4l'+0l) & \\
 & +22590\,\mathrm{C}(4l'-3l) & -4506\,\mathrm{C}(4l'-2l) & -\ 700\,\mathrm{C}(4l'-1l) & +\ 0\,\mathrm{C}(4l'+0l) & \\[1ex]
+\ 7295\,\mathrm{S}(5l'-5l) & +\ 1560\,\mathrm{S}(5l'-6l) & -2233\,\mathrm{S}(5l'-7l) & -\ 704\,\mathrm{S}(5l'-8l) & +117\,\mathrm{S}(5l'-9l) & +120\,\mathrm{S}(5l'-10l) \\
-\ 165\,\mathrm{C}(5l'-5l) & +\ 5670\,\mathrm{C}(5l'-6l) & +1407\,\mathrm{C}(5l'-7l) & -\ 552\,\mathrm{C}(5l'-8l) & -279\,\mathrm{C}(5l'-9l) & +\ 90\,\mathrm{C}(5l'-10l) \\
 & -\ 4296\,\mathrm{S}(5l'-4l) & -8007\,\mathrm{S}(5l'-3l) & +1756\,\mathrm{S}(5l'-2l) & +\ 87\,\mathrm{S}(5l'-1l) & +\ 0\,\mathrm{S}(5l'+0l) \\
 & +16004\,\mathrm{C}(5l'-4l) & -4917\,\mathrm{C}(5l'-3l) & -1522\,\mathrm{C}(5l'-2l) & +215\,\mathrm{C}(5l'-1l) & +\ 0\,\mathrm{C}(5l'+0l)
\end{array}$$

$$+\ 2262\,\mathrm{S}(6l'-6l)+\ 833\,\mathrm{S}(6l'-7l)-1456\,\mathrm{S}(6l'-\ 8l)-\ 558\,\mathrm{S}(6l'-\ 9l)+120\,\mathrm{S}(6l'-10l)+\ 66\,\mathrm{S}(6l'-11l$$
$$-\ 102\,\mathrm{C}(6l'-6l)+\ 3094\,\mathrm{C}(6l'-7l)+\ 904\,\mathrm{C}(6l'-\ 8l)-\ 441\,\mathrm{C}(6l'-\ 9l)-240\,\mathrm{C}(6l'-10l)+\ 11\,\mathrm{C}(6l'-11l)$$
$$-\ 2615\,\mathrm{S}(6l'-5l)-7112\,\mathrm{S}(6l'-\ 4l)+2304\,\mathrm{S}(6l'-\ 3l)+232\,\mathrm{S}(6l'-\ 2l)-\ 48\,\mathrm{S}(6l'-\ 1l$$
$$+\ 9990\,\mathrm{C}(6l'-5l)-4300\,\mathrm{C}(6l'-\ 4l)-2049\,\mathrm{C}(6l'-\ 3l)+540\,\mathrm{C}(6l'-\ 2l)+\ 3\,\mathrm{C}(6l'-\ 1l$$

$$-\ 440\,\mathrm{S}(8l'-8l)+\ 207\,\mathrm{S}(8l'-9l)-\ 460\,\mathrm{S}(8l'-10l)-\ 187\,\mathrm{S}(8l'-11l)+108\,\mathrm{S}(8l'-12l)+\ 65\,\mathrm{S}(8l'-13l)$$
$$-\ 64\,\mathrm{C}(8l'-8l)+\ 648\,\mathrm{C}(8l'-9l)+\ 270\,\mathrm{C}(8l'-10l)-\ 198\,\mathrm{C}(8l'-11l)-144\,\mathrm{C}(8l'-12l)+\ 0\,\mathrm{C}(8l'-13l)$$
$$-\ 707\,\mathrm{S}(8l'-7l)-3816\,\mathrm{S}(8l'-\ 6l)+2125\,\mathrm{S}(8l'-\ 5l)+468\,\mathrm{S}(8l'-\ 4l)-255\,\mathrm{S}(8l'-\ 3l)$$
$$+\ 2828\,\mathrm{C}(8l'-7l)-2238\,\mathrm{C}(8l'-\ 6l)-1960\,\mathrm{C}(8l'-\ 5l)+992\,\mathrm{C}(8l'-\ 4l)+\ 30\,\mathrm{C}(8l'-\ 3l)$$

$$-\ 132\,\mathrm{S}(10l'-12l)+\ 16\,\mathrm{S}(10l'-16l)$$
$$+\ 120\,\mathrm{C}(10l'-12l)+\ 32\,\mathrm{C}(10l'-16l)$$
$$-1400\,\mathrm{S}(10l'-\ 8l)+\ 36\,\mathrm{S}(10l'-\ 4l)$$
$$-\ 800\,\mathrm{C}(10l'-\ 8l)-\ 96\,\mathrm{C}(10l'-\ 4l).$$

$$1000\,a\,\frac{d\mathrm{R}}{da}=$$

$$+\ 166\,\mathrm{S}(0l'-\ 1l)-\ 8\,\mathrm{S}(0l'-\ 2l)$$
$$+\ 324\,\mathrm{C}(0l'-0l)-\ 52\,\mathrm{C}(0l'-\ 1l)+\ 0\,\mathrm{C}(0l'-\ 2l)$$

$$+\ 2\,\mathrm{S}(1l'-1l)+\ 58\,\mathrm{S}(1l'-\ 2l)-\ 4\,\mathrm{S}(1l'-\ 3l)+\ 0\,\mathrm{S}(1l'-\ 4l$$
$$+\ 386\,\mathrm{C}(1l'-1l)-\ 23\,\mathrm{C}(1l'-\ 2l)+\ 4\,\mathrm{C}(1l'-\ 3l)-\ 1\,\mathrm{C}(1l'-\ 4l)$$
$$-\ 206\,\mathrm{S}(1l'+\ 0l)+\ 22\,\mathrm{S}(1l'+\ 1l)+\ 0\,\mathrm{S}(1l'+\ 2l)$$
$$-\ 61\,\mathrm{C}(1l'+\ 0l)-\ 26\,\mathrm{C}(1l'+\ 1l)+\ 1\,\mathrm{C}(1l'+\ 2l)$$

$$+\ 5\,\mathrm{S}(2l'-2l)-\ 96\,\mathrm{S}(2l'-\ 3l)-\ 14\,\mathrm{S}(2l'-\ 4l)+\ 2\,\mathrm{S}(2l'-\ 5l)$$
$$+\ 747\,\mathrm{C}(2l'-2l)+\ 24\,\mathrm{C}(2l'-\ 3l)-\ 16\,\mathrm{C}(2l'-\ 4l)-\ 4\,\mathrm{C}(2l'-\ 5l)$$
$$-\ 522\,\mathrm{S}(2l'-\ 1l)+\ 68\,\mathrm{S}(2l'+\ 0l)+\ 4\,\mathrm{S}(2l'+\ 1l)$$
$$-\ 148\,\mathrm{C}(2l'-\ 1l)-\ 98\,\mathrm{C}(2l'+\ 0l)+\ 8\,\mathrm{C}(2l'+\ 1l)$$

$$+\ 3\,\mathrm{S}(3l'-3l)-\ 101\,\mathrm{S}(3l'-\ 4l)-\ 15\,\mathrm{S}(3l'-\ 5l)+\ 3\,\mathrm{S}(3l'-\ 6l)$$
$$+\ 415\,\mathrm{C}(3l'-3l)+\ 26\,\mathrm{C}(3l'-\ 4l)-\ 20\,\mathrm{C}(3l'-\ 5l)-\ 6\,\mathrm{C}(3l'-\ 6l)$$
$$-\ 459\,\mathrm{S}(3l'-\ 2l)+\ 97\,\mathrm{S}(3l'-\ 1l)+\ 17\,\mathrm{S}(3l'+\ 0l)$$
$$-\ 128\,\mathrm{C}(3l'-\ 2l)-\ 152\,\mathrm{C}(3l'-\ 1l)+\ 24\,\mathrm{C}(3l'+\ 0l$$

$$+\ 4\,\mathrm{S}(4l'-4l)-\ 77\,\mathrm{S}(4l'-\ 5l)-\ 13\,\mathrm{S}(4l'-\ 6l)-\ 5\,\mathrm{S}(4l'-\ 7l$$
$$+\ 199\,\mathrm{C}(4l'-4l)+\ 18\,\mathrm{C}(4l'-\ 5l)-\ 20\,\mathrm{C}(4l'-\ 6l)-\ 6\,\mathrm{C}(4l'-\ 7l$$
$$-\ 337\,\mathrm{S}(4l'-\ 3l)+\ 103\,\mathrm{S}(4l'-\ 2l)+\ 33\,\mathrm{S}(4l'-\ 1l)$$
$$-\ 92\,\mathrm{C}(4l'-\ 3l)-\ 164\,\mathrm{C}(4l'-\ 2l)+\ 40\,\mathrm{C}(4l'-\ 1l)$$

$$
\begin{array}{rrrr}
+\ \ 3\,\mathrm{S}(5l'-5l) & -\ \ 50\,\mathrm{S}(5l'-6l) & -\ \ 11\,\mathrm{S}(5l'-7l) & +\ \ 4\,\mathrm{S}(5l'-8l) \\
+\ 81\,\mathrm{C}(5l'-5l) & +\ \ 13\,\mathrm{C}(5l'-6l) & -\ \ 15\,\mathrm{C}(5l'-7l) & -\ \ 7\,\mathrm{C}(5l'-8l) \\
 & -\ 220\,\mathrm{S}(5l'-4l) & +\ \ 91\,\mathrm{S}(5l'-3l) & +\ 42\,\mathrm{S}(5l'-2l) \\
 & -\ \ 59\,\mathrm{C}(5l'-4l) & -147\,\mathrm{C}(5l'-3l) & +\ 49\,\mathrm{C}(5l'-2l) \\
\\
+\ \ 2\,\mathrm{S}(6l'-6l) & -\ \ 28\,\mathrm{S}(6l'-7l) & -\ \ 5\,\mathrm{S}(6l'-8l) & +\ \ 4\,\mathrm{S}(6l'-9l) \\
+\ 25\,\mathrm{C}(6l'-6l) & +\ \ 6\,\mathrm{C}(6l'-7l) & -\ \ 10\,\mathrm{C}(6l'-8l) & -\ \ 6\,\mathrm{C}(6l'-9l) \\
 & -\ 130\,\mathrm{S}(6l'-5l) & +\ \ 71\,\mathrm{S}(6l'-4l) & +\ 46\,\mathrm{S}(6l'-3l) \\
 & -\ \ 32\,\mathrm{C}(6l'-5l) & -116\,\mathrm{C}(6l'-4l) & +\ 52\,\mathrm{C}(6l'-3l).
\end{array}
$$

$$
1\,000\,\frac{d\mathrm{R}}{de} =
$$

$$
\begin{array}{rrrr}
 & +\ 288\,\mathrm{S}(0l'-1l) & +\ \ 2\,\mathrm{S}(0l'-2l) & +\ \ 0\,\mathrm{S}(0l'-3l) \\
+116\,\mathrm{C}(0l'-0l) & -\ \ 88\,\mathrm{C}(0l'-1l) & +\ \ 2\,\mathrm{C}(0l'-2l) & +\ \ 4\,\mathrm{C}(0l'-3l) \\
\\
+\ \ 4\,\mathrm{S}(1l'-1l) & +\ \ 61\,\mathrm{S}(1l'-2l) & +\ \ 5\,\mathrm{S}(1l'-3l) & -\ \ 1\,\mathrm{S}(1l'-4l) \\
+125\,\mathrm{C}(1l'-1l) & -\ \ 23\,\mathrm{C}(1l'-2l) & +\ \ 7\,\mathrm{C}(1l'-3l) & +\ \ 1\,\mathrm{C}(1l'-4l) \\
 & -\ 297\,\mathrm{S}(1l'+0l) & +\ 45\,\mathrm{S}(1l'+1l) & +\ \ 1\,\mathrm{S}(1l'+2l) \\
 & -\ \ 87\,\mathrm{C}(1l'+0l) & -\ 69\,\mathrm{C}(1l'+1l) & +\ \ 1\,\mathrm{C}(1l'+2l) \\
\\
+\ \ 3\,\mathrm{S}(2l'-2l) & -\ 201\,\mathrm{S}(2l'-3l) & -\ 49\,\mathrm{S}(2l'-4l) & +\ 21\,\mathrm{S}(2l'-5l) \\
-249\,\mathrm{C}(2l'-2l) & +\ \ 53\,\mathrm{C}(2l'-3l) & -\ 82\,\mathrm{C}(2l'-4l) & -\ 23\,\mathrm{C}(2l'-5l) \\
 & -1\,005\,\mathrm{S}(2l'-1l) & +221\,\mathrm{S}(2l'+0l) & +\ 17\,\mathrm{S}(2l'+1l) \\
 & -\ 281\,\mathrm{C}(2l'-1l) & -362\,\mathrm{C}(2l'+0l) & +\ 27\,\mathrm{C}(2l'+1l) \\
\\
+\ \ 3\,\mathrm{S}(3l'-3l) & -\ \ 96\,\mathrm{S}(3l'-4l) & -\ 34\,\mathrm{S}(3l'-5l) & +\ 18\,\mathrm{S}(3l'-6l) \\
-285\,\mathrm{C}(3l'-3l) & +\ \ 26\,\mathrm{C}(3l'-4l) & -\ 59\,\mathrm{C}(3l'-5l) & -\ 20\,\mathrm{C}(3l'-6l) \\
 & -\ 566\,\mathrm{S}(3l'-2l) & +250\,\mathrm{S}(3l'-\ \ l) & +\ 72\,\mathrm{S}(3l'+0l) \\
 & -\ 154\,\mathrm{C}(3l'-2l) & -411\,\mathrm{C}(3l'-\ \ l) & +\ 84\,\mathrm{C}(3l'+0l) \\
\\
+\ \ 0\,\mathrm{S}(4l'-4l) & -\ \ 26\,\mathrm{S}(4l'-5l) & -\ 21\,\mathrm{S}(4l'-6l) & +\ 14\,\mathrm{S}(4l'-7l) \\
-231\,\mathrm{C}(4l'-4l) & +\ \ 6\,\mathrm{C}(4l'-5l) & -\ 36\,\mathrm{C}(4l'-6l) & -\ 16\,\mathrm{C}(4l'-7l) \\
 & -\ 258\,\mathrm{S}(4l'-3l) & +201\,\mathrm{S}(4l'-2l) & +106\,\mathrm{S}(4l'-1l) \\
 & -\ \ 70\,\mathrm{C}(4l'-3l) & -338\,\mathrm{C}(4l'-2l) & +120\,\mathrm{C}(4l'-1l) \\
\\
+\ \ 0\,\mathrm{S}(5l'-5l) & +\ \ 6\,\mathrm{S}(5l'-6l) & -\ \ 9\,\mathrm{S}(5l'-7l) & +\ 10\,\mathrm{S}(5l'-8l) \\
-156\,\mathrm{C}(5l'-5l) & -\ \ 2\,\mathrm{C}(5l'-6l) & -\ 16\,\mathrm{C}(5l'-7l) & -\ 14\,\mathrm{C}(5l'-8l) \\
 & -\ \ 86\,\mathrm{S}(5l'-4l) & +135\,\mathrm{S}(5l'-3l) & +110\,\mathrm{S}(5l'-2l) \\
 & -\ \ 22\,\mathrm{C}(5l'-4l) & -230\,\mathrm{C}(5l'-3l) & +122\,\mathrm{C}(5l'-2l)
\end{array}
$$

$$\begin{aligned}
&+\ 0\,\mathrm{S}(6l'-6l)+17\,\mathrm{S}(6l'-7l)-2\,\mathrm{S}(6l'-8l)+5\,\mathrm{S}(6l'-9l)\\
&-91\,\mathrm{C}(6l'-6l)-4\,\mathrm{C}(6l'-7l)-5\,\mathrm{C}(6l'-8l)-18\,\mathrm{C}(6l'-9l)\\
&\qquad\qquad-9\,\mathrm{S}(6l'-5l)+80\,\mathrm{S}(6l'-4l)+95\,\mathrm{S}(6l'-3l)\\
&\qquad\qquad-2\,\mathrm{C}(6l'-5l)-137\,\mathrm{C}(6l'-4l)+104\,\mathrm{C}(6l'-3l).
\end{aligned}$$

$$10\,000\,\frac{d\mathrm{R}}{d\varpi}=$$

$$\begin{aligned}
&\qquad\qquad+148\,\mathrm{S}(0l'-1l)-10\,\mathrm{S}(0l'-2l)+0\,\mathrm{S}(0l'-3l)\\
&-6\,\mathrm{C}(0l'-0l)+576\,\mathrm{C}(0l'-1l)+4\,\mathrm{C}(0l'-2l)-4\,\mathrm{C}(0l'-3l)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-4\,\mathrm{S}(1l'-1l)+18\,\mathrm{S}(1l'-2l)-16\,\mathrm{S}(1l'-3l)+0\,\mathrm{S}(1l'-4l)\\
&-16\,\mathrm{C}(1l'-1l)+129\,\mathrm{C}(1l'-2l)+22\,\mathrm{C}(1l'-3l)-7\,\mathrm{C}(1l'-4l)\\
&\qquad\qquad-142\,\mathrm{S}(1l'+0l)-144\,\mathrm{S}(1l'+1l)+8\,\mathrm{S}(1l'+2l)\\
&\qquad\qquad+549\,\mathrm{C}(1l'+0l)-86\,\mathrm{C}(1l'+1l)+1\,\mathrm{C}(1l'+2l)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-8\,\mathrm{S}(2l'-2l)-158\,\mathrm{S}(2l'-3l)+186\,\mathrm{S}(2l'-4l)+50\,\mathrm{S}(2l'-5l)\\
&-5\,\mathrm{C}(2l'-2l)-493\,\mathrm{C}(2l'-3l)-106\,\mathrm{C}(2l'-4l)+53\,\mathrm{C}(2l'-5l)\\
&\qquad\qquad-570\,\mathrm{S}(2l'-1l)-728\,\mathrm{S}(2l'+0l)+38\,\mathrm{S}(2l'+1l)\\
&\qquad\qquad+2\,111\,\mathrm{C}(2l'-1l)-448\,\mathrm{C}(2l'+0l)-35\,\mathrm{C}(2l'+1l)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-16\,\mathrm{S}(3l'-3l)-104\,\mathrm{S}(3l'-4l)+139\,\mathrm{S}(3l'-5l)+42\,\mathrm{S}(3l'-6l)\\
&-16\,\mathrm{C}(3l'-3l)-321\,\mathrm{C}(3l'-4l)-98\,\mathrm{C}(3l'-5l)+45\,\mathrm{C}(3l'-6l)\\
&\qquad\qquad-358\,\mathrm{S}(3l'-2l)-855\,\mathrm{S}(3l'-\ l)+160\,\mathrm{S}(3l'+0l)\\
&\qquad\qquad+1\,329\,\mathrm{C}(3l'-2l)-508\,\mathrm{C}(3l'-\ l)-149\,\mathrm{C}(3l'+0l)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-2\,\mathrm{S}(4l'-4l)-62\,\mathrm{S}(4l'-5l)+101\,\mathrm{S}(4l'-6l)+30\,\mathrm{S}(4l'-7l)\\
&-6\,\mathrm{C}(4l'-4l)-185\,\mathrm{C}(4l'-5l)-62\,\mathrm{C}(4l'-6l)+33\,\mathrm{C}(4l'-7l)\\
&\qquad\qquad-204\,\mathrm{S}(4l'-3l)-729\,\mathrm{S}(4l'-2l)+236\,\mathrm{S}(4l'-1l)\\
&\qquad\qquad+753\,\mathrm{C}(4l'-3l)-446\,\mathrm{C}(4l'-2l)-221\,\mathrm{C}(4l'-1l)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+12\,\mathrm{S}(5l'-5l)-31\,\mathrm{S}(5l'-6l)+51\,\mathrm{S}(5l'-7l)+5\,\mathrm{S}(5l'-8l)\\
&-9\,\mathrm{C}(5l'-5l)-95\,\mathrm{C}(5l'-6l)-32\,\mathrm{C}(5l'-7l)+21\,\mathrm{C}(5l'-8l)\\
&\qquad\qquad-93\,\mathrm{S}(5l'-4l)-543\,\mathrm{S}(5l'-3l)+259\,\mathrm{S}(5l'-2l)\\
&\qquad\qquad+389\,\mathrm{C}(5l'-4l)-322\,\mathrm{C}(5l'-3l)-235\,\mathrm{C}(5l'-2l)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+1\,\mathrm{S}(6l'-6l)-21\,\mathrm{S}(6l'-7l)+34\,\mathrm{S}(6l'-8l)-3\,\mathrm{S}(6l'-9l)\\
&+2\,\mathrm{C}(6l'-6l)-46\,\mathrm{C}(6l'-7l)-30\,\mathrm{C}(6l'-8l)+24\,\mathrm{C}(6l'-9l)\\
&\qquad\qquad-47\,\mathrm{S}(6l'-5l)-364\,\mathrm{S}(6l'-4l)+223\,\mathrm{S}(6l'-3l)\\
&\qquad\qquad+196\,\mathrm{C}(6l'-5l)-222\,\mathrm{C}(6l'-4l)-202\,\mathrm{C}(6l'-3l).
\end{aligned}$$

23. En substituant les expressions précédentes dans les formules du n° **9**, et en intégrant par rapport au temps, nous trouverons les perturbations suivantes de la longitude moyenne, du grand axe, de l'excentricité et du périhélie. Pour les deux premiers éléments, je négligerai ici les termes dont la valeur absolue est au-dessous de 0'',10 ; je négligerai pour l'excentricité ceux dont la valeur absolue est au-dessous de 0'',05 ; et dans la position du périhélie ceux dont la valeur absolue est inférieure à 0'',25. Dans mes minutes, l'exactitude a été poussée plus loin, afin d'avoir exactement les perturbations de la longitude et du rayon vecteur.

$$\begin{aligned}
\delta\rho + \delta\varepsilon = &- 3'',30\, t \\
&+ 0'',43 \sin(\ l'-\ l) - 0'',00 \cos(\ l'-\ l) \\
&+ 0'',06 \sin l' \qquad\quad - 0'',19 \cos l' \\
&+ 0'',50 \sin(2l'-2l) - 0'',00 \cos(2l'-2l) \\
&- 0'',98 \sin(2l'-\ l) + 3'',52 \cos(2l'-\ l) \\
&+ 0'',15 \sin(3l'-3l) - 0'',00 \cos(3l'-3l) \\
&- 0'',13 \sin(3l'-2l) + 0'',44 \cos(3l'-2l) \\
&- 0'',52 \sin(3l'-\ l) - 0'',33 \cos(3l'-\ l) \\
&- 0'',04 \sin(4l'-3l) + 0'',16 \cos(4l'-3l) \\
&- 0'',36 \sin(4l'-2l) - 0'',23 \cos(4l'-2l) \\
&- 0'',10 \sin(5l'-3l) - 0'',06 \cos(5l'-3l) \\
&+ 6'',19 \sin(5l'-2l) - 5'',36 \cos(5l'-2l);
\end{aligned}$$

$$\delta a = - 0'',15 \sin(2l'-\ l) - 0'',04 \cos(2l'-\ l);$$

$$\begin{aligned}
\delta e = &\quad 0'',02\, t \\
&- 0'',05 \sin l \qquad\quad - 0'',01 \cos l \\
&- 0'',13 \sin l' \qquad\quad - 0'',03 \cos l' \\
&+ 0'',94 \sin(2l'-\ l) + 0'',26 \cos(2l'-\ l) \\
&+ 0'',06 \sin 2l' \qquad\ - 0'',09 \cos 2l' \\
&+ 0'',16 \sin(3l'-2l) + 0'',04 \cos(3l'-2l) \\
&+ 0'',28 \sin(3l'-\ l) - 0'',47 \cos(3l'-\ l) \\
&+ 0'',05 \sin(4l'-3l) + 0'',01 \cos(4l'-3l) \\
&- 0'',10 \sin(4l'-2l) + 0'',16 \cos(4l'-2l) \\
&+ 0'',04 \sin(4l'-\ l) + 0'',04 \cos(4l'-\ l) \\
&- 0'',03 \sin(5l'-3l) + 0'',05 \cos(5l'-3l) \\
&- 0'',53 \sin(5l'-2l) - 0'',59 \cos(5l'-2l);
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rllll}
\delta\varpi = & 2'',86\,t & & & \\
 & -\ 0'',08 & \sin l & +\ 0'',27 & \cos l \\
 & -\ 0'',21 & \sin l' & +\ 0'',72 & \cos l' \\
 & +\ 1'',22 & \sin(2l'-l) & -\ 4'',38 & \cos(2l'-l) \\
 & -\ 0'',44 & \sin 2l' & -\ 0'',27 & \cos 2l' \\
 & +\ 0'',18 & \sin(3l'-2l) & -\ 0'',65 & \cos(3l'-2l) \\
 & -\ 2'',23 & \sin(3l'-l) & -\ 1'',35 & \cos(3l'-l) \\
 & +\ 0'',74 & \sin(4l'-2l) & +\ 0'',44 & \cos(4l'-2l) \\
 & +\ 0'',20 & \sin(4l'-l) & -\ 0'',18 & \cos(4l'-l) \\
 & -\ 2'',71 & \sin(5l'-2l) & +\ 2'',45 & \cos(5l'-2l).
\end{array}$$

Je n'ai conservé dans la valeur de $\delta\rho + \delta\varepsilon$ aucun terme dépendant de la longitude moyenne de Mercure. L'action de Vénus y introduit la perturbation

$$0'',010 \sin l - 0'',094 \cos l,$$

négligeable à cause de sa petitesse, et qu'on devrait d'ailleurs omettre quand même elle serait plus considérable. Cette perturbation peut se confondre, en effet, avec l'équation du centre du mouvement purement elliptique, en altérant un peu les valeurs de l'excentricité et de la longitude du périhélie qui y correspondraient. Or l'observation directe donne ces éléments ainsi modifiés. On peut donc laisser de côté la perturbation dont l'argument serait la longitude de Mercure, tant qu'elle n'est pas assez grande pour que la correction qu'elle apporte aux éléments elliptiques puisse influer sur le second terme de l'équation du centre.

Le terme proportionnel au temps $-\ 3'',30\,t$, qui entre dans la valeur de $\delta\rho + \delta\varepsilon$, affecte directement la longitude moyenne et l'anomalie moyenne de la planète. Nous pourrons nous dispenser de le conserver, pourvu que nous empruntions aux observations le moyen mouvement destiné au calcul de la longitude : mais nous augmenterons ce moyen mouvement de $3'',30$ avant de le faire servir au calcul du grand axe de l'orbite.

Dans les termes $\delta e = 0'',02\,t$, et $\delta\varpi = 2'',86\,t$, nous retrouvons les inégalités séculaires de l'excentricité et du périhélie. Les expressions rapportées plus haut supposent $\delta e = 0'',028\, t$ et $\delta\varpi = 2'',81\, t$. La petite différence, qui serait, au reste, sans inconvénient dans la pratique, provient de ce que, dans le calcul des inégalités périodiques, qui nous a donné l'occasion de revenir sur ces nombres, l'approximation des coefficients n'a pas dû être poussée aussi loin que le réclamait la détermination rigoureuse des inégalités séculaires. Et c'est même par cette raison qu'il y a avantage à traiter ces dernières à part.

Enfin l'inégalité à longue période

$$6'',19 \sin(5l'-2l) - 5'',36 \cos(5l'-2l),$$

comprise dans $\delta\rho + \delta\varepsilon$, ne devra pas être appliquée au développement des inégalités de la longitude vraie, suivant ce qui a été expliqué au n° **14**. Il en serait de même des inégalités à longues périodes dépendantes des arguments $(8l' - 3l)$ et $(10l' - 4l)$ si elles avaient été assez grandes pour qu'on dût les conserver. Je les ai trouvées égales à

$$- 0'',09 \sin(8l'-3l) + 0'',01 \cos(8l'-3l),$$

$$0'',03 \sin(10l'-4l) - 0'',08 \cos(10l'-4l).$$

On voit qu'on peut les considérer comme insensibles. Mais elles ne sont pas tellement petites qu'on fût certain, avant tout calcul, qu'elles étaient sans influence. Il est bon de s'assurer, une fois au moins, qu'on n'a négligé aucun terme important.

24. J'ai dit plus haut que l'inégalité du moyen mouvement, dépendante de l'argument $(5l' - 2l)$, était un peu influencée par l'excentricité de Vénus. Achevons de la déterminer. Pour ne laisser aucun nuage, j'ai recalculé complétement cette perturbation par interpolation, en conservant l'excentricité de Vénus; puis, faisant la différence avec la première valeur obtenue dans le numéro précédent, j'ai vérifié que cette différence était égale à la valeur qu'on lui trouve en la déterminant algébriquement.

La perturbation calculée directement, et sans rien négliger, a pour expression

$$6'',29 \sin(5l'-2l) - 4'',07 \cos(5l'-2l).$$

D'autre part, les termes de R qui fournissent la partie dépendante de l'excentricité de Vénus, sont, en omettant l'inclinaison des orbites, les suivants :

$$\frac{e'e^2}{16a'}\left[396\, b_{\frac{1}{2}}^{(4)} + 184\,\alpha\,\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} + 25\,\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} + \alpha^3\,\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3}\right]\cos(5l' - 2l - \varpi' - 2\varpi),$$

$$-\frac{e'^2e}{16a'}\left[402\, b_{\frac{1}{2}}^{(3)} + 193\,\alpha\,\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} + 26\,\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} + \alpha^3\,\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3}\right]\cos(5l' - 2l - 2\varpi' - \varpi).$$

En les réduisant en nombres, différentiant par rapport à ε, et substituant dans la première formule du n° **9**, on obtient la perturbation

$$0'',11\ \sin(5l' - 2l) + 1'',33\ \cos(5l' - 2l).$$

Telle est effectivement la différence qu'on trouve en retranchant de l'expression complète de la perturbation celle qu'on avait d'abord obtenue en négligeant e'.

25. Les expressions $\delta\rho + \delta\varepsilon$, δe et $\delta\varpi$, substituées dans la première formule du n° **10**, donnent les inégalités de la longitude vraie, dans lesquelles j'omettrai seulement celles qui sont au-dessous de $0'',1$ et qui ne peuvent pas se réduire avec d'autres plus sensibles dans une même Table :

$$\delta v = \left\{\begin{array}{l} \ 0'',73\ \sin(l' - l) \\ -\ 2'',15\ \sin(2l' - 2l) \\ -\ 0'',47\ \sin(3l' - 3l) \\ +\ 0'',05\ \sin(4l' - 4l) \end{array}\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{ll} +\ 0'',07\ \sin l' & -\ 0'',29\ \cos l' \\ +\ 0'',65\ \sin 2l' & +\ 0'',40\ \cos 2l' \\ -\ 0'',09\ \sin 3l' & +\ 0'',07\ \cos 3l' \end{array}\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{ll} +\ 0'',04\ \sin(l' - 2l) & +\ 0'',18\ \cos(l' - 2l) \\ +\ 0'',12\ \sin(2l' - 4l) & -\ 0'',07\ \cos(2l' - 4l) \end{array}\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{ll} -\ 1'',03\ \sin(2l' - l) & +\ 3'',70\ \cos(2l' - l) \\ -\ 0'',45\ \sin(4l' - 2l) & -\ 0'',27\ \cos(4l' - 2l) \end{array}\right.$$

$$
\begin{array}{ll}
-\,0'',14\ \sin(2l'-3l) & -\,0'',54\ \cos(2l'-3l)\\
-\,0'',39\ \sin(3l'-2l) & +\,1'',35\ \cos(3l'-2l)\\
-\,0'',04\ \sin(3l'-4l) & -\,0'',14\ \cos(3l'-4l)\\
+\,0'',09\ \sin(4l'-3l) & -\,0'',31\ \cos(4l'-3l)\\
-\,0'',10\ \sin(5l'-4l) & +\,0'',33\ \cos(5l'-4l)\\
-\,0'',49\ \sin(3l'-\ l) & -\,0'',31\ \cos(3l'-\ l)\\
+\,1'',18\ \sin(5l'-3l) & +\,0'',77\ \cos(5l'-3l)\\
+\,0'',14\ \sin(2l'+\ l) & -\,0'',13\ \cos(2l'+\ l).
\end{array}
$$

La seconde formule du n° **10** donnerait ensuite les inégalités du rayon vecteur. Je n'ai trouvé ainsi que des différences insensibles avec les perturbations qui sont rapportées dans la *Mécanique céleste;* et je ne m'y arrêterai pas pour le moment.

26. Il me resterait à présenter toutes les formules relatives aux actions de la Terre, de Jupiter et de Saturne. Mais, comme je l'ai déjà dit, les séries sont ici très-convergentes; ce qui fait que je m'écarte peu des résultats de la *Mécanique céleste.* Je préfère donc supprimer ces détails, et grouper dans un seul tableau tout ce qui concerne la théorie de Mercure.

Ajoutons qu'aucune planète ne produit de perturbation sensible dans le mouvement de Mercure en latitude.

§ V.

Résumé des expressions variables des éléments de l'ellipse, et des perturbations qu'il convient de conserver dans la comparaison de la théorie avec les observations.

27. Les expressions des longitudes seront, dans la suite de ce travail, rapportées à la ligne des équinoxes, mobile en vertu de la précession. Il faudra leur ajouter, quand on les comparera aux étoiles, le terme proportionnel au carré du temps, que je ne vais pas écrire. Mais les arguments des perturbations resteront toujours réglés sur le mouvement sidéral, compté du 1er janvier 1800.

Expression de la longitude moyenne,

$$110^\circ\,13'\,18'',2 + 5\,381\,066'',8655 \times t;$$

Demi-grand axe,

$$a = 0{,}387\,0984.$$

Ce nombre diffère un peu de celui qu'on lit au nº 3. Cela tient à ce que l'action des différentes planètes diminue de 7″ le mouvement sidéral apparent de Mercure. Et ici nous avons tenu compte de cette perturbation, conformément à une remarque du nº 23, tandis qu'il nous était impossible de le faire au moment de la première approximation, lorsque la quantité de chaque perturbation nous était inconnue.

Expressions de l'excentricité en secondes de degré, et de la longitude du périhélie,

$$\begin{aligned} e &= \frac{0{,}2056179}{\sin 1''} + 0'',0425.t, \\ \varpi &= 74^\circ 20' 5'',8 \quad + 55'',502.t; \end{aligned}$$

Inclinaison φ_1 et longitude θ_1 du nœud ascendant, comptées sur l'écliptique mobile,

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 7^\circ\ 0' 5'',9 + 0'',0711.t, \\ \theta_1 &= 45^\circ 57' 9'',0 + 42'',638.t; \end{aligned}$$

Perturbations de la longitude moyenne,

Argument I. $\quad 7'',49 \sin(5l' - 2l - 32^\circ 54');$

Argument II. $\quad 0'',67 \sin(4l'' - l - 20^\circ 12');$

Perturbations de la longitude vraie,

Argument III. $\left\{\begin{array}{l} -\ 3'',84 \sin(2l' - l - 74^\circ 27') \\ -\ 0'',52 \sin(4l' - 2l + 30^\circ 57'); \end{array}\right.$

Argument IV. $\left\{\begin{array}{l} \ 0'',73 \sin(l' - l) \\ -\ 2'',15 \sin(2l' - 2l) \\ -\ 0'',47 \sin(3l' - 3l) \\ +\ 0'',05 \sin(4l' - 4l); \end{array}\right.$

Argument V. $\quad -\ 3'',29 \sin(2l^{\mathrm{iv}} - l - 75^\circ 17');$

Argument VI. $\left\{\begin{array}{l} \ 0'',65 \sin(l^{\mathrm{iv}} - l) \\ -\ 0'',94 \sin(2l^{\mathrm{iv}} - 2l); \end{array}\right.$

Argument VII. $\quad -\ 1'',41 \sin(3l' - 2l - 73^\circ 53');$

$$\text{Argument VIII.}\qquad 1'',41\ \sin(5l' - 3l + 33^\circ 8');$$

$$\text{Argument IX.}\qquad \left\{\begin{aligned} & \ 0'',30\ \sin(l' - 76^\circ 25') \\ & +\ 0'',76\ \sin(2l' + 31^\circ 36') \\ & -\ 0'',11\ \sin(3l' - 37^\circ 53'); \end{aligned}\right.$$

$$\text{Argument X.}\qquad \left\{\begin{aligned} & -\ 0'',57\ \sin(l^{\text{iv}} + 21^\circ 44') \\ & +\ 0'',50\ \sin(2l^{\text{iv}} + 30^\circ 53'); \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} & -\ 0'',41\ \sin(2l'' - l - 74^\circ 21') \\ & +\ 0'',21\ \sin(4l'' - 2l + 44^\circ 26'); \end{aligned}\right.$$

$$-\ 0'',58\ \sin(3l' - l + 32^\circ 19')$$

$$-\ 0'',56\ \sin(2l' - 3l + 75^\circ 27')$$

$$\left\{\begin{aligned} & \ 0'',21\ \sin(l'' - l) \\ & -\ 0'',24\ \sin(2l'' - 2l) \\ & +\ 0'',02\ \sin(3l'' - 3l); \end{aligned}\right.$$

$$-\ 0'',40\ \sin(2l^{\text{v}} - l - 74^\circ 21').$$

Perturbations du rayon vecteur,

$$\text{Argument IV.}\qquad \left\{\begin{aligned} & \ 0,000\,000\,39\ \cos(l' - l) \\ & -\ 0,000\,001\,99\ \cos(2l' - 2l) \\ & -\ 0,000\,000\,39\ \cos(3l' - 3l); \end{aligned}\right.$$

$$\text{Argument V.}\qquad -\ 0,000\,003\,00\ \cos(2l^{\text{iv}} - l - 74^\circ 21');$$

$$\text{Argument VII.}\qquad -\ 0,000\,001\,12\ \cos(3l' - 2l - 74^\circ 44');$$

$$\text{Argument VIII.}\qquad 0,000\,001\,22\ \cos(5l' - 3l + 28^\circ 37').$$

Je ne conserve dans les Tables usuelles que les perturbations correspondantes aux dix premiers arguments. Cela est plus que suffisant pour la construction des éphémérides journalières. On fera bien toutefois de tenir compte des autres inégalités dans le calcul des passages de Mercure sur le Soleil. Il n'y aura aucune difficulté à déterminer directement leurs valeurs.

L'expression des perturbations qui, dans le n° 25, renfermait en général le sinus et le cosinus d'un même argument, ne présente plus ici que des sinus pour la longitude et des cosinus pour le rayon vecteur. C'est une transformation connue.

§ VI.

Remarques sur les Tables de Mercure de M. de Lindenau.

28. Le changement apporté par l'auteur à la masse de Vénus domine tout son travail. Il la suppose égale à $\frac{1}{349\,440}$, plus grande de $\left(\frac{1}{8}\right)^{ème}$ que la masse admise plus haut, et qui est donnée par la variation de l'obliquité de l'écliptique. Par là, les mouvements séculaires du nœud et du périhélie sont considérablement altérés. La correction du mouvement du périhélie réagit ensuite sur la détermination du moyen mouvement, à cause de l'influence prédominante des anciens passages de la planète sur le Soleil : ils ont été pour la plupart observés en un même point de l'orbite. L'auteur arrive à cette détermination de la masse de Vénus par une moyenne entre trois nombres qui sont, au reste, loin de s'accorder. L'un est fourni par la considération du mouvement du nœud ; l'autre par la considération des perturbations périodiques dues à l'action de Vénus ; le troisième est donné par la détermination de la variation séculaire de l'aphélie. Examinons successivement chacun de ces résultats.

29. Si nous tenons pour constants tous les calculs de l'auteur, nous admettrons avec lui, *page* 9 *des Tables,* que le mouvement annuel du nœud, *déduit des latitudes observées,* dans les passages de Mercure sur le Soleil, est égal à 42″,502. Retranchant la précession employée dans ces Tables, 50″,11, il nous restera pour le mouvement sidéral du nœud, dû à l'action de toutes les planètes, et déduit de l'observation,

$$- 7'',608.$$

D'autre part, j'ai trouvé théoriquement, n° 20, en admettant la masse ordinaire de Vénus, pour le mouvement sidéral du nœud,

$$- 7'',585,$$

quantité qui ne s'éloigne de la précédente que de 0 ,023. Cette différence ne produit que 2″,3 sur la longitude du nœud en cent ans. Elle correspond à une variation de 0″,1 dans la latitude géocentrique, lors des passages de novembre, qui sont les seuls dans lesquels la latitude ait été observée anciennement. Si donc il y avait quelque chose à conclure de cette détermination du mouvement du nœud, c'était que la masse ordinairement reçue est fort exacte.

L'erreur de M. de Lindenau est venue ici de ce qu'ayant trouvé que le mouvement théorique du nœud, déduit de la considération des seuls termes du premier ordre, était trop petit, il s'en est pris à la masse de Vénus. Mais si cet auteur avait eu la précaution de calculer les termes du troisième ordre qui entrent dans les inégalités séculaires, il aurait reconnu qu'ils donnaient au mouvement du nœud toute la précision désirable, sans qu'on ait besoin de toucher à la masse de Vénus.

30. Par la considération des perturbations périodiques, l'auteur arrive à la masse suivante,

$$m' = \frac{1}{344000}.$$

Une masse est proportionnelle à l'étendue des perturbations qu'elle détermine, toutes circonstances étant égales d'ailleurs. J'ai fait voir, au n° **15**, combien l'auteur s'est trompé en empruntant à la *Mécanique céleste* l'expression des perturbations produites par Vénus. La détermination de la masse précédente ne saurait donc avoir aucun sens.

31. Enfin, par la considération du mouvement de l'aphélie, l'auteur obtient la masse suivante de Vénus,

$$m' = \frac{1}{318000}.$$

Et dès l'abord ce nouveau résultat se critique par lui-même. Il est de toute évidence que cette masse de Vénus est énormément trop forte. Delambre qui, au jugement des astronomes, avait déjà donné une masse trop grande, ne l'avait cependant portée qu'à $\frac{1}{357000}$. M. de Lindenau lui-même l'a bien senti, et il a cherché à atténuer les effets de cette détermination autant qu'il l'a pu. Pour composer la masse définitive qu'il a adoptée pour Vénus, il a pris la moitié de la masse donnée par les inégalités périodiques, le quart seulement de celle donnée par le mouvement séculaire du nœud, et le quart également de la masse donnée par le mouvement séculaire de l'aphélie. Pourquoi donc accorder plus de confiance au nombre déterminé par la considération des inégalités périodiques qu'à chacun de ceux qu'on déduit des inégalités séculaires, lorsque les premières sont petites et les autres considérables? On trouverait beaucoup de raisons pour en agir tout autrement, et l'on n'en voit qu'une seule pour suivre la marche arbitraire de l'auteur, savoir, la nécessité d'échapper aux conséquences d'une détermination erronée.

32. En résumé, la masse adoptée par M. de Lindenau se compose :

1°. Du quart d'une masse $\frac{1}{379\,000}$, inexacte parce que le rapport du mouvement du nœud à la masse de Vénus n'avait pas été déterminé avec assez de précision ;

2°. De la moitié d'une masse $\frac{1}{344\,000}$, calculée par la considération de perturbations périodiques complétement fausses ;

3°. Du quart d'une masse $\frac{1}{318\,000}$, dont l'inexactitude est démontrée par sa grandeur même.

Je dirai, dès à présent, qu'ayant introduit la correction de la masse de Vénus comme inconnue, dans mes équations de condition, je l'ai trouvée très-petite, et au-dessous de l'exactitude qu'on peut attendre des observations de Mercure.

§ VII.

Observations de Mercure en ascension droite et en déclinaison, pour servir à la rectification des éléments de l'orbite.

33. Ces observations se composent de deux séries. L'une, comprenant 157 observations faites à l'Observatoire de Paris depuis le 20 avril 1836 jusqu'au 18 août 1842. L'autre, comprenant 240 observations faites dans le même lieu depuis le 8 mars 1801 jusqu'au 22 octobre 1828.

Observations de la première série.

34. L'erreur de collimation de la lunette méridienne, l'erreur en azimut et l'erreur de niveau étant toujours nulles ou fort petites, je me suis dispensé d'y avoir égard, en ayant soin de comparer la planète aux étoiles les plus voisines en déclinaison.

J'ai choisi, autant qu'il a été possible, pour déterminer l'heure de la pendule, des étoiles fondamentales observées par le même astronome qui avait observé Mercure.

J'ai adopté le catalogue des étoiles fondamentales donné par M. Bessel dans les *Tabulæ Regiomontanæ.*

Les astronomes actuels de Paris observant toujours l'ascension droite du bord éclairé de Mercure, j'ai ramené l'observation au centre de la planète par la connaissance de son diamètre apparent.

Enfin, le mouvement propre apparent de Mercure est assez rapide pour qu'il y ait avantage à en tenir compte, lorsque la planète ayant été observée aux deux premiers fils seulement ou aux deux derniers, on veut ramener l'observation au fil méridien. C'est ce que j'ai fait.

Les *deux premières* colonnes du tableau, n° **38**, renferment l'indication de la date de l'observation. La *troisième* contient le temps moyen, compté de minuit, et déduit de l'ascension droite méridienne observée. La *quatrième* renferme les valeurs des ascensions droites déduites de l'observation, et réduites en degrés de la circonférence.

35. Les déclinaisons ont été observées au cercle entier de Fortin. J'ai calculé la correction de collimation, pour chaque observation, au moyen d'étoiles prises dans le voisinage du parallèle de Mercure, et observées par le même astronome qui avait observé la déclinaison de la planète. Cette dernière précaution est tout à fait nécessaire, suivant le travail de MM. E. Bouvard et V. Mauvais sur les erreurs individuelles en déclinaison. On peut consulter à ce sujet le Rapport de M. Arago, inséré dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XV, page 944.

J'ai calculé les réfractions au moyen des Tables de la *Connaissance des Temps*, et d'après les indications du thermomètre intérieur.

La déclinaison du centre de la planète étant directement observée, il n'y a aucune correction à faire à ce sujet.

Enfin j'ai réduit l'observation au centre de la Terre, d'après la distance calculée de la planète, et en supposant la parallaxe horizontale égale à 8",6, à la distance moyenne.

Les déclinaisons apparentes, ainsi obtenues, sont inscrites dans la *cinquième* colonne du tableau, n° **38**

36. Les Tables actuelles du Soleil sont assez exactes, et la *Connaissance des Temps* a été calculée avec assez de soin, dans ces dernières années, pour qu'on pût emprunter à cet ouvrage les longitudes apparentes du Soleil. La grande précision des observations, faites actuellement à Paris, m'a toutefois porté à chercher la correction qu'elles indiquaient dans les longitudes calculées du Soleil; et, après avoir obtenu cette correction par une série de plusieurs jours, je l'ai ajoutée aux positions données dans la *Connaissance des Temps*. Du grand nombre d'observations que j'ai ainsi discutées, il résulte que l'erreur d'une observation de l'ascension droite du Soleil n'est moyennement que de 0″,06 de temps à l'Observatoire de Paris.

J'ai emprunté aux Tables de M. Bessel les rayons vecteurs du Soleil.

J'ai cru pouvoir négliger la petite latitude de cet astre, qui ne peut avoir aucune influence sur le résultat moyen des nombreuses observations que j'ai employées.

Enfin, j'ai adopté la même obliquité moyenne de l'écliptique que M. Bessel.

37. Pour comparer les positions observées avec celles qui résultent des éléments provisoires, je calculerai successivement les longitudes et les latitudes géocentriques apparentes par ces éléments et par l'observation; puis, je prendrai la différence des résultats. Cette manière d'opérer est celle qui se prête le mieux au calcul des équations de condition.

La *sixième* colonne du tableau suivant présente les expressions des longitudes géocentriques apparentes de Mercure, calculées sur les éléments du mouvement de la planète compris dans le § V. Dans la *septième* colonne se trouvent les secondes des longitudes géocentriques apparentes, déduites des ascensions droites et des déclinaisons observées. Enfin, la *huitième* colonne renferme les erreurs des Tables en longitude.

Les *neuvième, dixième* et *onzième* colonnes présentent la même comparaison en latitude.

Les nombres de la *douzième* colonne sont des numéros d'ordre, qui serviront plus loin à faire reconnaître quelles observations entrent dans chacune des équations de condition.

58. *Tableau de la première série d'observations, et de sa comparaison avec les éléments provisoires.*

ANNÉE.	MOIS et jour.	TEMPS moyen.	ASCENSION droite observée.	DÉCLINAISON observée.	LONGITUDE apparente tabulaire.	SECONDES de la longitude observée.	ERREUR de la longitude tabulaire.	LATITUDE apparente tabulaire.	SECONDES de la latitude observée.	ERREUR de la latitude tabulaire.	N° d'ordre.
		h m s	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″	° ′ ″	″	″	
1836	Avril. 20	11 17.54	18. 2 19,1	5.46. 5,1	18.50. 0,9	52,8	8,1	−1.44.42,1	−46,3	4,2	117
	Mai.. 12	12 49.11	62.36.34,2	22.46.57,6	64 53.33,0	27,8	5,2	1.40.45,3	42,6	2,7	118
	13	12.53.32	64.41. 6,5	23.14. 9,2	66.51.21,0	8,7	12,3	1.47.48,9	46,4	2,5	
	14	12.57.46	66.43.46,2	23.39.54,0	68.46.34,7	26,0	8,7	1.54.11,8	9,7	2,1	
	15	13. 1 51	68.44.22,3	24. 2 25,8	70.39. 5,6	55,9	9,7	1.59.50,8	47,3	3,5	
	18	13.13. 7	74.31.20,0	24.54.53,8	75.59.11,4	59,4	12,0	2.12.12,5	12,2	0,3	119
	19	13.16.30	76.21.22,8	25. 7 30,2	77.39 46,9	32,8	14,1	2.14.43,9	45,5	− 1,6	
	20	13.19.42	78. 8.29,4	25.17.46,1	79.17.13,0	3,2	9,8	2.16.25,8	27,4	− 1,6	
	21	13.22.40	79.52.15,7	25.25.46,8	80.51.26,2	13,9	12,3	2.17.17,6	19,2	− 1,6	
	Juill. 19	10.39 17	97. 3.59,1	21. 4. 6,4	96.35.53,7	48,8	4,9	−2.13.51,9	−55,4	3,5	120
	28	10.56.56	110.21.45,9	22. 1. 9,8	108.49.20,2	9,0	11,2	−0. 7. 9,4	−16,4	7,0	121
	Août. 30	12.56.21	172.49.36,6	3.52.17,1	171.53. 8,7	2,9	5,8	0.42.21,4	23,8	− 2,4	122
	31	12.58.20	174.18.29,8	3. 6.37,1	173.32.40,3	36,3	4,0	0.35.33,4	33,6	− 0,2	
	Sept. 26	13.23.13	206.10.29,0	−13.43.11,9	209.12.46,2	48,0	− 1,8	−2.41.28,6	−27,8	− 0,8	123
	Nov.. 12	10.37.25	210.55.58,8	−10.20.23,4	212.23.29,6	29,4	0,2	2. 6. 9,3	10,2	− 0,9	124
	15	10.41.40	214.57.28,2	−11.58.57,7	216.39.51,4	52,4	− 1,0	1.52.28.2	27,7	0,5	
1837	Mars. 10	10.34.34	326.31.45,3	−15. 0.36,0	323.42.11,2	13,9	− 2,7	−1.27.39,5	−36,6	− 2,9	125
	Avril. 1	11.17.25	358.57. 7,9	− 2.48.42,1	357.55.12,4	8.7	3,7	−2. 9.42,6	−43,2	0,6.	126
	2	11.20. 4	0.36. 6,5	− 2. 1.56,4	359.44.37,0	33,0	4,0	−2. 6.12,9	−14,0	1,1	
	Mai.. 17	13.24.38	76.11.13,0	24.51. 5,3	77.28.49,5	48,8	0,7	1.59.15,7	15,9	− 0,2	127
	Juill. 3	10.32. 0	79.14. 5,8	20.26.39,4	79.54.38,7	34,3	4,4	−2.38.32,1	−30,0	− 2,1	128
	4	10.32.54	80.26.46,1	20 43.33,5	81. 3.41,1	41,3	− 0,2	−2.26.23,4	−25,0	1,6	
	Août. 7	12.47.22	147.40. 4,0	14.46.50,5	144.49.11,3	4,3	7,0	1.36.42,4	43,1	− 0,7	129
	14	13. 6.58	159.28.54,1	9.42. 2,5	157.23. 2,9	49,6	13,3	0.58.27,7	28,7	− 1,0	130
	18	13 15.19	165.30.53,9	6.51.14,0	164. 1.10,9	4,5	6,4	0.36.24,4	25,3	− 0,9	
	19	13.17. 7	166.57. 8,9	6. 7.18,2	165.37. 7,9	5,8	2,1	0.29. 6,2	7,2	− 1,0	
	23	13.23.16	172.26.14,3	3.13.58,0	171.46.48,2	44,6	3,6	−0. 2. 4,3	− 1,3	− 3,0	131
	25	13.25.45	175. 1.48,9	1.49. 0,7	174.43. 8,3	5,9	2,4	−0.18.36,7	−32,1	− 4,6	
	26	13.26 51	176 17.29,3	1. 7. 4,8	176. 9. 9,1	10,9	− 1,8	−0.27. 3,4	−59,0	− 4,4	
	27	13.27.50	177.31.34,4	0.25.39,6	177.33.41,7	37,3	4,4	−0.35.36,1	−32,4	− 3,7	
	Sept. 9	13.31.36	191.16 55,8	− 7.32.29,5	193.19.10,9	11,1	− 0,2	−2.28.27,4	−27,4	0,0	132
	10	13.31. 2	192. 7.41,9	− 8 2.39,3	194.17.17,4	19.0	− 1,6	−2.36.37,4	−36,3	− 1,1	
	20	13.14.29	197.50. 6.0	−11.32.28,4	200.50. 3,1	2,7	0,4	−3.40.22,3	−20,7	− 1,6	133
	23	13. 4. 1	198. 9.57,9	−11.48.17,2	201.14 8,0	5,9	2,1	−3.47.33,1	−35,7	2,6	
	Oct.. 12	11. 0.44	185.59.12,8	− 2.23.31,4	186.26.23,9	34,2	−10,3	0.11. 6,8	1,5	5,3	134
	Nov.. 2	10.54.38	205. 9.18,2	− 8.33.21,5	206.25.35,9	31.4	4,5	1.46.11,1	11,3	− 0,2	135
	6	11. 2.52	211. 9.45,6	−11. 9.29,5	212.53. 2,2	59.1	3,1	1.24.38,3	38,6	− 0,3	
	Déc.. 15	12.45.18	275.17. 1,0	−25.32.16,9	274.46.10,6	10,4	0,2	−2. 9.50,6	−46,3	− 4,3	136
	29	13.22. 9	298.19. 7,7	−22.40.16.4	295.58.14.3	16,9	− 2,6	−1.43.43,9	−41,0	− 2,9	137
	31	13.25.11	301. 3.15,0	−21.54.28,4	298.36.14.5	15,0	− 0,5	−1.28.42,5	−44.1	1,6	
1838	Fevr. 7	10.29.34	294.28.51,4	−20. 9.48,1	292.53.46,2	56,0	− 9.8	1.22.19,4	21,0	− 1,6	138
	Mars. 1	10.51.26	321.38.56,7	−16.53.32,8	318.39. 8.5	13.0	− 4,5	−1.43.37,6	−42,9	5,3	139
	21	11.39.47	353.28.49,8	− 4.58. 2,9	352. 3. 9.0	57.5	11,5	−1.58.19,1	−15,7	− 3,4	141

Suite du tableau de la première série d'observations.

ANNÉE.	Mois et jour.	Temps moyen.	Ascension droite observée.	Déclinaison observée.	Longitude apparente tabulaire.	Secondes de la longitude observée.	Erreur de la longitude tabulaire.	Latitude apparente tabulaire	Secondes de la latitude observée.	Erreur de la latitude tabulaire.	N° d'ordre
		h m s	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″	° ′ ″	″	″	
1838	Avril. 10	12.46.11	29.50.25,2	13. 7.33,2	32.20.47,8	37,8	10,0	0.52.55,0	51,5	3,5	142
	Juin. 1	10.43.25	50.18.52,9	14.28.14,5	51.42.20,5	14,7	5,8	−3.52. 8,9	− 3,7	− 5,2	143
	8	10.27.38	53.15.41,4	15.11.32,0	54.38.56,3	57,5	− 1,2	−3.52.17,5	−19,0	1,5	144
	Août. 11	13.38.31	164 11.47,9	6.31.10,3	162.56.19,1	15,3	3,8	−0.12.17,9	−17,8	− 0,1	145
	12	13.39.26	165.24.35,6	5.51.16,2	164.18.26,3	24,4	1,9	−0.21.22,1	−19,7	− 2,4	
	13	13.40.12	166.35.24,6	5.11.41,3	165.38.46,7	42,7	4,0	−0.30.35,8	−36,3	0,5	
	14	13.40.52	167.44.22,5	4.32.38,6	166.57 17,9	12,1	5,8	−0.39.58,6	−54,8	− 3,8	146
	15	13.41.23	168.51.28,0	3.54 0,2	168.13.57,0	53,2	3,8	−0.49.28,9	−24,2	− 4.7	
	16	13.41.47	169.56.34,1	3.15.50,3	169.28.40,5	37,5	3,0	−0.59. 6,6	− 5,6	− 1,0	
	22	13.41.18	175.44.11,0	− 0.17.50,9	176.12.23,3	21.6	1,7	−1.58.11,5	− 9,4	− 2,1	147
	28	13.35. 3	180. 4.53,6	− 3.14. 5,6	181.22.51,1	50,1	1,0	−2.56.11,7	− 5,2	− 6,5	148
	31	13.29. 8	181.33.26,5	− 4.21.16,2	183. 9.49,7	48,6	1,1	−3.22.26,7	−27,7	1,0	
	Sept. 1	13.26.40	181.55.30,8	− 4.39.38,2	183.37.20,1	21,6	− 1,5	−3.30.31,8	−31,7	− 0,1	149
	4	13.17.34	182.35.53,3	− 5.20.11,1	184.30.30,1	31,3	− 1,2	−3.51.40,2	−41,0	0,8	
	Oct.. 3	10.45.42	173. 6.34,0	4.13.56,5	172. 0. 0,2	1,5	− 1,3	1. 9. 1,2	58,1	3,1	150
	4	10.45.12	173.58.11,9	4. 3.23,7	172.51.32,5	30,2	2,3	1.19.43,9	40,0	3,9	
	10	10.49 42	181. 0.50,3	1.40.14,5	180.15.58.2	53,1	5,1	1.56.11,1	10,5	0,6	151
	14	10.56.55	186.45 56,4	− 0.46.21,4	186.31. 6,1	0,6	5,5	1.58.42,9	44,2	− 1,3	
	18	11. 5.27	192.50.41,0	− 3.32. 1,7	193.11.32,4	27,4	5,0	1.49.20,8	21,1	− 0,3	152
	22	11.14.24	199. 1.56,6	− 6.24. 4,2	199.59.16,4	8,8	7,6	1.32. 3,2	0,1	3,1	
	Déc.. 14	13.21.44	283.11.39,3	−24.57.32,4	281.57. 2,3	1,8	0,5	−2. 2.33,0	−33,2	0,2	153
	16	13.24. 4	285.45. 1,9	−24.31.32,7	284.18.17,5	18,4	− 0,9	−1.50.32,3	−33,1	0,8	
1839	Janv. 16	10.37. 6	274.26.53,5	−20.41.13,8	274. 9.42,6	55,9	−13,3	2.42.37,1	40,8	− 3,7	154
	18	10.32.13	275.11.42,8	−20.58.31,8	274.51. 3,2	15,7	−12,5	2.23.57,4	59,2	− 1,8	
	Févr. 27	11.31.37	329.30.39,0	−14.41.59,4	326.31.17,5	21,0	− 3,5	−2. 8.29,4	−30,2	0,8	155
	Mars. 1	11.37. 3	332.50 39,6	−13.30.14,7	329.58.18,9	18,9	0,0	−2. 8.55,6	−58,7	3,1	156
	2	11.39.48	334.31.14,4	−12.52.13,9	331.43.25,3	25,9	− 0,6	−2. 8.28,8	−26,8	− 2,0	
	3	11.42.35	336.12.12,0	−12.13. 0,4	333.29.36,7	34,3	2,4	−2. 7.34,7	−34,3	− 0,4	
	4	11.45.23	337.53.36,8	−11.32.24,0	335.16.54,1	51,6	2,5	−2. 6.12.5	−12,3	− 0,2	
	5	11.48.14	339.35.24,9	−10.50.28,5	337. 5.17,2	13,6	3,6	−2. 4.22,1	−21,3	− 0.8	
	Avril. 7	13.11.34	33. 0.33,7	16. 7. 5,1	36.14.51,3	46,6	4,7	2.39.13,8	10,3	3,5	157
	11	13. 8. 6	36. 5. 3,4	17.29.46,0	39.28.55,0	58,9	− 3,9	2.59.17,8	17,3	0,5	
	Mai.. 27	10.20.24	39.23. 0,3	11.49.16,6	40.43.27,3	26,6	0,7	−3.24.11,5	− 9,3	− 2,2	158
	29	10.21. 7	41.32. 0,0	12.37.35,8	42.58.33,9	27,6	6,3	−3.16.23,5	−21,5	− 2,0	
	30	10.21.47	42.41. 2,2	13. 3.44,4	44.10.39,4	36,2	3,2	−3.11.19,6	−18,3	− 1,3	
	Juin. 7	10.34.20	53.43. 2,0	17. 1.22,8	55.30.39,2	36,7	2,5	−2.11.52,2	−48,4	− 3.8	159
	12	10.49. 7	62.21.11,3	19.39.37,6	64. 5. 3,1	53,8	9,3	−1.20.45,7	−48,1	2.4	160
	13	10.52.46	64.15. 2,4	20.10.18,2	65.55.52,4	43,7	8.7	−1. 9.43,6	−46,6	3,0	
	14	10.56.38	66.12.17,7	20.40.16,9	67.49.14,6	5,7	8,9	−0.58.31,2	−33,1	1,9	
	17	11. 9.33	72.24. 0,7	22. 3.52,1	73.43.47,5	34,1	13,4	−0.24.27,0	−30,4	3.4	161
	20	11.24.17	79. 3.15,5	23.13.51,4	79 57.20,9	5,1	15,8	0. 9. 0,3	58,9	1,4	
	Juill. 16	13.27.28	135.33.39,0	18.24.56,2	132.39.44,4	36,3	8,1	1.26.57,9	58,6	− 0,7	162
	17	13.30. 8	137.12.58,3	17.50.46,5	134.20. 0,5	51,9	8,6	1.21.29,8	29,0	0,8	

Suite du tableau de la première série d'observations.

ANNÉE.	Mois et jour.	Temps moyen.	Ascension droite observée.	Déclinaison observée.	Longitude apparente tabulaire.	Secondes de la longitude observée.	Erreur de la longitude tabulaire.	Latitude apparente tabulaire.	Secondes de la latitude observée.	Erreur de la latitude tabulaire.	N° d'ordre.
		h m s	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″	° ′ ″	″	″	
1839	Août. 2	13.50. 8	158. 0. 3,0	8.13.45,9	156.36. 8,8	4,8	4,0	−0.56.10,9	− 3,6	− 7,3	163
	5	13.49.10	160.42 55,2	6.33.31,2	159.43.25,6	21,4	4,2	−1.29. 0,3	−54,0	− 6,3	164
	8	13.46.33	163. 0 48,2	5. 0.59,5	162.25.29,1	25,6	3,5	−2. 2.42,3	−37,3	− 5,0	
	13	13.37.56	165.47. 1,5	2.51.28,9	165.48.32,1	27,1	5,0	−2.58.37,7	−33,7	− 4,0	165
	Sept. 16	10.50. 6	157.13. 8,7	9.46.28,7	155.18.53,0	52,6	0,4	0.13.10,9	5,0	5,9	166
	Déc.. 7	13.15.11	274.25. 3,2	−24.43.40,8	274. 0.35,1	46,3	−11,2	−1.19.35,7	−37,8	2,1	167
1840	Avril. 25	10.33.40	11.54.59,2	3. 0.34,7	12. 7.58,4	58,1	0,3	−1.56.39,8	−41,0	1,2	168
	29	10.25.38	13.50.37,8	3.10. 9,9	13.58.12,8	11,0	1,8	−2.32.42,5	−42,0	− 0,5	169
	30	10.24.12	14.28.15,9	3.18.22,0	14.36. 1,2	2,8	− 1,6	−2.39.42,9	−39,5	− 3,4	
	Mai.. 1	10.22.59	15. 9. 1,5	3.28.37,4	15.17.36,6	35,4	1,2	−2.45.55,4	−52,0	− 3,4	
	2	10.21.58	15.52.56,3	3.40.59,1	″ ″ ″	″	″	−2.51.22,4	−17,5	− 4,9	
	Juin. 1	11.10.52	57.42.37,5	19.23.50,3	59.44.42,3	25,6	16,7	−0.44. 0,1	− 2,8	2,7	170
	2	11.15.18	59.48.18,1	19.59.50,1	61.47.53,4	38,4	15,0	−0.33.10,5	−15,8	5,3	
	16	12.30.15	92.23.46,1	25. 2.13,1	92.10.33,5	18,1	15,4	1.35.36,9	34,0	2,9	171
	20	12.51. 8	101.34.31,9	24.54.18,9	100.29.47,9	30,6	17,3	1.51.51,9	50,6	1,3	
	21	12.56. 0	103.46.43,1	24.46. 0,0	102.30. 2,8	48,2	14,6	1.54. 3,9	2,7	1,2	172
	22	13. 0.40	105.56.12,8	24.35.23,6	104.28.17,8	0,2	17,6	1.55.30,9	31,0	− 0,1	
	23	13. 5.11	108. 3. 6,2	24.22.35,2	106.24.29,3	15,3	14,0	1.56.14,4	14,4	0,0	
	Juill. 15	13.54.19	142. 3.17,8	14.37.50,4	139.44. 1,6	58,8	2,8	−0.17.50,6	−48,3	− 2,3	173
	16	13.54.16	143. 1.33,4	14. 7.10,9	140.47.20,7	12,6	8,1	−0 29. 4,9	− 3,2	− 1,7	
	Août. 31	10.50.34	142.18.49,9	14.34.38,0	139.59.12,2	15,5	− 3,3	−0.16. 4,0	− 7,3	3,3	174
	Sept. 6	10.56.50	149.48. 3,8	13.25. 5,9	147.13.43,8	39,4	4,4	1. 2. 8,7	7,4	1,3	175
	Oct. 9	12.20.47	203.22.17,4	− 9.43.14,3	205.12.31,4	26,2	5,2	0. 2.39,0	42,6	− 3,6	176
	10	12.22 45	204.51. 7,7	−10.24.47,4	206.49. 4,1	1,7	2,4	−0. 4.14,9	−13,0	− 1,9	
	14	12.30.28	210.43.49,1	−13. 4.16,2	213. 8.23,5	20,6	2,9	−0.31.55,6	−54,9	− 0,7	177
	24	12.49. 8	225.15.57,6	−18.49.26,7	228.12.31,1	26,0	5,1	−1.37.17,0	−14,1	− 2,9	178
	30	12.59.57	233.53.19,6	−21.32.50,6	236.43.52,8	54,7	− 1,9	−2. 9.44,5	−45,2	0.7	179
1841	Mars. 11	12.58.21	3.35.49.5	5. 3.17,1	5.18.31,6	37,8	− 6,2	″ ″ ″	″	″	180
	Avril. 27	10 26.30	11.51. 6,7	2. 0.28,3	11.41. 0,8	56,3	4,5	−2.50.26,8	−31,0	4,2	181
	28	10.27.40	13. 7.52,8	2.33.23,9	13. 4.31,8	31,0	0,8	−2.50. 1,2	− 2,2	1,0	
	30	10.30.22	15.46.42,1	3.42.36,9	15.57.46,6	43,9	2,7	−2.47.26,7	−23,3	− 3,4	
	Mai. 1	10.31.54	17. 8.53,7	4.18.47,8	17.27.26,7	25,9	0,8	−2.45.18,5	−17,8	− 0,7	
	11	10.54.16	32.36.49,7	11. 8.24,0	34.13. 9,8	2,4	7,4	−1.54.30,1	−31,4	1,3	182
	14	11. 3.49	37.57.47,5	13.22.17,8	39.53.28,6	18,5	10,1	−1.29.48,6	−50,5	1,9	183
	17	11.14.51	43.41.16,4	15.36.50,6	45.51.13,9	59,8	14,1	−1. 1.39,3	−43,1	3,8	
	Juin. 17	13.36.53	109.50.57,9	24. 2.59.7	108. 4.31,5	23,3	8,2	1.49.34,8	34,6	0,2	184
	28	13.53. 0	124.43.53,7	20. 3.38,2	122.21.24,4	22,5	1,9	0.25. 6,4	7,8	− 1,4	185
	Août. 19	10.52.42	130.46.57,8	18.12.35,0	128.21. 8,4	4,1	4,3	0. 1. 7,4	0,8	6,6	186
	20	10.54 39	132.15.40.4	18. 3.27,9	129 44.53,2	47.6	5,6	0.14.34,0	28,3	5,7	
	Sept. 21	12.29.11	187.29.55,3	− 2.35.12,4	187.54.32,7	25,9	6,8	0.36. 7,0	6,7	0,3	187
	Déc.. 2	10.27.33	227.58.19,8	−15.18.53,3	229.44.10,7	8,5	2.2	2.27.41,2	42,6	− 1,4	188
	11	10.33.35	238.21.18,8	−18.41.39,9	240.11.17,3	17,7	− 0,4	1.32.55,5	55,6	− 0,1	189

Suite du tableau de la première série d'observations.

ANNÉE	Mois et jour.	Temps moyen.	Ascension droite observée.	Déclinaison observée.	Longitude apparente tabulaire.	Secondes de la longitude observée.	Erreur de la longitude tabulaire.	Latitude apparente tabulaire.	Secondes de la latitude observée.	Erreur de la latitude tabulaire.	N° d'ordre
		h m s	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″	° ′ ″	″	″	
1842	Févr. 6	13.11.20	334. 5. 1,2	−11.42.49,1	331.44.27,8	26,1	1,7	−0.54.23,9	−30,6	6,7	190
	8	13.15.26	337. 5. 8,6	−10.11.38,0	335. 2.25,1	18,7	6,4	−0.33.35,7	−35,1	2,4	
	15	13.21.13	345.26. 0,8	− 5. 8. 1,9	344.36.22,8	22,2	0,6	1. 0.40,0	39,2	0,8	191
	Avril. 8	10.29. 7	353.32.38,2	− 5.25.37,7	351.55.28,0	31,5	− 3,5	−2.25. 7,6	− 6,2	− 1,4	192
	9	10.30.11	354.47.41,6	− 4.55.44,4	353.15.34,3	40,3	− 6,0	−2.28.17,2	−12,6	− 4,6	
	10	10.31.20	356. 4. 9.8	− 4.26.38,7	354.37.35,7	38,3	− 2,6	−2.30.54,9	−52,0	− 2,9	
	11	10.32.35	357.22. 5,5	− 3.55.11,4	356. 1.29,0	32,7	− 3,7	−2.33. 1,0	−55,8	− 5,2	
	17	10.42. 0	5.38.35,6	− 0.21.39,4	5. 2.11,0	9,8	1,2	−2.34.32,5	−30,4	− 2,1	193
	18	10.43.53	7. 6.10,6	0.17.51,6	6.38.20,3	20,0	0,3	−2.32.56,9	−54,2	− 2,7	
	19	10.45.52	8.35.10,1	0.58.20,3	8.16.11,9	10,0	1,9	−2.30.49,9	−50,6	0,7	
	20	10.47.57	10. 5.38,9	1.39.53,0	9.55.45,5	45,7	− 0,2	−2.28.11,7	−12,7	1,0	
	22	10.52.25	13.11. 0,0	3. 5.48,5	13.20. 0,4	59,1	1,3	−2.21.20,8	−22,0	1.2	194
	23	10.54.48	14.45.56,4	3.50. 6,0	15. 4.41,7	35,2	6,5	−2.17. 8,8	− 9,6	0,8	
	Mai. 2	11.21.35	30.21. 8,0	11. 0. 4,9	32. 5. 1,7	54,8	6,9	−1.17. 4,7	−59,3	− 5,4	195
	17	12 28.48	61.59.22,5	22.11.38,0	64.13.22,0	8,0	14,0	1.12.30,6	26,3	4,3	196
	18	12.33.47	64.13.14,2	22.43. 3,9	66.20.40,7	30,9	9,8	1 21. 8,0	3,8	4,2	
	19	12.38.41	66.26.13,1	23.11.53,0	68.26.21,6	5,2	16,4	1.29.12,3	7.8	4,5	
	Juin. 3	13.35.26	95.26.45,5	25.25. 8,5	94.55.25,7	13,9	11,8	2 3. 5,5	4.8	0.7	197
	6	13.41. 9	99.50.18,1	24.58.16,0	98.55. 4,0	55,0	9,0	1.48.49,3	53,0	− 3,7	198
	7	13.42.34	101.10.40,0	24.46.39,6	100. 8.39,8	30,7	9,1	1.42.33,0	36,0	− 3,0	
	11	13.45.37	105.53. 1,5	23.50. 1,3	104.30 12,4	4,0	8,4	1.10.12,3	11,1	1,2	199
	13	13.45.30	107.49.45,0	23.17. 6,2	106.20.15,6	9,9	5,7	0.49.50,0	50,4	− 0,4	
	Août. 10	11.10.50	126.13.22,5	20. 7.39,0	123.42.22,4	12,5	9,9	0 48.34,0	29.7	4.3	200
	12	11.18.53	130.12.46,2	19.29.15,0	127.30.12,2	58.9	13,3	1. 6.46,2	45,1	1,1	
	14	11.27.17	134.17.12,2	18.40.16,3	131.25.58,5	43,2	15.3	1.21.28,2	24.0	4.2	
	15	11.31.32	136.20.16,5	18.12. 6,8	133.25.52,8	42,1	10,7	1.27.29,1	27,0	2,1	201
	16	11.35.46	138.23 5,6	17.41.39,4	135.26.37,8	22,9	14,9	1.32.36,7	33,5	3,2	
	17	11.39.58	140.25.31,9	17. 9. 4,7	137.27.54,4	37.9	16,5	1.36.52,4	49,9	2,5	
	18	11.44. 8	142.27.14,1	16.34.28,7	139.29.24,3	8,0	16,3	1.40.16,8	13,8	3,0	

Observations de la seconde série.

39. Les ascensions droites ont été calculées comme au n° **34**, avec cette seule différence qu'ici c'est le centre de la planète qui a été observé. Je n'ai apporté à cet égard aucune réduction à l'observation.

Les positions du Soleil ont été déduites des Tables, rectifiées par leur comparaison aux observations.

Les déclinaisons ont été observées jusqu'en 1822 avec le quart de cercle de Bird, et depuis cette époque avec le cercle entier de Fortin. J'ai trouvé plus commode, pendant toute cette période d'observations, de déterminer la correction de collimation de l'instrument par les observations du Soleil. J'y ai apporté beaucoup de soin, et la parfaite concordance des résultats, que j'ai déduits de cette marche, m'a montré qu'elle donnait autant de précision que l'emploi des étoiles. L'exactitude du cercle de Fortin est connue. Mais le quart de cercle de Bird me paraît être aussi un excellent instrument, propre encore, avec les soins convenables, à donner de très-bons résultats.

Le tableau des observations de cette série, et de leur comparaison avec les éléments provisoires, est disposé comme celui des observations de la première série.

40. *Tableau de la seconde série d'observations, et de sa comparaison avec les éléments provisoires.*

ANNÉE	Mois et jour		Temps moyen.	Ascension droite observée.	Déclinaison observée.	Longitude apparente tabulaire.	Secondes de la longitude observée	Erreur de la longitude tabulaire.	Latitude apparente tabulaire.	Secondes de la latitude observée	Erreur de la latitude tabulaire.	N° d'ordre
			h m s	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″	° ′ ″	″	″	
1801	Mars.	8	13.12.24	3.50.48,0	2 50.18,5	4.39 23	26	— 3	1 4.21,0	25.8	— 4,8	1
	Juin.	18	13.12.49	104.29.24,7	24.47.30,3	103. 8.14	15	— 1	1 59 3,5	1,2	2,3	
		19	13.16.52	106.29.22,2	24.35.18,7	104.58. 2	59	3	1.58.31,8	29,7	2.1	2
		20	13.20.43	108.26.21,3	24.21. 9,4	106.45.32	27	5	1.57.17,8	10,3	7,5	
		28	13.44. 7	122.11.56,1	21.36 19,1	119.42. 8	8	0	1.23.52,5	0,1	— 7,6	
		29	13.46 6	123.40.32,2	21.10.41,7	121. 8 34	33	1	1.17. 1,0	54,9	6,1	3
		30	13.47.53	125. 6.26,1	20.44 40,1	122.32.39	35	4	1. 9.35,5	36,2	— 0,7	
	Juill.	1	13.49.27	126.29.10,8	20.17.55,2	123.54.17	12	5	1. 1.39,6	38,6	1,0	
		2	13.50.49	127.48.46,7	19.50 46,7	125.13.22	18	4	0.53.13,3	16,9	— 3,6	
		7	13.54.25	133.38.45,0	17.30.35,2	131.10. 3	51	12	0. 4 0,0	1,6	— 1,6	4
		8	13.54.29	134.38.51,6	17. 2.28,8	132 12.54	48	6	—0. 7. 7,3	— 3,5	— 3,8	
	Août.	18	10.58.11	130.51.48,4	15.51.21,7	129. 2.20	19	1	—2.14.23,4	—24,3	0,9	
		19	10.55.34	131.11.29,4	16. 4.39,2	129.17. 9	7	2	—1.56 37,5	—37,6	0,1	
		20	10.53.27	131.38.59,2	16.15.42,6	129 39.41	41	0	—1.38.57,6	— 0,1	2,5	5
		21	10.51.52	132.14.10,3	16 24.45,6	130 9.55	0	5	—1.21.19,0	—17,1	— 1.9	
		22	10.50.47	132.57. 5,7	16.31. 8,3	130.47.47	46	1	—1. 4. 3,7	— 3,0	— 0,7	
		23	10.50.12	133 47.21,4	16.34.55,4	131.33.11	5	6	—0.47.14,9	—13,9	— 1,0	
		25	10.50.26	135.49.15,4	16.33.58.6	133.25.35	30	5	—0.15.21,7	—21.3	— 0,4	
		26	10.51.13	137. 0. 9,0	16.29. 4,7	134.32. 4	59	5	—0. 0.28.8	—26.2	— 2,6	
		27	10.52.24	138.17. 7,6	16.21. 3,9	135.44.58	54	4	0.13.35,0	37,8	— 2,8	6
		28	10.53.58	139.39.42,9	16. 9.54,1	137. 3.52	53	— 1	0.26.46,2	47,9	— 1,7	
		29	10.55.51	141. 7.11,4	15.55.42,6	138.28.20	15	5	0.39. 0,9	5,1	— 4,2	
		30	10.58. 2	142.39. 9,4	″ ″ ″ ″	139.57.56	52	4	0.50.16,5	″ ″	″ ″	
	Sept.	1	11. 3. 9	145.54.31,6	14.54.31,8	143.10.23	17	6	1. 9.45,5	48.0	— 2,5	7
		5	11.15.19	152.54. 5,1	12.54.11,5	150.14.18	13	5	1.36.23,0	18.7	4,3	
		6	11.18.34	154.42. 7,8	12 18.24,7	152. 5.37	32	5	1.40.34,1	35.1	— 1,0	8
1802	Juin.	11	13.37.35	103.33.39,0	24.47.20,8	102.17.58	51	7	1.53.57,0	59,0	— 2,0	
		12	13.39.56	105. 8.10,5	24 34. 9,2	103.44.42	40	2	1.49.19,2	20,0	— 0,8	11
		14	13.43.56	108. 6.40,2	24. 4. 6,1	106.29.48	46	2	1.37.57,8	1,0	— 3,2	
		15	13.45.35	109.30.32,4	23.47.23,1	107.48. 5	59	6	1.31.16,2	17,3	— 1,1	12
		16	13.47. 0	110.50.56,7	23.29.44,3	109 3.26	22	4	1.23.54.4	55,7	— 1,3	
		19	13.49.46	114.29 57,3	22.32.14,2	112.31.34	26	8	0 58. 0,3	3.7	— 3.4	
		20	13.50.11	115.35.29,1	22.11.51,4	113.34.42	36	6	0.48. 8,4	11,2	— 2.8	
		21	13.50.21	116 37. 2,2	21.51. 4,2	114.34.31	26	5	0.37.40,2	43.1	— 2.9	13
		22	13.50.15	117.34.47,4	21.29.58,9	115.31. 4	2	2	0.26 41,1	43 2	— 2.1	
		27	13.45.43	121.22. 7,2	1,.43 26,9	119.20.41	33	8	—0.36. 8,1	— 3,6	— 4.5	14
		29	13.41.54	122.23.11,4	19. 2 15,8	120.25.33	32	1	—1. 4.18,0	—12,5	— 5,5	
	Août.	4	10.48.20	114.21.24,7	19.15.23,9	112.55.51	9	— 8	—2 17.27,7	—24,2	— 3,5	
		5	10.47.15	115. 4.21,6	19 25. 1,2	113.34 17	22	— 5	—2. 1.12,4	—10,2	— 2,2	
		7	10.46.28	116.50.54,0	19.40.16,9	115.10.33	37	— 4	—1.28.46,0	—38.1	— 7.9	16
		9	10.47.27	119. 3.48,6	19.48.48.3	117 11.57	57	0	—0 57. 4.3	—59.8	— 4,5	
		14	10.56.42	126.18.37.9	19.31.35,8	123.55.32	30	2	0.14.16,1	17.6	— 1.5	
		15	10.59.31	128. 0. 7,5	19 20.33,7	125.31 12	4	8	0.26.34,3	36,2	— 1.9	17
		16	11. 2 36	129.45.39,9	19 6.40,4	127.11. 4	1	3	0.38. 4,5	3.9	0.6	
		18	11. 9.22	133.25.54,4	18.30.44,1	130.41.43	37	6	0.58 30,2	31.2	— 1.0	

Suite du Tableau de la seconde série d'observations.

ANNÉE	Mois et jour.	Temps moyen.	Ascension droite observée.	Declinaison observée.	Longitude apparente tabulaire	Secondes de la longitude observée.	Erreur de la longitude tabulaire.	Latitude apparente tabulaire.	Secondes de la latitude observée.	Erreur de la latitude tabulaire.	N° d'ordre.
		h m s	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″	° ′ ″	″	″	
1802	Août. 20	11.16.46	137.15.24,0	17.43.52,7	134.24. 7	5	2	1.15.17,6	21,9	— 4,3	18
	21	11.20.35	139.12. 3,4	17.16.33,9	136.18.38	28	10	1.22.17,9	20,2	— 2,3	
	22	11.24.29	141. 9.44,5	16.46.49,8	138.14 48	44	4	1.28.21,9	27,3	— 5,4	
	23	11.28.23	43. 7.31,9	16.14.46,2	140.12 12	4	8	1 33.30,5	32,5	— 2,0	
	Sept. 17	12.41.34	186. 6.50,5	— 2.13.37,3	186.29.39	39	0	0.23. 3,9	9,6	— 5,7	19
	18	12.43.27	187.34. 7,5	— 2.58.46,1	188. 7 35	35	0	0.16. 6,1	10,1	— 4,0	
	19	12.45.15	189 0.33,7	— 3 43.27,0	189.44.30	30	0	0. 9. 1,3	6,1	— 4,8	
	20	12.47. 1	190.26.15,4	— 4 27.42,7	191.20.28	29	— 1	0. 1 51,7	56,6	— 4,9	
	24	12.53.36	196. 1.46,5	— 7 19 47,3	197.34.43	48	— 5	—0.27.22,7	—22,6	— 0,1	20
	25	12.55. 8	197.23.57,0	— 8. 1.25,3	199. 5.58	3	— 5	—0.34.46,2	—47,9	1,7	
	26	12.56.38	198.45.35,4	— 8.42.22,3	200.36.14	14	0	—0.42.10,1	— 7,5	— 2,6	
	Sept. 30	13. 2.14	204. 6.27,7	—11.20. 5,9	206.28. 7	11	— 4	—1.11.31,1	—31,4	0,3	21
	Oct.. 1	13. 3.32	205.25.12,4	—11.57.47,0	207.53 43	45	— 2	—1.18.44,2	—46,1	1,9	
	3	13. 6. 2	208. 1. 0,0	—13.10.52,3	210.41.54	54	0	—1.32.56,0	—58,3	2,3	
	16	13.16.46	223.31.13,5	—19.34.29,5	226.50.23	23	0	—2.48.27,7	—21,5	— 6,2	22
	17	13.16.56	224.32.55,5	—19.55.51,2	227.52.10	13	— 3	—2.52.12,2	—10,6	— 1,6	
	22	13.14.58	228.59. 4,8	—21.17.53,4	232.14 37	36	1	—3. 2.59,5	— 3,8	4,3	23
1803	Août. 2	11. 6.24	116.40.40,3	21.39. 7,9	114.39 57	53	4	0.26.34,1	36,1	— 2,0	24
	3	11.10.26	118.40.32,4	21.29 17,7	116.31.18	15	3	0.37.30,3	33,2	— 2,9	
	Sept. 7	13. 4.40	181.48.36,7	— 0.46. 6,9	181.57.56	59	— 3	0. 0.55,4	56,3	— 0,9	25
1804	Juill. 14	10.53.20	95.25.17,1	22.49.10,6	94 59 48	46	2	—0 33. 7,4	— 8,4	1,0	26
	17	11. 5.13	101.21.39,2	23. 7.22,9	100.26 19	15	4	0. 4. 5,6	5,5	0,1	
	18	11. 9.38	103.27. 6,9	23. 9. 5,7	102.21. 9	3	6	0.15.41,6	40,2	1,4	
	Août. 26	13.23.47	175.31.12,0	1.38.39,2	175.14. 9	10	— 1	—0.16.26,1	—24,4	— 1,7	27
	Sept. 6	13.31.16	188.14.27,6	— 5.34.22,3	189.45.54	56	— 2	—1.51. 1,1	— 5,3	4,2	28
	9	13.31. 9	191.10. 9,7	— 7.16.33,5	193. 6.48	46	2	—2 16.23,7	—22,6	— 1,1	
	13	13.29 8	194.36.22,9	— 9.17.10,1	197. 1.51	53	— 2	—2.48.13,8	—14,0	0,2	29
	14	13.28.14	195.21.55,5	— 9.43 57,5	197.53.40	43	— 3	—2.55 38,3	—39,3	1,0	
1805	Avril. 9	12.37. 3	26.33.41,0	11.28.47,0	28.45.58	58	0	0.27.42,7	44,3	— 1,6	31
	10	12.40.36	28.26.19,8	12.22.23,9	30.48 1	1	0	0.38.57,9	57,9	0,0	
	12	12 47.31	32. 8.32,3	14. 5.23,4	34.46.42	34	8	1. 1.16,3	18,6	— 2,3	
	13	12.50.51	33.57 51,6	14.54.19,1	36.42.45	41	4	1.12. 9,6	10,9	— 1,3	
	Août 2	13.20. 7	150.42 39,0	13.10.33,6	148. 8.32	32	0	1. 6 40,5	45,8	— 5,3	32
	3	13.22.24	152.16. 6,6	12.29.45,1	149.48.11	12	— 1	1. 0.18,0	25,4	— 7,4	
	11	13.35.46	163.30. 6,3	7. 0.22,1	162 6.47	50	— 3	—0. 1 16,9	—12,0	— 4,9	33
	25	13.39.30	178.14.19,7	— 1.39.55,5	179. 2.54	52	2	—2.13 41 7	—44,2	2,5	34
	26	13.38.43	179. 1.38,8	— 2.10.52,6	179.58.41	37	4	—2.23.19,4	—17,0	— 2,4	
	Oct 13	10.51.18	184.22.10,2	0.17. 6,0	183.53.46	46	0	1.59.55,0	59,8	— 4,8	35
	19	11. 3.12	193.15.54,7	— 3.41.10,6	193.38.17	13	4	1.50.41,2	43,6	— 2,4	36
	23	11.12. 0	199 24.56,7	— 6.31.38,3	200.23.15	11	4	1.33.33,9	37,9	— 4,0	
1806	Avril. 8	13.11.51	34. 3.45,6	16.25. 9,5	37.18. 6	5	1	2.36. 0,2	0,2	0,0	37
	9	13.11.49	35. 2.31,2	16.51.45,3	38.20. 5	3	2	2.42.37,9	38,6	— 0,7	
	Juin. 18	11. 7.22	72.50.12,3	22. 4.17,1	74. 7.50	43	7	—0.27. 5,8	— 4,4	— 1,4	38

Suite du Tableau de la seconde série d'observations.

ANNÉE	Mois et jour.	Temps moyen.	Ascension droite observée.	Déclinaison observée.	Longitude apparente tabulaire.	Secondes de la longitude observée.	Erreur de la longitude tabulaire.	Latitude apparente tabulaire.	Secondes de la latitude observée.	Erreur de la latitude tabulaire.	N° d'ordre
		h m s	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″	° ′ ″	″	″	
1806	Juill. 18	13.28.12	137.42.44,1	17.42.54,5	134 49 17	16	1	1.22 12,3	13,1	— 0,8	39
	Sept. 21	10.49.13	161.55.23,4	8.48.49,7	159 58.50	49	1	1. 3.25,5	28.5	— 3,0	40
	Nov. 7	12.31.16	233.50. 0,0	—20.46. 4,3	236.29 47	54	— 7	—1.25. 1,3	—56,0	— 5,3	41
	8	12.33.33	235.23.23,4	—21.12.34,7	238. 0.46	53	— 7	—1 30.41,1	—37,0	— 4,1	
1807	Mars. 22	13.12.16	17.10.26,6	9.41 48,9	19.31.53	49	4	2.12.47,7	47,8	— 0,1	42
	24	13.11.17	18 53.46,5	10.46.13,1	21.30 22	26	— 4	2.33.49,5	52,0	— 2,5	
	26	13. 8.39	20.12.33,7	11.36.45,1	″ ″ ″	″	″	2.51.40,2	40,3	— 0,1	
	Mai. 21	10.29.43	35.33.41,7	11.19.51,8	37. 0.42	43	— 1	—2.41. 1,7	— 0,2	— 1,5	
	22	10.31.36	37. 1.10,0	11.55.27,4	38.33.22	23	— 1	—2.34.48,8	—49,3	0,5	43
	23	10.33.39	38.31. 8,5	12.31.42,2	40. 8.24	21	3	—2.28. 5,0	— 7,5	2,5	
	24	10.35.53	40. 3.49,8	13. 8.36,5	41.45.46	47	— 1	—2 20.51,0	—53,1	2,1	
	26	10.40.52	43.17. 8,2	14.23 47,2	45. 7.37	33	4	—2. 4.59.3	—59.3	0,0	
	Juin. 24	12.58.28	106.21.43,5	24.31.54,3	104.51.36	28	8	1 54.42,7	33,7	9,0	44
	29	13.19.21	116.31.38,7	23. 7. 0,2	114.16. 3	59	4	1.51.53,1	45 8	7,3	45
	30	13.22.57	118.24.48,8	22.45. 0,0	116. 2.37	32	5	1.49.18,6	17,3	1,3	
	Juill. 9	13.46.23	133. 9.34,0	18.36.44,2	130.25. 6	4	2	1. 0.13,5	14,8	— 1,3	46
	10	13.48. 1	134.33.15,0	18. 5.36,8	131.50. 3	0	3	0.52.14,3	14,8	— 0,5	
	11	13.49 27	135.54 7,2	17.34. 7,3	133 12.44	45	— 2	0.43 48,7	48.1	0,6	
	12	13.50.42	137.11.59,1	17. 2.24,1	134.33. 6	6	0	0.34.58,2	55,5	2,7	
	13	13.51.45	138.26.58,2	16 30.30,5	135.51. 9	6	3	0.25.42,7	38,2	4,5	
	17	13.54. 3	142 58 5,4	14.23.11,9	140.38.57	56	— 1	—0.14.58,3	—58,3	0,0	47
	19	13.54. 1	144.55.44,5	13.20.48,3	142.47. 9	9	0	—0.37.15,6	—16,7	1,1	
	22	13.52.23	147.28.47,7	11.50 54,0	145.37 55	53	2	—1.12.40,8	—41,3	0,5	
1808	Févr. 21	12.56.29	344 23.30,5	— 7.39.25,9	342.40.45	49	— 4	—0 55 8,9	—12,2	3,3	48
	22	12.59. 8	346. 2.35,1	— 6.48. 6,0	344.31.14	19	— 5	—0 45 37,0	—40,3	3,3	
	25	13. 6.23	350.49 4,6	— 4.12.12,6	349.54.39	41	— 2	—0.13.15,9	—19.4	3,5	
	Mars. 6	13.15. 5	2 51.20,1	3.25.19,0	3.58.50	51	— 1	2. 0.13,5	11,0	2,5	49
	7	13.13.55	3.32.53,5	3.57.39,8	4.49 43	48	— 5	2.13 26,5	22,0	4,5	
	8	13.12.16	4. 7.12,0	4.26.23,2	5.32.35	40	— 5	2.26.12,2	6.8	5,4	
	9	13.10. 8	4 34.19,8	4.51.11,4	6. 7.13	22	— 9	2.38. 9,9	7,8	2.1	
	Mai. 2	10.30.29	17.46.21,6	4.31.39,5	18. 6.54	55	— 1	– 2.47.30,0	—37,3	7,3	50
	3	10.32. 3	19. 9.12,4	5. 8.12,3	19.37.10	15	— 5	—2.44.49.9	—59,7	9,8	
	14	10.58.17	36.34.15,0	12.43.21,3	38.23.46	44	2	—1.40.52,9	— 0,1	7.2	51
	15	11. 1.35	38.22.54,4	13.27.49,8	40.18.16	15	1	—1.32.14,2	—15,9	1,7	
	16	11. 5. 2	40.13.59,5	14.12.18,3	42.14 43	36	7	—1.23.11 8	—11.4	— 0,4	
	17	11. 8.41	42. 7.57,9	14.56.46,0	44.13.10	11	— 1	—1.13.48,4	—49.9	1,5	
	Juill. 8	13.46.23	132.55.13,3	16.10.39 5	130.51.39	35	4	—1.24. 1,8	— 1,0	— 0,8	52
	10	13.41.55	133.46.18,4	15.27.26,8	131.50.44	42	2	—1.52. 9.4	— 8.3	— 1,1	
	13	13.33. 0	134.29.43,7	14.30.37,9	132.46.45	48	— 3	—2.35. 5,2	— 5,2	0,0	
	Sept. 26	12.34.28	193.44.43,5	— 5.41.49,8	194.51.25	26	— 1	0.10.28,5	33,9	— 5,4	54
	Oct. 6	12.51.35	207.53.24,0	—12.33.21,7	210.21.41	45	— 4	—1. 0.40 0	—37.0	— 3,0	55
1809	Mai. 26	13. 4 24	79.46 20,2	25. 9.58,0	80.44.51	46	5	2. 1.58,8	56,0	2,8	56
	Juin. 2	13.29.36	92.59.25,5	25.33.57,3	92.42. 1	57	4	2. 7 57.4	56.2	1,2	57

Suite du Tableau de la seconde série d'observations.

ANNÉE	Mois et jour.	Temps moyen.	Ascension droite observée.	Déclinaison observée.	Longitude apparente tabulaire.	Secondes de la longitude observée.	Erreur de la longitude tabulaire.	Latitude apparente tabulaire.	Secondes de la latitude observée.	Erreur de la latitude tabulaire.	N° d'ordre.
		h m s	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″	° ′ ″	″	″	
1810	Mai. 10	12.58.16	62.13.34,4	22.56.27,5	64.34.26	22	4	1.54. 2,3	0,0	2,3	58
	20	13.28.25	79.38.21,3	25.26.49,1	80.38.50	46	4	2.19.21,4	18,2	3,2	59
	30	13.33 40	90.48.43,6	24.46.36,7	90.38.12	15	— 3	″ ″ ″	″	″	60
	Août. 22	12.51.58	163. 9.18,3	8.25.37,1	161.15.17	15	2	1. 9.47,8	49,0	— 1,2	61
	23	12.54.24	164.44.57,2	7.40.15,4	163. 0. 4	8	— 4	1. 4. 3,5	9,1	— 5,6	
	24	12.56.43	166.18.50,3	6.54.47,3	164.43.31	36	— 5	0.58. 1,6	6,1	— 4,5	
	26	13. 1. 0	169.21.37,2	5.23.58,5	168. 6.23	22	1	0.45.10,4	10,3	0,1	
1811	Janv. 11	13.24.43	311.19.35,8	—19.16.34,4	308 34 3	9	— 6	—1.10.49,7	—52,6	2,9	62
	12	13.25.56	312.36.56,8	—18.34.50,2	309.52.48	41	— 1	″ ″ ″	″	″	
	Mars. 18	10.57.58	339.35.25,9	—11. 1.23,5	337. 1. 1	10	— 9	—2.14 34,0	—31,5	— 2,5	63
	23	11. 9. 7	347.18.42,8	— 7.56.15,1	345.14.25	31	— 6	—2.17.48,2	—46,7	— 1,5	64
	26	11.16.25	352. 6. 2,2	— 5.50.45,7	350.26.17	21	— 4	—2.14. 7,3	— 6,8	— 0,5	
	27	11.18.58	353.43.30,0	— 5. 6.36.3	352.12.55	0	— 5	—2.11.55,4	—54,8	— 0,6	65
	28	11.21.34	355.21.42,6	— 4.21.20,6	354. 0.56	52	4	—2. 9 13,5	—11,0	— 2,5	
	Sept. 3	13.35. 0	185.31.46,6	— 4.48.11,7	186.58.42	45	— 3	—2.12.43,1	—40,2	— 2,9	66
	5	13.33.56	187.13.50,3	— 5.51. 9,5	188.57. 9	6	3	—2.30.16,0	—15,0	— 1,0	
	6	13.33.10	188. 1.28,3	— 6.20.46,8	189.52.21	22	— 1	—2.38.49,1	—45,0	— 4,1	
	7	13.32.13	188.46.26,4	— 6.49. 6,6	190.44.38	39	— 1	—2.47.10,9	— 8,4	— 2,5	
	8	13.31. 6	189.28.37,6	— 7.15.56,5	191.33.49	46	3	—2.55.20,0	—21,5	1,5	67
	10	13.28.16	190.44.18,0	— 8. 4.38,7	193. 1.53	59	— 6	—3.10.46,1	—43,3	— 2,8	
	11	13.26.30	191.17. 4,6	— 8.26.15,6	193.40.18	21	— 3	—3.17.59,0	—54,7	— 4,3	
1812	Juill. 25	13.20.35	143.14. 5,0	15.58.53,4	140.23. 6	5	1	1.20.40,0	43,5	— 3,5	68
	Août. 1	13.35.32	153.52.54,0	11.24.47,3	151.39.52	48	4	0.33.23,0	25,2	— 2,2	69
	23	13.35 57	175 40.15,8	— 1.22.38,1	176.34.37	31	6	—2.59. 9,3	— 7,6	— 1,7	70
	25	13.31.43	176.34.45,3	— 2. 6.37,7	177.42.11	6	5	—3.17.55,8	—51,5	— 4,3	
1813	Juill. 7	13.16.54	124.19.43,0	21.32.18,7	121 39 24	20	4	1.46.26,2	24,4	1,8	71
	29	13.51.35	154.42.28,0	9.20.16,1	153.10. 1	59	2	—1. 5.21,9	—20,2	— 1,7	72
	30	13.51. 7	155.34.37,8	8.48. 7,9	154. 9.41	.38	3	—1.16.40,8	—41 2	0,4	
	31	13.50.28	156.23.56,3	8.16.47,9	155. 6.28	28	0	—1.28. 8,9	— 7,9	— 1,0	
	Août. 3	13.47.17	158 33.23,7	6.48.24,2	157.38.25	24	1	—2. 3. 9,4	— 6,7	— 2,7	73
	Sept. 20	11. 0.12	163.59. 2,7	8.37.34,1	161.56.10	10	0	1 39.36,9	38,4	— 1,5	74
1817	Mai. 7	13.10 28	62.37.20,7	23.20.34,6	65. 0 25	20	5	2.13.32,8	31,2	1,6	75
1818	Sept. 4	13.28.35	185.12.13,1	— 5.52.38,4	187. 6.23	29	— 6	—3.19 27,5	—31,0	3,5	76
1819	Avril. 6	13. 7.23	30.49 13,2	14 36.27,7	33.44.53	50	3	1.56.42,0	38,8	3,2	77
	8	13.10.13	33.30. 0,1	15.52. 3,8	36.36.28	28	0	2.15.32,5	29,8	2,7	
	9	13.11.12	34.43.53,1	16.25.50,3	37.54.40	41	— 1	2 23.56,4	57,8	— 1,4	
	10	13.11.52	35.53.14,3	16.56.42,1	39. 7.30	36	— 6	2.31.33,8	32,6	1,2	
1820	Mars. 20	13. 9.34	15.21.36,0	8.12.56,3	17.18.25	25	0	1.31.37,9	45,8	— 7,9	78
	Mai. 23	10.29.47	38.23 10,6	12.17.52,5	39.56.39	38	1	—2.38.53,2	—53,8	0,6	79
	Juin. 28	13. 8.56	113.45.50,8	23.36.10,5	111.41. 8	58	10	1.54.32,8	39,1	— 6,3	80
	29	13 12.59	115.46. 3,8	23.16.13,4	113.33.14	6	8	1.53 24,2	23,3	0,9	
	Juill. 11	13.46.30	135.59 40,2	17.43.27,4	133.15.12	9	3	0.54.10,8	10,9	— 0,1	81
	16	13.52.23	142.23.55,2	14.59 49,0	139.55 56	59	— 3	0. 9 15,8	13,7	2,1	

Suite du Tableau de la seconde série d'observations.

ANNÉE	Mois et jour.	Temps moyen.	Ascension droite observée.	Déclinaison observée.	Longitude apparente tabulaire.	Secondes de la longitude observee.	Erreur de la longitude tabulaire.	Latitude apparente tabulaire.	Secondes de la latitude observee.	Erreur de la latitude tabulaire.	N° d'ordre
		h m s	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″	° ′ ″	″	″	
1821	Juin. 19	13.31.11	110.14.11,0	24. 3.51,8	108.25 31	17	14	1 53 10,4	9,4	1,0	82
	Août 21	10.50.11	131.58.14,2	17.30.41,3	129.37.31	32	— 1	—0 21 43,2	—41,9	— 1,3	83
	22	10.51.12	133.12.36,6	17.26.17,8	130.47. 3	2	1	—0 6 49,8	—48,7	— 1,1	
	23	10.52.36	134.32.55,5	17.19. 4,6	132. 2.41	42	— 1	0. 7.18,9	24,3	— 5.4	
	Déc. 10	10.27. 0	235.34 0,9	—17.31. 4,8	237.20.40	39	1	″ ″ ″	″	″	84
1822	Févr. 15	13.18.13	344.31.36,0	— 6.26.40,9	343.16.11	9	2	0. 8.59,5	55,4	4,1	85
	22	13.16.59	351. 6.53,4	— 1.49. 7,4	351. 7.17	20	— 3	1.51.15,3	15,3	0,0	86
	Juin. 1	13.18.22	89 2.38,3	25.36 13,3	89. 8.20	14	6	2. 8.35,5	32,8	2,7	87
	6	13.34. 9	97.55.44,9	25.18. 3,8	97.10.19	8	11	2. 2 5,9	3,3	2,6	88
	7	13.36.39	99.32.30,3	25. 9. 9,6	98.38.11	6	5	1.58.30,5	27,6	2,9	
	9	13.40.57	102.35.18,9	24.47. 4,4	101.25.12	6	6	1.49. 7,6	7,0	0,6	
	13	13.46.37	107.57. 8,7	23.48.38,9	106.23.12	2	10	1 21.46,4	47,2	— 0,8	89
	18	13.47.56	113.12.37,8	22.17 54,9	111.23.11	11	0	0.52 32,3	34.7	— 2,4	
1823	Avril. 10	10.57.26	2.13.11,5	— 1.37.58,2	1.23.12	10	2	—2.22.54,8	—53,8	— 1,0	90
	11	10.59.44	3.46.59,0	— 0.54.36,6	3. 6.31	32	— 1	--2.20 24,1	—25,7	1,6	
	Mai. 24	13.32. 6	84.21.48,2	25.35.12,3	84.54 59	50	9	2.13.20,4	22,5	— 2,1	91
	29	13.37. 1	90.31.23,7	25.14.34,8	90.28.25	24	1	1.46.53,0	49.5	3,5	
	Août. 24	12.48.32	164. 7.12,9	8. 3.34,4	162.16.42	39	3	1.11.16,2	18,6	— 2,4	92
	25	12.50.59	165.43. 8,5	7.17.52,4	164. 2. 5	1	4	1. 5.38,4	40,5	— 2,1	
	26	12.53.19	167.17.21,7	6.32. 5,2	165.46. 6	59	7	0.59.42,2	40,7	1,5	93
	29	12.59 43	171.51. 8,1	4.15.14,2	170.50.24	23	1	0.40 23,3	27,6	— 4,3	
	Sept. 2	13. 6.56	177.36.20,4	1.15.11,1	177.18.22	17	5	0.11.44,8	47,6	— 2,8	94
	4	13.10. 4	180.21.33,6	— 0.13. 9,2	180.25. 0	1	— 1	—0. 3.28,4	—28,9	0,5	
	5	13.11.30	181.42.24,3	— 0.56.41,4	181.56.30	30	0	—0.11.15,5	—14,3	— 1,2	
	8	13.15.23	185.38.13,5	— 3. 4.42,4	186.23.41	38	3	—0.35. 5,8	—10,7	4,9	95
	9	13.16.32	186.54.42,0	— 3.46.22,1	187.50 15	14	1	—0.43. 9,1	— 8,5	— 0,6	
	10	13 17.37	188.10. 6,3	— 4.27.29,8	″ ″	″	″	—0.51 15,1	—14,4	— 0.7	
	11	13.18.38	189.24.28,4	— 5. 8. 3,6	190.39.39	41	— 2	—0.59 21,7	—22,0	0,3	
1824	Avril. 20	12.33. 5	36.48.27,7	15.19.26,8	39.26.35	39	— 4	0.42.38,8	30,3	8,5	96
	21	12.37. 4	38.47.14,0	16. 8.41,5	41.30.45	40	5	0.53.23,4	16,8	6,6	
	29	13. 5.41	53.50.49,4	21.27.49,0	56.40.41	28	13	2. 5.24,2	23,3	0,9	97
	30	13. 8.36	55.33 40,2	21.56.53,5	58.20.12	13	— 1	1 44.35,6	41,0	— 5,4	
	Juill. 12	11. 0.51	95.29.30,1	23. 8.41,8	95. 3. 2	55	7	—0.13.13,7	—16,3	2,6	98
	17	11.24. 7	106.15. 9,3	23.19.57,4	104.53.42	33	9	0 42.29,7	26,6	3,1	99
	20	11.39.33	113. 4 38,1	22.55.38,2	111.10. 9	59	10	1. 8.48,9	46,6	2,3	
	Août. 7	12 57. 5	150.15.12,0	13.43.11,6	147.32.11	10	1	1.28.12,5	12,6	— 0,1	100
	11	13. 7.51	156.53.43,2	10.52.31,8	154.36.53	52	1	1. 7.34,1	32.4	1,7	
	26	13.31. 8	177.31.25,6	0.12.27,2	177.38.42	44	— 2	—0 47.40,4	—43,6	3,2	101
	27	13.31.52	178.41.23,0	— 0.27.33,7	178.58.50	51	— 1	—0.56.31,1	—34,8	3,7	
1825	Avril. 3	12 32. 7	19.34. 3,0	8.16.46,9	21 11. 7	2	5	0. 0.35,0	30,3	4,7	102
	4	12.35.37	21.25.38,4	9.12.58,9	23.14.20	19	1	0.11.41,4	31,2	10,2	
	5	12.39. 4	23.16.41,8	10. 8.29,4	25.16.33	32	1	0.22.58,0	48,9	9,1	

Suite du Tableau de la seconde série d'observations.

ANNÉE	Mois et jour.	Temps moyen.	Ascension droite observée.	Déclinaison observée.	Longitude apparente tabulaire.	Secondes de la longitude observée.	Erreur de la longitude observée.	Latitude apparente tabulaire.	Secondes de la latitude tabulaire.	Erreur de la latitude tabulaire.	N° d'ordre.
		h m s	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″	° ′ ″	″	″	
1825	Avril. 7	12.45.49	26.56.31,0	11.56.17,2	29.16.44	39	5	0.45 44,4	35,9	8,5	103
	8	12.49. 4	28.44.44,1	12.48.12,9	31.13.55	53	2	0.57. 4,9	59,1	5,8	
	9	12 52.14	30.31.21,9	13.38.26,3	33. 8.44	40	4	1. 8.16,5	10,6	5,9	
	Août. 23	13.39.16	176.21.37,8	— 1.12.33,4	177. 8.31	30	1	—2.33.24,9	—27,8	2,9	104
	24	13.37.56	177. 0.47,3	— 1.40.11,0	177.55.27	28	— 1	—2 43 14,7	—14,2	— 0,5	
1826	Juill. 1	12.39. 6	108.48. 6,6	24. 7.54,0	107 6.51	50	1	1.46.58,1	56,1	2,0	105
	2	12.44. 6	111. 2.25,5	23.53.28,2	109.10.30	24	6	1.49.22,2	17,7	4,5	
	3	12.48.57	113.14.19,8	23.36.53,8	111.12 29	19	10	1.51. 2,0	1,7	0,3	
	4	12.53.37	115.23.45,1	23.18. 5,6	″ ″	″	″	1.51.56,4	57,3	— 0,9	
	18	12.39.19	140 39. 9,2	16.27. 0,6	137.53. 3	59	4	1. 0.45,7	49,1	— 3,4	106
	26	13.49.50	151.10.26,7	11.40.15,3	149 5.22	25	— 3	—0. 8.18,5	—18,2	— 0,3	107
	29	13.51. 2	154.25.47,8	9.54.43,8	152.42 10	14	— 4	—0.39. 4,0	— 2,9	— 1,1	
	Août. 2	13.50.11	158. 9.40,5	7.40.56,9	156.56 58	3	— 5	—1.22.54,0	—58,9	4,9	108
	Sept. 17	10.50.15	158.23.32,3	10. 6.25,9	156.15.57	58	— 1	0.57.16,8	14,9	1,9	109
	22	10 57.45	165.12.10,0	8. 6.30,2	163.14 59	55	4	1.38 43,4	45,8	— 2,4	110
	23	10.59.55	166.43.49,4	7.33.37,8	164.51.30	25	5	1.43.33,3	31,7	1,6	
1827	Avril. 30	10.22. 2	13. 5.19,2	2.38. 9,7	13. 4. 1	1	0	—2 44.37,4	—38,0	0,6	111
	Juin. 1	11.18.26	58.46.11,7	19 51.24,3	60.48.59	46	13	—0.29.23,4	—30,7	7,3	112
	Juill. 7	13.50.15	132.18 39,8	18 38.12,0	129.38.13	13	0	0.48 44,8	47,1	— 2,3	113
	18	13.52.15	143.39.13,6	13.11.51,4	141.39.40	34	6	—1. 9.45,1	—41,5	— 3,6	114
	Oct.. 17	12 40.59	215 28.58,6	—15.13.27,3	218.12. 4	6	— 2	—1. 1.40,6	—36,0	— 4,6	115
1828	Oct.. 19	13.14 55	226.42.19,0	—20.19 38,6	229 55.42	39	3	—2.41 33,2	—31,2	— 2,0	116
	21	13.15.54	228 55.28,0	—21. 1.51,1	232. 7. 8	8	0	—2.48.48,1	—51,0	2,9	
	22	13.16.11	229.58.49,4	—21.20.44,0	233. 9 12	9	3	—2.51 45,5	—46.8	1,3	

§ VIII.

Équations de condition, déduites des erreurs géocentriques des Tables provisoires.

41. Désignons par L la longitude géocentrique, comptée de l'équinoxe moyen; par v_1 la longitude héliocentrique réduite à l'écliptique. La variation de L, correspondante à de petites variations dv_1 et ∂r_1 des coordonnées héliocentriques dans l'écliptique, sera donnée par la formule

$$\partial \mathrm{L} = \frac{r_1}{\Delta_1} \cos (v_1 - \mathrm{L})\, \partial v_1 + \frac{\sin (v_1 - \mathrm{L})}{\Delta_1}\, \partial r_1,$$

Δ_1 étant la distance accourcie à la Terre.

L'expression de r_1 étant égale à $r \cos \lambda$, on obtiendra, en ayant égard à la variation de la latitude,

$$\partial r_1 = \partial r - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \lambda\, \partial r - r \sin \lambda\, \partial \lambda.$$

Or on reconnaît, à la grandeur des erreurs en longitude et en latitude, que les deux derniers termes de cette formule ne peuvent influer sur la valeur de ∂L. En sorte qu'on peut réduire ∂r_1 à ∂r.

On conclut v de v_1 par la formule suivante :

$$v_1 = v - \mathrm{tang}^2 \tfrac{1}{2} \varphi \sin 2 (v - \theta),$$

d'où l'on déduit

$$\partial v_1 = \partial v - 2 \,\mathrm{tang}^2 \tfrac{1}{2} \varphi \cos 2 (v - \theta)\, \partial v - \mathrm{tang}^2 \tfrac{1}{2} \varphi \sin 2 (v - \theta)\, \partial \varphi$$
$$+ 2 \,\mathrm{tang}^2 \tfrac{1}{2} \varphi \cos 2 (v - \theta)\, \partial \theta.$$

L'influence des trois derniers termes sur ∂L est insensible, et l'on peut réduire ainsi ∂v_1 à ∂v. En posant donc, pour abréger,

$$\frac{r_1}{\Delta_1} \cos (v_1 - \mathrm{L}) = \alpha,$$

$$\frac{\sin (v_1 - \mathrm{L})}{\Delta_1} = \beta,$$

on aura simplement

$$\partial L = \alpha \partial v + \beta \partial r.$$

42. Le demi-grand axe est assez bien connu, par l'approximation qu'on possède du moyen mouvement, pour qu'il soit inutile de le faire varier dans l'expression de ∂r.

Soient, en désignant l'anomalie moyenne par z,

$$M = -a\left\{\left(e - \frac{3}{8}e^3\right)\sin z + \left(e^2 - \frac{2}{3}e^4\right)\sin 2z + \frac{9}{8}e^3 \sin 3z + \frac{4}{3}e^4 \sin 4z\right\},$$

$$N = a\left\{e - \left(1 - \frac{9}{8}e^2\right)\cos z - \left(e - \frac{4}{3}e^3\right)\cos 2z - \frac{9}{8}e^2 \cos 3z - \frac{4}{3}e^3 \cos 4z\right\};$$

on aura pour la variation du rayon, en fonction des corrections ∂n, $\partial \varepsilon$, ∂e et $\partial \varpi$, du moyen mouvement annuel, de la longitude de l'époque, de l'excentricité, et de la longitude du périhélie,

$$\partial r = -Mt.\partial n - M\partial \varepsilon + M\partial \varpi + N\partial e;$$

t est le temps, compté en années juliennes, à partir du 1^{er} janvier 1800 : ∂e s'obtiendra en secondes de degré, comme ∂n, $\partial \varepsilon$ et $\partial \varpi$.

Posons de même,

$$P = -\left(2e - \frac{1}{4}e^3\right)\cos z - \left(\frac{5}{2}e^2 - \frac{11}{12}e^4\right)\cos 2z - \frac{13}{4}e^3 \cos 3z - \frac{103}{24}e^4 \cos 4z,$$

$$Q = -\left(2 - \frac{3}{4}e^2\right)\sin z - \left(\frac{5}{2}e - \frac{11}{6}e^3\right)\sin 2z - \frac{13}{4}e^2 \sin 3z - \frac{103}{24}e^3 \sin 4z,$$

et nous obtiendrons l'expression suivante de la correction de la longitude héliocentrique v,

$$\partial v = (1 - P)t.\partial n + (1 - P)\partial \varepsilon + P\partial \varpi - Q\partial e.$$

43. Substituant les valeurs de ∂r et de ∂v dans l'expression de ∂L, et écrivant

$$P\alpha + M\beta = H,$$
$$-Q\alpha + N\beta = K,$$

nous aurons l'équation

$$\partial L = (\alpha - H)t.\partial n + (\alpha - H)\partial \varepsilon + K\partial e + H\partial \varpi.$$

Par la variation des éléments, la longitude tabulaire doit devenir égale à la longitude observée L′. On a donc la relation

$$L + \delta L - L' = 0,$$

qui, en y mettant pour δL sa valeur, fournit l'équation de condition suivante, entre l'erreur L — L′ des Tables en longitude, et les corrections des éléments elliptiques,

$$(\alpha - H)\,t.\delta n + (\alpha - H)\,\delta\varepsilon + K\delta e + H\delta\varpi + (L - L') = 0.$$

44. Les erreurs L — L′ sont assez petites, pour qu'on puisse les considérer, pendant plusieurs jours consécutifs, comme variant proportionnellement au temps. Et l'approximation, qui suffit pour les coefficients $(\alpha - H)\,t$, $\alpha - H$, H et K, autorise à les considérer aussi comme variant proportionnellement au temps pendant les mêmes jours. Cette remarque permet, quand on a plusieurs observations consécutives, d'en déduire l'erreur moyenne, correspondante à la moyenne des temps des observations, et ainsi de n'avoir qu'une seule équation de condition, qu'on calcule avec la position moyenne de la planète. Bien entendu qu'il faudra ensuite donner à l'équation dont la constante aura été déterminée par quatre observations, par exemple, une influence quadruple de celle qu'on accordera à l'équation qui ne correspond qu'à une seule observation.

Les accolades qui, dans les tableaux n^{os} 38 et 40, embrassent plusieurs erreurs consécutives en longitude, indiquent celles de ces erreurs qui correspondent à une même équation de condition. En face de l'accolade, dans la dernière colonne de ces tableaux, se trouve un numéro d'ordre qu'on a répété en avant de chacune des équations de condition suivantes.

45. *Équations de condition, déduites des erreurs géocentriques des Tables provisoires, en longitude.*

Nos d'ordre.	NOMBRE d'observations.	ÉQUATIONS DE CONDITION.				
1	1	$0,17\,\delta n$	$+\,0,142\,\delta\varepsilon$	$-\,0,343\,\delta e$	$-\,0,053\,\delta\varpi$	$-\,3'',0 = 0$
2	3	$0,36$	$+\,0,246$	$+\,0,348$	$-\,0,073$	$+\,2,3 = 0$
3	5	$0,17$	$+\,0,118$	$+\,0,343$	$-\,0,049$	$+\,2,8 = 0$
4	2	$0,02$	$+\,0,014$	$+\,0,353$	$-\,0,056$	$+\,9,0 = 0$
5	6	$-\,0,24$	$-\,0,149$	$+\,0,547$	$-\,0,026$	$+\,2,5 = 0$
6	5	$0,13$	$+\,0,082$	$+\,0,330$	$-\,0,048$	$+\,3,6 = 0$
7	1	$0,30$	$+\,0,183$	$+\,0,331$	$-\,0,063$	$-\,2,5 = 0$
8	2	$0,44$	$+\,0,259$	$+\,0,431$	$-\,0,062$	$+\,5,0 = 0$
11	3	$0,29$	$+\,0,120$	$+\,0,242$	$-\,0,071$	$+\,3,7 = 0$
12	2	$0,17$	$+\,0,070$	$+\,0,229$	$-\,0,072$	$+\,5,0 = 0$
13	4	$-\,0,03$	$-\,0,013$	$+\,0,226$	$-\,0,085$	$+\,5,2 = 0$
14	2	$-\,0,42$	$-\,0,167$	$+\,0,295$	$-\,0,121$	$+\,4,5 = 0$
16	4	$-\,0,57$	$-\,0,220$	$+\,0,047$	$+\,0,111$	$-\,4,2 = 0$
17	4	$0,54$	$+\,0,205$	$+\,0,253$	$-\,0,079$	$+\,4,8 = 0$
18	4	$0,75$	$+\,0,282$	$+\,0,367$	$-\,0,083$	$+\,6,0 = 0$
19	4	$0,60$	$+\,0,223$	$+\,0,424$	$+\,0,057$	$-\,0,2 = 0$
20	3	$0,53$	$+\,0,194$	$+\,0,314$	$+\,0,075$	$-\,3,3 = 0$
21	3	$0,45$	$+\,0,165$	$+\,0,212$	$+\,0,083$	$-\,2,0 = 0$
22	2	$0,10$	$+\,0,037$	$+\,0,081$	$+\,0,079$	$-\,1,5 = 0$
23	1	$-\,0,19$	$-\,0,067$	$+\,0,143$	$+\,0,082$	$+\,1,0 = 0$
24	2	$0,96$	$+\,0,267$	$+\,0,208$	$-\,0,098$	$+\,3,5 = 0$
25	1	$0,75$	$+\,0,204$	$+\,0,418$	$+\,0,051$	$-\,3,0 = 0$
26	3	$1,17$	$+\,0,258$	$+\,0,057$	$-\,0,103$	$+\,4,0 = 0$
27	1	$0,79$	$+\,0,170$	$+\,0,407$	$+\,0,043$	$-\,1,0 = 0$
28	2	$0,30$	$+\,0,064$	$+\,0,314$	$+\,0,053$	$+\,0,0 = 0$
29	2	$-\,0,09$	$-\,0,019$	$+\,0,331$	$+\,0,052$	$-\,2,5 = 0$
31	4	$1,56$	$+\,0,296$	$-\,0,211$	$-\,0,105$	$+\,3,0 = 0$
32	2	$1,23$	$+\,0,221$	$+\,0,485$	$-\,0,005$	$-\,0,5 = 0$
33	1	$0,87$	$+\,0,155$	$+\,0,432$	$+\,0,020$	$-\,3,0 = 0$
34	2	$-\,0,02$	$-\,0,003$	$+\,0,400$	$+\,0,027$	$+\,3,0 = 0$
35	1	$0,98$	$+\,0,169$	$+\,0,454$	$-\,0,007$	$+\,0,0 = 0$
36	2	$1,32$	$+\,0,228$	$+\,0,508$	$+\,0,021$	$+\,4,0 = 0$

Suite des équations de condition, déduites des erreurs des Tables provisoires, en longitude.

Nos d'ordre.	NOMBRE d'observations.	ÉQUATIONS DE CONDITION.
37	2	$0{,}21\,\delta n + 0{,}034\,\delta\varepsilon - 0{,}319\,\delta e - 0{,}097\,\delta\varpi + 1{,}5'' = 0$
38	1	$1{,}97 + 0{,}305 - 0{,}139 - 0{,}112 + 7{,}0 = 0$
39	1	$1{,}42 + 0{,}217 + 0{,}456 - 0{,}028 + 1{,}0 = 0$
40	1	$0{,}59 + 0{,}087 + 0{,}390 - 0{,}022 + 1{,}0 = 0$
41	2	$1{,}36 + 0{,}199 + 0{,}043 + 0{,}100 - 7{,}0 = 0$
42	2	$-0{,}32 - 0{,}044 - 0{,}427 - 0{,}039 + 0{,}0 = 0$
43	5	$1{,}36 + 0{,}184 - 0{,}324 - 0{,}060 + 0{,}8 = 0$
44	1	$2{,}19 + 0{,}293 + 0{,}365 - 0{,}084 + 8{,}0 = 0$
45	2	$1{,}79 + 0{,}240 + 0{,}399 - 0{,}060 + 4{,}5 = 0$
46	5	$0{,}89 + 0{,}118 + 0{,}387 - 0{,}035 + 1{,}2 = 0$
47	3	$0{,}04 + 0{,}005 + 0{,}402 - 0{,}038 + 0{,}3 = 0$
49	4	$-0{,}72 - 0{,}088 - 0{,}482 - 0{,}010 - 5{,}0 = 0$
50	2	$1{,}32 + 0{,}158 - 0{,}402 - 0{,}036 - 3{,}0 = 0$
51	4	$2{,}39 + 0{,}286 - 0{,}397 - 0{,}077 + 2{,}2 = 0$
52	3	$-1{,}78 - 0{,}209 + 0{,}443 - 0{,}110 + 1{,}0 = 0$
54	1	$1{,}97 + 0{,}225 + 0{,}409 + 0{,}065 - 1{,}0 = 0$
55	1	$1{,}65 + 0{,}188 + 0{,}226 + 0{,}086 - 4{,}0 = 0$
56	1	$2{,}42 + 0{,}257 + 0{,}186 - 0{,}096 + 5{,}0 = 0$
57	1	$1{,}50 + 0{,}159 + 0{,}201 - 0{,}079 + 4{,}0 = 0$
58	1	$2{,}68 + 0{,}259 + 0{,}059 - 0{,}104 + 4{,}0 = 0$
59	1	$0{,}89 + 0{,}086 + 0{,}045 - 0{,}086 + 4{,}0 = 0$
60	1	$-1{,}35 - 0{,}130 - 0{,}057 - 0{,}125 - 3{,}0 = 0$
61	4	$2{,}60 + 0{,}244 + 0{,}509 + 0{,}015 - 1{,}5 = 0$
62	2	$1{,}10 + 0{,}100 - 0{,}407 + 0{,}023 - 3{,}5 = 0$
63	1	$2{,}24 + 0{,}200 - 0{,}449 + 0{,}036 - 9{,}0 = 0$
64	2	$2{,}69 + 0{,}240 - 0{,}511 + 0{,}011 - 5{,}0 = 0$
65	2	$2{,}86 + 0{,}254 - 0{,}524 + 0{,}001 - 0{,}5 = 0$
66	4	$0{,}02 + 0{,}002 + 0{,}360 + 0{,}043 - 0{,}5 = 0$
67	3	$-0{,}91 - 0{,}078 + 0{,}411 + 0{,}041 - 2{,}0 = 0$
68	1	$2{,}90 + 0{,}231 + 0{,}485 - 0{,}020 + 1{,}0 = 0$
69	1	$2{,}22 + 0{,}176 + 0{,}452 + 0{,}002 + 4{,}0 = 0$
70	2	$-1{,}58 - 0{,}125 + 0{,}517 + 0{,}007 + 5{,}5 = 0$
71	1	$3{,}40 + 0{,}251 + 0{,}436 - 0{,}053 + 4{,}0 = 0$

Suite des équations de condition, déduites des erreurs des Tables provisoires, en longitude.

Nos d'ordre.	NOMBRE d'observations.	ÉQUATIONS DE CONDITION.
72	3	$-\,0{,}01\ \delta n - 0{,}001\ \delta\varepsilon + 0{,}427\ \delta e - 0{,}019\ \delta\varpi + 1{,}^{\prime\prime}7 = 0$
73	1	$-\,0{,}99 \quad -\,0{,}073 \quad +\,0{,}471 \quad -\,0{,}022 \quad +\,1{,}0 = 0$
74	1	$2{,}65 \quad +\,0{,}193 \quad +\,0{,}420 \quad -\,0{,}041 \quad +\,0{,}0 = 0$
75	1	$3{,}26 \quad +\,0{,}188 \quad +\,0{,}031 \quad -\,0{,}091 \quad +\,5{,}0 = 0$
76	1	$-\,2{,}35 \quad -\,0{,}126 \quad +\,0{,}490 \quad +\,0{,}028 \quad -\,6{,}0 = 0$
77	4	$1{,}79 \quad +\,0{,}093 \quad -\,0{,}227 \quad -\,0{,}071 \quad -\,1{,}0 = 0$
78	1	$2{,}83 \quad +\,0{,}140 \quad -\,0{,}292 \quad -\,0{,}064 \quad +\,0{,}0 = 0$
79	1	$3{,}26 \quad +\,0{,}160 \quad -\,0{,}306 \quad -\,0{,}063 \quad +\,1{,}0 = 0$
80	2	$5{,}48 \quad +\,0{,}267 \quad +\,0{,}401 \quad -\,0{,}069 \quad +\,9{,}0 = 0$
81	2	$2{,}30 \quad +\,0{,}112 \quad +\,0{,}396 \quad -\,0{,}030 \quad +\,0{,}0 = 0$
82	1	$4{,}19 \quad +\,0{,}195 \quad +\,0{,}328 \quad -\,0{,}064 \quad +14{,}0 = 0$
83	3	$1{,}38 \quad +\,0{,}064 \quad +\,0{,}323 \quad -\,0{,}049 \quad -\,0{,}3 = 0$
84	1	$1{,}27 \quad +\,0{,}058 \quad +\,0{,}238 \quad +\,0{,}067 \quad +\,1{,}0 = 0$
85	1	$3{,}14 \quad +\,0{,}142 \quad -\,0{,}412 \quad -\,0{,}028 \quad +\,2{,}0 = 0$
86	1	$-\,2{,}04 \quad -\,0{,}092 \quad -\,0{,}468 \quad +\,0{,}011 \quad -\,3{,}0 = 0$
87	1	$4{,}81 \quad +\,0{,}215 \quad +\,0{,}223 \quad -\,0{,}084 \quad +\,6{,}0 = 0$
88	3	$2{,}76 \quad +\,0{,}123 \quad +\,0{,}209 \quad -\,0{,}075 \quad +\,7{,}3 = 0$
89	2	$-\,0{,}31 \quad -\,0{,}014 \quad +\,0{,}183 \quad -\,0{,}090 \quad +\,5{,}0 = 0$
90	2	$5{,}40 \quad +\,0{,}232 \quad -\,0{,}496 \quad -\,0{,}010 \quad +\,0{,}5 = 0$
91	2	$0{,}45 \quad +\,0{,}019 \quad +\,0{,}031 \quad -\,0{,}092 \quad +\,5{,}0 = 0$
92	2	$6{,}01 \quad +\,0{,}254 \quad +\,0{,}525 \quad +\,0{,}009 \quad +\,3{,}5 = 0$
93	2	$5{,}64 \quad +\,0{,}238 \quad +\,0{,}502 \quad +\,0{,}023 \quad +\,4{,}0 = 0$
94	3	$4{,}69 \quad +\,0{,}198 \quad +\,0{,}418 \quad +\,0{,}048 \quad +\,1{,}3 = 0$
95	4	$3{,}94 \quad +\,0{,}166 \quad +\,0{,}349 \quad +\,0{,}059 \quad +\,0{,}7 = 0$
96	2	$7{,}76 \quad +\,0{,}319 \quad -\,0{,}176 \quad -\,0{,}113 \quad +\,0{,}5 = 0$
97	2	$4{,}72 \quad +\,0{,}194 \quad -\,0{,}021 \quad -\,0{,}093 \quad +\,6{,}0 = 0$
98	1	$6{,}35 \quad +\,0{,}259 \quad +\,0{,}023 \quad -\,0{,}104 \quad +\,7{,}0 = 0$
99	2	$8{,}00 \quad +\,0{,}326 \quad +\,0{,}188 \quad -\,0{,}113 \quad +\,9{,}5 = 0$
100	2	$6{,}35 \quad +\,0{,}258 \quad +\,0{,}519 \quad -\,0{,}013 \quad +\,1{,}0 = 0$
101	2	$3{,}23 \quad +\,0{,}131 \quad +\,0{,}374 \quad +\,0{,}044 \quad -\,1.5 = 0$
102	3	$7{,}93 \quad +\,0{,}314 \quad -\,0{,}324 \quad -\,0{,}098 \quad +\,2{,}3 = 0$
103	3	$7{,}00 \quad +\,0{,}277 \quad -\,0{,}213 \quad -\,0.099 \quad +\,3.7 = 0$
104	2	$-\,1{,}28 \quad -\,0{,}050 \quad +\,0.447 \quad +\,0{,}014 \quad +\,0{,}0 = 0$

Suite des équations de condition, déduites des erreurs des Tables provisoires, en longitude.

Nos d'ordre.	NOMBRE d'observations.	ÉQUATIONS DE CONDITION.				
105	3	8,40 δn	+ 0,317 $\delta \varepsilon$	+ 0,383 δc	− 0,089 $\delta \varpi$	+ 5″,7 = 0
106	1	4,70	+ 0,177	+ 0,434	− 0,023	+ 4,0 = 0
107	2	2,02	+ 0,076	+ 0,412	− 0,011	− 3,5 = 0
108	1	0,03	+ 0,001	+ 0,430	− 0,014	− 5,0 = 0
109	1	1,44	+ 0,054	+ 0,387	− 0,022	− 1,0 = 0
110	2	5,00	+ 0,187	+ 0,422	− 0,038	+ 4,5 = 0
111	1	− 2,36	− 0,086	− 0,401	− 0,073	+ 0,0 = 0
112	1	9,02	+ 0,329	− 0,232	− 0,111	+13,0 = 0
113	1	2,95	+ 0,107	+ 0,367	− 0,042	+ 0,0 = 0
114	1	− 1,60	− 0,058	+ 0,414	− 0,056	+ 6,0 = 0
115	1	5,47	+ 0,197	+ 0,185	+ 0,092	− 2,0 = 0
116	3	1,38	+ 0,048	+ 0,042	+ 0,081	+ 2,0 = 0
117	1	10,50	+ 0,289	− 0,497	− 0,051	+ 8,1 = 0
118	4	9,93	+ 0,273	+ 0,085	− 0,106	+ 9,0 = 0
119	4	6,65	+ 0,183	+ 0,105	− 0,089	+12,0 = 0
120	1	− 0,18	− 0,005	+ 0,245	− 0,078	+ 4,9 = 0
121	1	7,67	+ 0,210	+ 0,134	− 0,092	+11,2 = 0
122	2	8,43	+ 0,230	+ 0,485	+ 0,031	+ 4,9 = 0
123	1	1,21	+ 0,033	+ 0,218	+ 0,070	− 1,8 = 0
124	2	5,46	+ 0,148	+ 0,409	+ 0,038	− 0,4 = 0
125	1	3,94	+ 0,106	− 0,342	+ 0,051	− 2,7 = 0
126	2	9,68	+ 0,260	− 0,526	− 0,009	+ 3,8 = 0
127	1	− 5,27	− 0,141	− 0,212	− 0,119	+ 0,7 = 0
128	2	1,50	+ 0,040	+ 0,084	− 0,086	+ 2,1 = 0
129	1	10,57	+ 0,281	+ 0,530	− 0,030	+ 7,0 = 0
130	3	8,24	+ 0,219	+ 0,485	+ 0,017	+ 7,3 = 0
131	4	6,18	+ 0,164	+ 0,404	+ 0,041	+ 2,2 = 0
132	2	0,56	+ 0,015	+ 0,329	+ 0,050	− 0,9 = 0
133	2	− 9,71	− 0,257	+ 0,583	+ 0,053	+ 1,2 = 0
134	1	−16,04	− 0,425	+ 0,616	+ 0,122	−10,3 = 0
135	2	7,98	+ 0,211	+ 0,465	+ 0,039	+ 3,8 = 0
136	1	6,64	+ 0,175	− 0,245	+ 0,080	+ 0,2 = 0
137	2	3,31	+ 0,087	− 0,373	+ 0,038	− 1,6 = 0

Suite des équations de condition, déduites des erreurs des Tables provisoires, en longitude.

Nos d'ordre.	NOMBRE d'observations.	ÉQUATIONS DE CONDITION.				
138	1	$-\ 2{,}90\ \delta n$	$-\ 0{,}076\ \delta\varepsilon$	$-\ 0{,}269\ \delta e$	$+\ 0{,}071\ \delta\varpi$	$-\ 9'',8 = 0$
139	1	6,47	+ 0,170	— 0,336	+ 0,064	— 4,5 = 0
141	1	10,57	+ 0,277	— 0,550	— 0,010	+11,5 = 0
142	1	11,02	+ 0,288	— 0,214	— 0,103	+10,0 = 0
143	1	—12,03	— 0,313	— 0,034	— 0,184	+ 5,8 = 0
144	1	— 5,08	— 0,132	+ 0,005	— 0,125	— 1,2 = 0
145	3	5,11	+ 0,132	+ 0,417	+ 0,020	+ 3,2 = 0
146	3	4,02	+ 0,104	+ 0,405	+ 0,023	+ 4,2 = 0
147	1	0,77	+ 0,020	+ 0,397	+ 0,025	+ 1,7 = 0
148	2	— 4,33	— 0,112	+ 0,492	+ 0,018	+ 1,0 = 0
149	2	— 8,15	— 0,211	+ 0,604	+ 0,015	— 1,3 = 0
150	2	— 1,43	— 0,037	+ 0,410	+ 0,017	+ 0,5 = 0
151	2	6,98	+ 0,180	+ 0,463	— 0,010	+ 5,3 = 0
152	2	9,04	+ 0,233	+ 0,510	+ 0,020	+ 6,3 = 0
153	2	2,50	+ 0,064	— 0,297	+ 0,058	— 0,2 = 0
154	2	— 7,15	— 0,183	— 0,247	+ 0,094	—12,9 = 0
155	1	9,35	+ 0,239	— 0,477	+ 0,044	— 3,5 = 0
156	5	10,07	+ 0,257	— 0,522	+ 0,026	+ 1,6 = 0
157	2	— 3,02	— 0,077	— 0,455	— 0,069	+ 0,4 = 0
158	3	1,58	+ 0,040	— 0,196	— 0,081	+ 3,4 = 0
159	1	7,18	+ 0,182	— 0,233	— 0,077	+ 2,5 = 0
160	3	10,45	+ 0,265	— 0,213	— 0,097	+ 9,0 = 0
161	2	12,86	+ 0,326	— 0,106	— 0,118	+14,6 = 0
162	2	8,53	+ 0,216	+ 0,451	— 0,031	+ 8,3 = 0
163	1	1,78	+ 0,045	+ 0,417	— 0,006	+ 4,0 = 0
164	2	— 0,87	— 0,022	+ 0,443	— 0,010	+ 3,8 = 0
165	1	— 5,82	— 0,147	+ 0,550	— 0,022	+ 5,0 = 0
166	1	— 3,66	— 0,092	+ 0,467	+ 0,008	+ 0,4 = 0
167	1	— 8,02	— 0,201	— 0,065	+ 0,108	—11,2 = 0
168	1	—10,24	— 0,254	— 0,536	— 0,109	+ 0,3 = 0
169	3	— 5,41	— 0,134	— 0,414	— 0,085	+ 0,5 = 0
170	2	13,56	+ 0,336	— 0,178	— 0,125	+15,8 = 0
171	2	13,25	+ 0,327	+ 0,294	— 0,105	+16,4 = 0

Suite des équations de condition, déduites des erreurs des Tables provisoires, en longitude.

Nos d'ordre.	NOMBRE d'observations.	ÉQUATIONS DE CONDITION.
172	3	$11{,}65\,\delta n + 0{,}288\,\delta\varepsilon + 0{,}358\,\delta e - 0{,}084\,\delta\varpi + 15'',4 = 0$
173	2	$0{,}81 + 0{,}020 + 0{,}386 - 0{,}041 + 5{,}4 = 0$
174	1	$-1{,}46 - 0{,}036 + 0{,}425 - 0{,}023 - 3{,}3 = 0$
175	1	$6{,}18 + 0{,}152 + 0{,}350 - 0{,}053 + 4{,}4 = 0$
176	2	$9{,}16 + 0{,}225 + 0{,}358 + 0{,}076 + 3{,}8 = 0$
177	1	$8{,}59 + 0{,}211 + 0{,}267 + 0{,}087 + 2{,}9 = 0$
178	1	$4{,}61 + 0{,}113 + 0{,}176 + 0{,}069 + 5{,}1 = 0$
179	1	$6{,}21 + 0{,}152 - 0{,}031 + 0{,}093 - 1{,}9 = 0$
180	1	$-13{,}24 - 0{,}321 - 0{,}778 + 0{,}014 - 6{,}2 = 0$
181	4	$5{,}74 + 0{,}139 - 0{,}407 - 0{,}030 + 2{,}2 = 0$
182	1	$10{,}69 + 0{,}258 - 0{,}416 - 0{,}062 + 7{,}4 = 0$
183	2	$12{,}16 + 0{,}294 - 0{,}393 - 0{,}077 + 12{,}1 = 0$
184	1	$6{,}76 + 0{,}163 + 0{,}297 - 0{,}065 + 8{,}2 = 0$
185	1	$0{,}17 + 0{,}004 + 0{,}290 - 0{,}072 + 1{,}9 = 0$
186	2	$4{,}99 + 0{,}120 + 0{,}282 - 0{,}062 + 5{,}0 = 0$
187	1	$14{,}00 + 0{,}336 + 0{,}470 - 0{,}048 + 6{,}8 = 0$
188	1	$-0{,}80 - 0{,}019 + 0{,}219 + 0{,}069 + 2{,}2 = 0$
189	1	$5{,}62 + 0{,}134 + 0{,}280 + 0{,}069 - 0{,}4 = 0$
190	2	$8{,}42 + 0{,}200 - 0{,}470 - 0{,}023 + 4{,}0 = 0$
191	1	$0{,}59 + 0{,}014 - 0{,}407 - 0{,}004 + 0{,}6 = 0$
192	4	$5{,}12 + 0{,}121 - 0{,}427 + 0{,}002 - 3{,}9 = 0$
193	4	$8{,}53 + 0{,}202 - 0{,}464 - 0{,}015 + 0{,}8 = 0$
194	2	$9{,}98 + 0{,}236 - 0{,}474 - 0{,}030 + 3{,}9 = 0$
195	1	$13{,}19 + 0{,}311 - 0{,}439 - 0{,}077 + 6{,}9 = 0$
196	3	$13{,}90 + 0{,}328 + 0{,}038 - 0{,}119 + 13{,}4 = 0$
197	1	$4{,}97 + 0{,}117 + 0{,}173 - 0{,}079 + 11{,}8 = 0$
198	2	$2{,}42 + 0{,}057 + 0{,}151 - 0{,}081 + 9{,}0 = 0$
199	2	$-1{,}96 - 0{,}046 + 0{,}134 - 0{,}099 + 7{,}0 = 0$
200	3	$11{,}94 + 0{,}280 + 0{,}288 - 0{,}093 + 12{,}9 = 0$
201	4	$13{,}19 + 0{,}309 + 0{,}408 - 0{,}084 + 14{,}6 = 0$

46. La latitude héliocentrique λ est donnée par la formule

$$\operatorname{tang}\lambda = \sin(v_1 - \theta)\operatorname{tang}\varphi,$$

qui fournit par la différentiation, en réduisant ∂v_1 à ∂v, et en considérant $\cos\lambda$ et $\cos\varphi$ comme égaux à l'unité,

$$\partial\lambda = \sin(v_1 - \theta)\,\partial\varphi - \operatorname{tang}\varphi\cos(v_1 - \theta)\,\partial\theta + \operatorname{tang}\varphi\cos(v_1 - \theta)\,\partial v.$$

En multipliant par $\frac{r_1}{\Delta_1}$ les deux membres, on obtiendra l'expression de la variation $\partial\Lambda$ en latitude géocentrique; et en substituant cette variation dans la relation

$$\Lambda + \partial\Lambda - \Lambda' = 0,$$

Λ' étant la latitude déduite de l'observation, on aura l'équation de condition

$$\frac{r_1}{\Delta_1}\sin(v_1 - \theta)\,\partial\varphi - \frac{r_1}{\Delta_1}\operatorname{tang}\varphi\cos(v_1 - \theta)\,\partial\theta + (\Lambda - \Lambda') + \frac{r_1}{\Delta_1}\operatorname{tang}\varphi\cos(v_1 - \theta)\,\partial v = 0.$$

Le dernier terme de cette équation n'est pas toujours négligeable. En sorte qu'en remplaçant ∂v par sa valeur, n° 42, on aurait à considérer simultanément les corrections des six constantes n, ε, e, ϖ, φ et θ. J'ai préféré déterminer des valeurs très-approchées des quatre premières corrections au moyen des équations de condition du n° 45. J'ai pu calculer par leur moyen la correction ∂v de la longitude héliocentrique, et obtenir ainsi la petite variation qu'il faut apporter à l'erreur en latitude observée, $\Lambda - \Lambda'$, pour n'avoir plus dans les équations que deux inconnues, la correction de l'inclinaison et la correction de la longitude du nœud.

C'est ainsi qu'ont été déterminées les équations de condition suivantes, qu'on trouvera disposées comme celles du n° 45.

Équations de condition, déduites des erreurs géocentriques des Tables provisoires, en latitude.

N^os d'ordre.	NOMBRE d'observations.	ÉQUATIONS DE CONDITION.			N^os d'ordre.	NOMBRE d'observations.	ÉQUATIONS DE CONDITION.		
1	1	0,152 δφ	−0,031 δθ	−5″,0=0	37	2	0,379 δφ	+0,001 δθ	−0″,3=0
2	3	0,281	+0,016	+4,1=0	38	1	−0,063	−0,031	−1,6=0
3	5	0,167	+0,048	−1,5=0	39	1	0,194	+0,035	−0,8=0
4	2	0,000	+0,064	−4,0=0	40	1	0,185	−0,029	−3,3=0
5	6	−0,214	−0,043	+0,1=0	41	2	−0,211	+0,032	−5,5=0
6	5	0,033	−0,038	−2,5=0	42	3	0,364	−0,010	−1,0=0
7	1	0,143	−0,030	−2,7=0	43	5	−0,348	−0,011	+0,8=0
8	2	0,233	−0,013	1,5=0	45	2	0,262	+0,023	+4,5=0
11	3	0,255	+0,040	−2,1=0	46	5	0,105	+0,052	+0,8=0
12	2	0,209	+0,050	−1,4=0	47	3	−0,100	+0,063	−0,6=0
13	4	0,101	+0,063	−3,6=0	48	3	−0,092	−0,031	+3,2=0
14	2	−0,122	+0,077	−6,7=0	49	4	0,333	−0,019	+3,3=0
16	4	−0,243	−0,038	−4,3=0	50	2	−0,394	+0,008	+8,4=0
17	4	0,086	−0,032	−1,5=0	51	4	−0,204	−0,024	+2,6=0
18	4	0,202	−0,019	−3,7=0	52	3	−0,279	+0,073	−2,3=0
19	4	0,029	+0,040	−5,4=0	54	1	0,023	+0,040	−5,9=0
20	3	−0,086	+0,042	−1,3=0	55	1	−0,144	+0,040	−3,9=0
21	3	−0,192	+0,039	+0,5=0	56	1	0,289	−0,001	+2,8=0
22	2	−0,405	+0,012	−4,2=0	57	1	0,303	+0,025	+1,4=0
23	1	−0,435	−0,004	+4,4=0	58	1	0,270	−0,009	+2,2=0
24	2	0,097	−0,030	−2,6=0	59	1	0,333	+0,028	+3,4=0
25	1	0,000	+0,043	−1,7=0	61	4	0,141	+0,035	−2,8=0
26	3	−0,009	−0,033	+0,6=0	62	1	−0,157	−0,033	+2,7=0
27	1	−0,040	+0,047	−2,7=0	63	1	−0,319	+0,022	−3,0=0
28	2	−0,291	+0,043	+0,4=0	64	2	−0,324	+0,006	−1,1=0
29	2	−0,409	+0,031	−0,3=0	65	2	−0,310	−0,002	−1,5=0
31	4	0,119	−0,028	−1,6=0	66	4	−0,362	+0,040	−3,6=0
32	2	0,151	+0,038	−6,4=0	67	3	−0,448	+0,031	−2,5=0
33	1	−0,000	+0,050	−5,7=0	68	1	0,191	+0,033	−3,3=0
34	2	−0,330	+0,047	−1,3=0	69	1	0,080	+0,046	−2,4=0
35	1	0,284	−0,005	−4,2=0	70	2	−0,452	+0,040	−3,8=0
36	2	0,246	+0,018	−3,1=0	71	1	0,252	+0,023	−2,0=0

Suite des équations de condition, déduites des erreurs des Tables provisoires, en latitude.

Nos d'ordre.	NOMBRE d'obser-vations.	ÉQUATIONS DE CONDITION.	Nos d'ordre.	NOMBRE d'obser-vations.	ÉQUATIONS DE CONDITION.
72	3	$-0{,}180\,\delta\varphi + 0{,}061\,\delta\theta - 2'',0 = 0$	106	1	$0{,}144\,\delta\varphi + 0{,}044\,\delta\theta - 3'',0 = 0$
73	1	$-0{,}290 + 0{,}059 - 3{,}9 = 0$	107	2	$-0{,}058 + 0{,}058 - 0{,}9 = 0$
74	1	$0{,}236 - 0{,}017 - 1{,}8 = 0$	108	1	$-0{,}196 + 0{,}060 + 4{,}4 = 0$
75	1	$0{,}316 + 0{,}001 + 1{,}6 = 0$	109	1	$0{,}136 - 0{,}034 + 1{,}0 = 0$
76	1	$-0{,}475 + 0{,}031 + 3{,}0 = 0$	110	2	$0{,}240 - 0{,}017 - 0{,}9 = 0$
77	4	$0{,}326 - 0{,}009 + 1{,}2 = 0$	111	1	$-0{,}388 + 0{,}055 + 0{,}0 = 0$
79	1	$-0{,}377 - 0{,}007 + 0{,}6 = 0$	112	1	$-0{,}070 - 0{,}030 + 6{,}6 = 0$
80	2	$0{,}271 + 0{,}015 - 2{,}4 = 0$	113	1	$0{,}114 + 0{,}052 - 1{,}9 = 0$
81	2	$0{,}080 + 0{,}053 + 1{,}1 = 0$	114	1	$-0{,}166 + 0{,}067 - 3{,}9 = 0$
82	1	$0{,}269 + 0{,}028 + 1{,}4 = 0$	115	1	$-0{,}146 + 0{,}038 - 4{,}9 = 0$
83	3	$-0{,}017 - 0{,}040 - 3{,}4 = 0$	116	3	$-0{,}398 + 0{,}011 + 0{,}7 = 0$
85	1	$0{,}020 - 0{,}036 + 3{,}4 = 0$	117	1	$-0{,}249 - 0{,}017 + 3{,}9 = 0$
86	1	$0{,}264 - 0{,}029 - 0{,}7 = 0$	118	4	$0{,}264 - 0{,}009 + 2{,}4 = 0$
87	1	$0{,}306 + 0{,}013 + 3{,}0 = 0$	119	4	$0{,}321 + 0{,}011 - 0{,}8 = 0$
88	3	$0{,}270 + 0{,}037 + 2{,}6 = 0$	120	1	$-0{,}319 - 0{,}031 + 2{,}9 = 0$
89	2	$0{,}143 + 0{,}061 - 1{,}4 = 0$	121	1	$-0{,}015 - 0{,}035 + 5{,}9 = 0$
90	2	$-0{,}337 + 0{,}001 + 0{,}3 = 0$	122	2	$0{,}091 + 0{,}039 - 0{,}7 = 0$
91	2	$0{,}293 + 0{,}043 + 1{,}3 = 0$	123	1	$-0{,}386 + 0{,}027 - 0{,}8 = 0$
92	2	$0{,}163 + 0{,}032 - 1{,}9 = 0$	124	2	$0{,}285 + 0{,}016 + 0{,}3 = 0$
93	2	$0{,}121 + 0{,}037 - 1{,}1 = 0$	125	1	$-0{,}207 + 0{,}048 - 2{,}9 = 0$
94	3	$-0{,}003 + 0{,}044 - 1{,}3 = 0$	126	2	$-0{,}303 - 0{,}005 + 0{,}7 = 0$
95	4	$-0{,}113 + 0{,}045 - 1{,}9 = 0$	127	1	$0{,}284 + 0{,}058 + 1{,}1 = 0$
96	2	$0{,}116 - 0{,}027 + 6{,}8 = 0$	128	2	$-0{,}364 - 0{,}023 - 0{,}7 = 0$
97	2	$0{,}306 - 0{,}005 - 2{,}3 = 0$	129	1	$0{,}230 + 0{,}021 - 0{,}1 = 0$
98	1	$-0{,}033 - 0{,}033 + 1{,}9 = 0$	130	3	$0{,}106 + 0{,}040 - 0{,}7 = 0$
99	2	$0{,}135 - 0{,}025 + 2{,}1 = 0$	131	4	$-0{,}048 + 0{,}048 - 3{,}6 = 0$
100	2	$0{,}187 + 0{,}031 + 1{,}3 = 0$	132	2	$-0{,}364 + 0{,}038 - 0{,}7 = 0$
101	2	$-0{,}122 + 0{,}049 + 3{,}1 = 0$	133	2	$-0{,}533 + 0{,}003 + 0{,}5 = 0$
102	3	$0{,}030 - 0{,}030 + 7{,}2 = 0$	134	1	$0{,}029 - 0{,}051 + 3{,}7 = 0$
103	3	$0{,}137 - 0{,}027 + 6{,}0 = 0$	135	2	$0{,}229 + 0{,}024 + 0{,}4 = 0$
104	2	$-0{,}374 + 0{,}046 + 1{,}0 = 0$	136	1	$-0{,}308 + 0{,}010 - 4{,}2 = 0$
105	4	$0{,}260 + 0{,}001 + 1{,}5 = 0$	137	2	$-0{,}213 - 0{,}030 - 1{,}3 = 0$

Suite des équations de condition, déduites des erreurs des Tables provisoires, en latitude.

Nos d'ordre.	NOMBRE d'observations.	ÉQUATIONS DE CONDITION.	Nos d'ordre	NOMBRE d'observations.	ÉQUATIONS DE CONDITION.
138	1	$0,194\,\delta\varphi \quad +0,053\,\delta\theta \quad -0'',6=0$	170	2	$-0,092\,\delta\varphi \quad -0,030\,\delta\theta \quad +3'',0=0$
139	1	$-0,248 \quad +0,036 \quad +5,2=0$	171	2	$0,250 \quad -0,006 \quad +1,9=0$
141	1	$-0,280 \quad -0,009 \quad -3,5=0$	172	3	$0,274 \quad +0,007 \quad +0,6=0$
142	1	$0,128 \quad -0,027 \quad +2,5=0$	173	2	$-0,054 \quad +0,063 \quad -1,5=0$
143	1	$-0,552 \quad +0,055 \quad -5,3=0$	174	1	$-0,037 \quad -0,043 \quad +1,8=0$
144	1	$-0,551 \quad +0,022 \quad +1,5=0$	175	1	$0,148 \quad -0,030 \quad +0,1=0$
145	3	$-0,052 \quad +0,052 \quad -0,4=0$	176	2	$0,000 \quad +0,039 \quad -2,3=0$
146	3	$-0,115 \quad +0,053 \quad -3,0=0$	177	1	$-0,075 \quad +0,040 \quad -0,5=0$
147	1	$-0,284 \quad +0,050 \quad -2,1=0$	178	1	$-0,232 \quad +0,033 \quad -2,9=0$
148	2	$-0,452 \quad +0,037 \quad -2,7=0$	179	1	$-0,308 \quad +0,024 \quad +0,7=0$
149	2	$-0,526 \quad +0,026 \quad +0,5=0$	181	4	$-0,401 \quad +0,015 \quad +0,4=0$
150	2	$0,179 \quad -0,034 \quad +3,5=0$	182	1	$-0,270 \quad -0,018 \quad +0,9=0$
151	2	$0,283 \quad -0,004 \quad -0,6=0$	183	2	$-0,180 \quad -0,025 \quad +2,1=0$
152	2	$0,242 \quad +0,019 \quad +2,0=0$	184	1	$0,262 \quad +0,033 \quad +1,3=0$
153	2	$-0,277 \quad -0,025 \quad +0,0=0$	185	1	$0,063 \quad +0,063 \quad -0,4=0$
154	2	$0,367 \quad +0,033 \quad -1,6=0$	186	2	$0,021 \quad -0,037 \quad +4,8=0$
155	1	$-0,306 \quad +0,011 \quad +0,8=0$	187	1	$0,086 \quad +0,037 \quad +1,0=0$
156	5	$-0,303 \quad +0,003 \quad -0,1=0$	188	1	$0,351 \quad +0,008 \quad -1,1=0$
157	2	$0,362 \quad +0,008 \quad +2,3=0$	189	1	$0,220 \quad +0,032 \quad +0,8=0$
158	3	$-0,470 \quad +0,008 \quad -1,8=0$	190	2	$-0,106 \quad -0,032 \quad +3,4=0$
159	1	$-0,314 \quad -0,019 \quad -4,1=0$	191	1	$0,147 \quad -0,035 \quad -0,6=0$
160	3	$-0,166 \quad -0,029 \quad +1,6=0$	192	4	$-0,356 \quad +0,032 \quad -3,4=0$
161	2	$-0,018 \quad -0,031 \quad +1,4=0$	193	4	$-0,361 \quad +0,006 \quad -0,7=0$
162	2	$0,199 \quad +0,035 \quad +0,9=0$	194	2	$-0,330 \quad -0,004 \quad +0,9=0$
163	1	$-0,136 \quad +0,058 \quad -7,0=0$	195	1	$-0,182 \quad -0,024 \quad -6,1=0$
164	2	$-0,250 \quad +0,058 \quad -5,5=0$	196	3	$0,194 \quad -0,019 \quad +3,5=0$
165	1	$-0,424 \quad +0,050 \quad -4,1=0$	197	1	$0,292 \quad +0,033 \quad +1,8=0$
166	1	$0,031 \quad -0,043 \quad +4,5=0$	198	2	$0,252 \quad +0,046 \quad -2,1=0$
167	1	$-0,190 \quad -0,042 \quad +0,9=0$	199	2	$0,148 \quad +0,064 \quad +1,7=0$
168	1	$-0,279 \quad +0,077 \quad -1,0=0$	200	3	$0,159 \quad -0,024 \quad +2,2=0$
169	4	$-0,382 \quad +0,060 \quad -2,3=0$	201	4	$0,226 \quad -0,012 \quad +2,2=0$

§ IX.

Des passages de Mercure sur le Soleil.

47. Les observations des passages de Mercure, sur le Soleil, sont les seules données dont nous puissions profiter, pour avoir des positions exactes de la planète à des époques un peu éloignées de nous. Plusieurs causes, toutefois, peuvent entacher ces observations d'erreurs assez grandes; et je ne crois pas qu'on puisse les admettre toutes sans discussion.

L'observation du premier contact extérieur est toujours très-incertaine; celle du second contact extérieur est, au contraire, assez juste. J'ai préféré, toutefois, n'employer que les observations des deux contacts intérieurs. Elles jouissent, en général, d'une grande précision, ainsi qu'on le reconnaît en comparant les observations d'un même passage. faites par différents astronomes. Il est bien entendu que je ne parle que des observations faites directement au moyen des lunettes. L'emploi de l'image solaire, pour reconnaître l'instant de l'entrée ou celui de la sortie, est un procédé détestable, qui peut laisser des incertitudes de 4 ou 5 minutes de temps.

Lorsque l'observation a été faite dans un grand observatoire, on peut regarder l'heure de la pendule comme exacte; mais en est-il toujours de même, quand le passage n'a été vu que dans une contrée lointaine, et par un observateur dont le nom n'est connu qu'à l'occasion de ce passage? En outre, on dépend complétement de la longitude du lieu de l'observateur, qui souvent ne l'a pas connue lui-même d'une manière exacte. Et alors, en recourant aux observations modernes pour la déterminer, on peut s'exposer quelquefois, faute de renseignements suffisants, à appliquer à un lieu une longitude qui convient à un autre.

Enfin nous ne pouvons, en général, déterminer le lieu du Soleil. pour le calcul d'un passage, que par l'emploi des Tables, dont les erreurs ne sont malheureusement pas toujours aussi faibles qu'on pourrait le désirer. J'ai fait usage des Tables solaires de Delambre, auxquelles j'ai appliqué les corrections suivantes :

1°. J'ai corrigé la Table XV, qui donne l'équation lunaire de la longitude, en réduisant le maximum de la perturbation à 6″,7, au lieu de 7″,5 que suppose la Table. J'ai corrigé dans le même rapport le maximum de la perturbation lunaire du rayon vecteur, donnée par la Table XXIV.

2°. Dans l'emploi des Tables XVI et XXV, qui donnent les perturbations produites par Vénus, j'ai réduit la masse de cette planète à celle qui a été déterminée par Burckardt.

3°. J'ai appliqué à la longitude vraie du Soleil et au logarithme du rayon vecteur les corrections suivantes :

$$\begin{aligned}\delta\odot &= 2'',61 - 1'',33\cos\odot + 1'',90\sin\odot\\ &\quad + (0'',1448 - 0'',0047\cos\odot - 0'',0200\sin\odot)\times t,\\ \delta\log R &= -20,0\cos\odot - 14,0\sin\odot\\ &\quad + (0,211\cos\odot - 0,050\sin\odot)\times t;\end{aligned}$$

t est le temps compté à partir de 1800. L'unité, dans la correction du logarithme du rayon vecteur, est la septième décimale.

48. Supposons qu'on ait observé un contact intérieur à l'instant T, temps moyen de l'Observatoire de Paris; et cherchons la correction τ qu'on doit apporter à ce temps pour avoir l'instant apparent, tel qu'il eût été indiqué par les Tables provisoires.

Soient, à cet effet, l et s la longitude et la latitude géocentriques de Mercure pour le temps T, affectées de l'aberration et de la parallaxe. Désignons par $\odot$ et σ les données correspondantes pour le Soleil. Appelons m et n les mouvements relatifs de Mercure en longitude et en latitude, et c la différence des demi-diamètres apparents du Soleil et de Mercure pour l'instant de l'observation. Si nous posons

$$(l - \odot + mt)^2 + (s - \sigma + nt)^2 = c^2,$$

la plus petite des racines de cette équation nous fera connaître l'instant τ de la phase apparente, compté à partir du temps T, et tel qu'il serait fourni par les Tables.

La différence τ entre le calcul et l'observation est une erreur des Tables qu'il s'agit de corriger, en supposant le lieu du Soleil exact, mais en attribuant à la longitude l de Mercure, à sa latitude s, et à la constante c, des corrections convenables, ∂s, ∂l et ∂c. La variation correspondante du temps, fournie par l'équation précédente, devra être égale à $(-\tau)$; en sorte qu'on aura l'équation de condition

$$\partial l + \frac{s-\sigma}{l-\odot}\partial s - \frac{c}{l-\odot}\partial c - \left\{ m + n\frac{s-\sigma}{l-\odot} \right\}.\tau = 0.$$

En la multipliant par $-\frac{\Delta_1}{r_1}$, remarquant que $-\frac{\Delta_1}{r_1}\partial l$ est la correction de la longitude héliocentrique, et que $\frac{\Delta_1}{r_1}\partial s$ est la correction de la latitude héliocentrique, il viendra

$$\partial \nu - \frac{s-\sigma}{l-\odot}\partial \lambda + \frac{\Delta_1}{r_1}\frac{c}{l-\odot}\partial c + \frac{\Delta_1}{r_1}\left\{ m + n\frac{s-\sigma}{l-\odot} \right\}.\tau = 0.$$

J'ai employé, pour le calcul de cette équation, le demi-diamètre du Soleil, tel que Delambre le suppose dans ses Tables, mais en le diminuant de 3″,6, comme cet auteur le prescrit pour le calcul des éclipses de Soleil. J'ai supposé le demi-diamètre de Mercure égal à 3″,23 à la distance moyenne (n° **7**).

Passage du 5 *mai* 1832.

49. M. Bessel, qui l'a observé à Kœnigsberg, fixe le premier contact intérieur à $10^h 24^m 38^s,8$, temps moyen de son observatoire; et le second contact intérieur à $17^h 7^m 38^s,0$.

La longitude de l'observatoire de M. Bessel est de $1^h 12^m 39^s$ à l'est de l'Observatoire de Paris; sa latitude est de 54°42′50″ au nord.

Avec ces données, on obtient les résultats suivants :

	Premier contact.	Deuxième contact.
Temps moyen de Paris.	$9^h 11^m 59^s,8$	$15^h 54^m 59^s,0$
Longitude géocentrique l de Mercure.	45° 2′ 0″,1	44° 51′ 27″,4
Latitude géocentrique s de Mercure. .	10. 10″,2	5. 21″,0
Longitude $\odot$ du Soleil.	44.50. 7″,9	45. 6. 15″,8
Latitude σ du Soleil.	— 6″,2	— 5″,2
Distance c des centres.	943″,0	
Erreur tabulaire τ.	$-20^s,6$	$-58^s,1$

et on en déduit les deux équations de condition

$$\text{Entrée} \ldots\ldots \quad \delta v - 0{,}87\,\delta\lambda + 1{,}63\,\delta c + 1'',9 = 0,$$
$$\text{Sortie} \ldots\ldots \quad \delta v + 0{,}37\,\delta\lambda - 1{,}30\,\delta c + 4'',4 = 0.$$

Si l'on multiplie la seconde par $\frac{3}{2}$, et qu'on ajoute le résultat avec la première, on aura l'équation suivante :

$$\delta v = -3'',4 + 0{,}13\,\delta\lambda + 0{,}13\,\delta c.$$

$\delta\lambda$ et δc ne pouvant avoir qu'une très-légère influence sur le second membre, la constante $-3'',4$ représente sensiblement la correction de la longitude héliocentrique tabulaire.

Passage du 9 novembre 1802.

50. C'est le dernier dont Lalande, qui s'est occupé si longtemps de Mercure, ait pu faire usage. « Je l'ai observé, dit cet illustre astronome, » avec délices, dans le même endroit où il le fut pour la première fois » par Gassendi, l'un de mes plus illustres prédécesseurs au Collége de » France. » On n'a vu à Paris que la sortie. Voici les instants obtenus pour le second contact intérieur, par six observateurs : ils sont tous en temps vrai, réduit au méridien de l'Observatoire.

	Temps vrai du deuxième contact interne.
Lalande.	$12^h 6^m 29^s$
Messier..	12.6.49
Lalande neveu.	12.6.44
Bouvard.	12.6.54
Méchain.	12.6.45
Burckardt	12.6.45

Moyenne des six observations.	$12^h\ 6^m 44^s$
Équation du temps.	11.44. 2
Temps moyen de l'observat. .	11.50.46

J'ai déduit de cette observation les résultats suivants :

Longitude géocentrique l de Mercure.	226° 8′ 5″,4
Latitude géocentrique s de Mercure.	3. 12 ,1
Longitude ⊙ du Soleil.	226.23. 58 ,3
Latitude σ du Soleil	— 7 ,3
Distance c des centres.	962 ,9
Erreur tabulaire τ.	-108^s,0

$$\delta v + 0{,}21\,\delta\lambda - 2{,}20\,\delta e + 23'',3 = 0.$$

L'erreur de la distance des centres a trop d'influence dans cette équation pour qu'on puisse l'employer seule au calcul de δv.

Passage du 7 *mai* 1799.

51. Il a été observé complétement par Delambre. J'ai déduit de son observation les résultats suivants :

	Premier contact.	Deuxième contact
Temps moyen de Paris.	$9^h\,20^m\;9^s,8$	$16^h\,38^m\;4^s,4$
Longitude géocentrique l de Mercure.	$47^\circ\;0'\;22'',3$	$46^\circ\,49'\;3'',3$
Latitude géocentrique s de Mercure.	$-\;3.\;7,2$	$-\;8.\;22,1$
Longitude ⊙ du Soleil.	$46.44.\;53,6$	$47.\;2.\;22,5$
Latitude σ du Soleil.	$-\;5,6$	$-\;3,7$
Distance c des centres.	$942,4$	
Erreur tabulaire τ.	$62^s,9$	$9^s,6$

d'où les équations de condition

$$\text{Entrée.}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad \delta v + 0{,}20\,\delta\lambda + 1{,}25\,\delta c - 4'',9 = 0,$$

$$\text{Sortie.}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad \delta v - 0{,}62\,\delta\lambda - 1{,}44\,\delta c - 0'',9 = 0.$$

La première, multipliée par $\frac{3}{2}$, puis ajoutée avec la seconde, donne

$$\delta v = 3'',3 + 0{,}13\,\delta\lambda - 0{,}17\,\delta c.$$

La constante du second membre est sensiblement la correction de la longitude tabulaire.

Passage du 5 *novembre* 1789.

52. Le premier contact interne a été observé, à Paris, par Cassini, Delambre, Messier et Méchain. Voici les résultats de leurs observations en temps vrai :

Cassini	$13^h\,19^m\;5^s,8$
Delambre.	$13.19.\;2,0$
Messier	$13.18.54,0$
Méchain.	$13.19.\;0,0$

Moyenne des observations. .	$13^h\,19^m\;0^s,5$
Équation du temps	$11.43.51,4$
Temps moyen de la phase. .	$13.\;2.51,9$

Le second contact interne a été observé, à Montevideo, par Galiano, Vernacci et de la Concha. Leur longitude était de $3^h 54^m 15^s$ à l'ouest de Paris, et leur latitude de 34° 54′ 48″ au sud. La moyenne de leurs observations nous donne :

Second contact, temps vrai de Montevideo.	$14^h 15^m 11^s$
Longitude ouest de Montevideo.	3.54.15
Équation du temps.	11.43.51
Temps moyen de la phase.	17.53 17

Le calcul de ces observations donne successivement :

	Premier contact.	Deuxième contact.
Longitude géocentrique l de Mercure.	223° 47′ 55″,5	223° 31′ 44″,5
Latitude géocentrique s de Mercure. .	— 9. 30,2	— 5. 5,1
Longitude ⊙ du Soleil.	223.34. 57,7	223.47. 2,0
Latitude σ du Soleil.	— 8,3	1,5
Distance c des centres.	962,4	
Erreur tabulaire τ.	— 32^s,3	— 57^s,6

$$\text{Entree} \ldots\ldots \quad \delta v + 0{,}72\,\delta\lambda + 2{,}64\,\delta c + 7'',4 = 0,$$

$$\text{Sortie} \ldots\ldots \quad \delta v - 0{,}34\,\delta\lambda - 2{,}27\,\delta c + 11'',4 = 0.$$

La seconde équation, multipliée par $\frac{4}{3}$ et ajoutée à la première, fournit la relation

$$\delta v = -\,9'',7 - 0{,}12\,\delta\lambda + 0{,}19\,\delta c.$$

Passage du 4 mai 1786.

55. On sait que les Tables de Lalande ayant indiqué la sortie 53 minutes trop tòt, elle fut manquée à Paris par la plupart des astronomes. L'observation a été faite complétement à Mittaw, par Beitler; à Saint-Pétersbourg, par Inochodzow; à Bagdad, par de Beauchamp.

Pour comparer ces résultats entre eux, je réduirai tous les calculs au centre de la Terre. La latitude de Mittaw est de 56° 39′ N.; celle de Saint-Pétersbourg de 59° 56′ N.; celle de Bagdad de 33° 20′ N.

	Beitler.	Inochodzow.	de Beauchamp.
Instant du premier contact interne, en temps vrai de chaque méridien.	$4^h37^m26^s$	$5^h\ 3^m13^s$	$6^h\ 0^m\ 5^s$
Différence avec le méridien de Paris.	22.34.27	22. 8. 6	21.11.51
Reduction au centre de la Terre.	0. 1.40	0. 1.42	0. 0.40
Équation du temps.	11.56.31	11.56.31	11.56.31
Temps moyen pour le centre de la Terre. . .	3.10. 4	3. 9.32	3. 9 7

d'où, par une moyenne entre les trois résultats, $3^h9^m34^s$ pour le temps moyen de la phase vue du centre de la Terre.

	Beitler.	Inochodzow.	de Beauchamp.
Instant du deuxième contact interne, en temps vrai de chaque méridien.	$10^h\ 1^m\ 3^s$	$10^h27^m12^s$	$11^h22^m52^s$
Différence avec le méridien de Paris. . . .	22.34.27	22. 8. 6	21.11.51
Reduction au centre de la Terre.	23.58.49	23.58.59	23.59.27
Équation du temps.	11.56.31	11.56.31	11.56.31
Temps moyen pour le centre de la Terre.	8.30.50	8.30.48	8.30.41

Ainsi le second contact interne a eu lieu pour le centre de la Terre à $8^h30^m46^s$, temps moyen de Paris.

Dans la comparaison suivante de ces observations avec les Tables, les positions de Mercure et du Soleil sont rapportées au centre de la Terre :

	Premier contact.	Deuxième contact.
Longitude géocentrique de Mercure.	43° 53′ 6″,4	43° 44′ 50″,0
Latitude géocentrique de Mercure.	13. 11,6	9.20,2
Longitude du Soleil.	43.44. 29,0	43.57.25,8
Latitude du Soleil.	0,3	0,3
Distance c des centres.	943,1	
Erreur tabulaire τ.	$51^s,4$	$54^s,0$

Entrée. . . . $\delta v - 1,54\,\delta\lambda + 2,21\,\delta c - 5'',3 = 0;$

Sortie . . . . $\delta v + 0,73\,\delta\lambda - 1,54\,\delta c - 3'',8 = 0.$

Ces deux équations fournissent la suivante

$$\delta v = 4'',4 + 0,11\,\delta\lambda - 0,13\,\delta c.$$

Passage du 12 novembre 1782.

54. Il a été vu complétement à Paris. Les discordances qui existent entre les instants donnés par les différents astronomes, pour une même phase, sont très-propres à montrer combien on doit quelquefois avoir une juste défiance des observations isolées. Voici les données de l'observation du premier et du second contact internes, en temps vrai de l'Observatoire de Paris :

	1^{er} contact interne.	2^e contact interne.	
Lalande.	$15^{h}4^{m}57^{s}$		
Messier.	15 4.38		
Marie.	15.4.38		
Le Gentil. . . .	15.4.24	$16^{h}18^{m}\ 7^{s}$	
Cassini (fils). . .	15.4.21	16.17.18	
Dagelet.	15.2.32	16.16. 2	
Méchain.	15.2. 8	16.17.46	Méchain dit que l'incertitude de son observation de la sortie est de 5 secondes au plus.
Le Monnier. . .	15.1.48		
Cagnoli.	15.0.21	16.16.24	

Ainsi, les observations du premier contact interne, par Lalande et Cagnoli, diffèrent entre elles de $4^{m}\,36^{s}$, ce qui correspond à une variation de $35'',6$ dans la longitude héliocentrique. Les observations du second contact interne, par Le Gentil et Dagelet, diffèrent entre elles de $2^{m}\,5^{s}$, ce qui correspond à une variation de $85'',4$ dans la longitude héliocentrique.

Hâtons-nous de dire qu'il s'en faut de beaucoup qu'on ait souvent de pareilles incertitudes à redouter. L'inégalité des résultats vient ici de ce que, Mercure n'ayant décrit qu'une très-petite corde du disque solaire, la projection du mouvement relatif de la planète sur le rayon du Soleil, passant au point de contact, était très-peu sensible. De plus, le Soleil était très-bas sur l'horizon, surtout à l'instant de la sortie ; l'ondulation et la dentelure de son bord étaient extrêmes.

On peut cependant, avec quelques précautions, déduire de ce passage de 1782 de bons résultats. Nous allons le comparer aux Tables, en choisissant les quatre observations de Le Gentil, Cassini, Dagelet et Méchain, qui ont l'avantage d'être complètes. La moyenne de ces quatre observations est de $15^h 3^m 21^s$ pour l'entrée, de $16^h 17^m 23^s$ pour la sortie; et en y ajoutant l'équation du temps $11^h 44^m 30^s$, nous trouvons successivement :

	Premier contact.	Deuxieme contact.
Temps moyen	$14^h 47^m 51^s,0$	$16^h 1^m 53^s,0$
Longitude géocentrique l de Mercure	$230° 29' 52'',8$	$230° 25' 40'',6$
Latitude géocentrique s de Mercure	$14.\ 52'',4$	$15.\ 56'',1$
Longitude ⊙ du Soleil	$230.23.\ 58'',2$	$230.27.\ 3'',0$
Latitude σ du Soleil	$-\ 8'',5$	$-\ 8'',4$
Distance c des centres	$963'',9$	
Erreur tabulaire τ	$199^s,2$	$-188^s,0$

$$\text{Entrée.....}\quad \delta\nu = 0,129\,\tau + 2,70\,\delta\lambda - 6,01\,\delta c,$$
$$\text{Sortie.....}\quad \delta\nu = 0,683\,\tau - 15,05\,\delta\lambda + 32,73\,\delta c.$$

Nous ne pouvons pas, d'après ce que nous avons vu plus haut, nous flatter de connaître τ fort exactement, ni pour l'entrée, ni pour la sortie. Il y a peu d'inconvénients pour l'entrée, à cause du petit facteur 0,129 qui multiplie cette correction du temps. Mais il en est autrement dans l'équation donnée par l'observation de la sortie : on voit que 30 secondes d'erreur sur l'instant de l'observation correspondraient à 21 secondes de longitude géocentrique. Par cette raison, avant d'employer la seconde équation de 1782, avec celles fournies par les autres passages, nous diviserons tous ses termes par quatre. Mettant d'ailleurs pour τ sa valeur, nous aurons les deux conditions :

$$\text{Entree.......}\quad \delta\nu - 2,70\,\delta\lambda + 6,01\,\delta c - 25'',6 = 0.$$
$$\text{Sortie.......}\quad \tfrac{1}{4}\,\delta\nu + 3,76\,\delta\lambda - 8,18\,\delta c + 32'',1 = 0.$$

On déduit d'ailleurs de ces deux équations

$$\delta\nu = 1'',9 - 0,04\,\delta\lambda - 0,05\,\delta c.$$

Passage du 9 *novembre* 1769.

55. L'entrée a été observée à Philadelphie et à Norriton. Nous ramènerons toutes les observations au méridien de Norriton, qui est de 52 secondes à l'ouest de celui de Philadelphie, et nous trouverons pour l'instant de la phase apparente, déduit de six observations :

Smith	$14^{h}36^{m}35^{s}$
Lukens	$14.36.33$
Rittenhouse	$14.36.35$
Williamson	$14.36.38$
Shippen	$14.36.48$
Evans	$14.36.46$
Ewing	$14.36.38$

Moyenne des observations	$14^{h}36^{m}39$
Longitude de Norriton	$5.10.55$
Équation du temps	$11.44.12$
Temps moyen de la phase	$19.31.46$

La latitude de Norriton étant d'ailleurs de 40° 10′ nord, nous aurons successivement :

Longitude géocentrique l de Mercure	$227°59'\ 7'',2$
Latitude géocentrique s de Mercure	$5.14'',4$
Longitude $\odot$ du Soleil	$227.43.54'',2$
Latitude σ du Soleil	$-\ 7'',6$
Distance c des centres	$963'',7$
Erreur tabulaire τ	$54^{s},7$

$$\delta v - 0{,}35\,\delta\lambda + 2{,}28\,\delta c - 11'',0 = 0.$$

Passage du 7 novembre 1756.

56. L'observation en a été faite complétement, à Pékin, par les PP. Gaubil et Amiot, dans le palais de l'empereur, résidence des jésuites français. Leurs résultats me paraissant défectueux et inconciliables avec ceux qu'on déduit des autres passages, je transcris d'abord leur observation complète, en temps vrai du méridien de Pékin.

	Mercure à moitié entré.	Premier contact interne.	Deuxième contact interne.	Sortie totale
Amiot	$9^{h}31^{m}12^{s}$		$14^{h}54^{m}20^{s}$	$14^{h}56^{m}\ 4^{s}$
Gaubil	$9.30.51$	$9^{h}31^{m}54^{s},5$	$14.54.25$	$14.56.31$

La longitude de Pékin étant de $7^{h}\,36^{m}\,34^{s}$ à l'est de Paris, l'équation du temps étant de $11^{h}\,43^{m}\,59^{s},3$, le premier contact interne a donc été observé à $1^{h}\,39^{m}\,19^{s},8$ de temps moyen, et le second contact interne a $7^{h}\,1^{m}\,47^{s},8$.

La latitude de Pékin étant d'ailleurs de 39° 54′ nord, je déduis des données précédentes :

	Premier contact.	Deuxième contact.
Longitude géocentrique l de Mercure.	225°23′ 7″,2	225° 5′ 3″,6
Latitude géocentrique s de Mercure.	—3. 7″,7	1.26″,1
Longitude ⊙ du Soleil.	225.7 24″,9	225.20.50″,4
Latitude σ du Soleil.	— 5″,8	—8″,7
Distance c des centres.	962″,9	
Erreur tabulaire τ.	—31ˢ,9	118ˢ,0

La correction de la latitude, que nous reconnaîtrons plus tard être toujours fort petite, ne peut avoir ici aucune influence ni sur l'entrée ni sur la sortie; ce qui tient à ce que la latitude de Mercure est très-faible en ces deux instants. Nous aurons donc simplement les deux relations

$$\text{Entrée.....}\quad \delta v = -\ 6'',9 - 2,21\ \delta c,$$

$$\text{Sortie......}\quad \delta v = \quad 24'',9 + 2,15\ \delta c.$$

On en déduit $\delta c = -\ 7'',3$; et, comme nous avons déjà diminué le demi-diamètre du Soleil de 3″,6, il en résulte que, pour accorder entre elles les observations de l'entrée et de la sortie, il faudrait diminuer le diamètre entier du Soleil de 21″,8. C'est un résultat évidemment faux et dont je ne puis accuser que les observations; puisque de l'Isle, qui s'est tant occupé de cette matière, trouvait aussi que, pour les accorder, il faudrait diminuer le diamètre du Soleil de 20 secondes.

Ajoutons à cela que les autres passages, comme nous le verrons plus tard, s'accordent à indiquer que la diminution de 3″,6, sur le demi-diamètre du Soleil, est déjà beaucoup trop forte; et nous ne pourrons douter que dans les observations précédentes il ne se soit glissé quelque erreur. L'instant du second contact, donné par les deux observateurs, mérite plus de confiance sans doute; et effectivement, il s'accorde assez bien avec les passages de 1736 et 1743 observés à Paris. Je me suis toutefois décidé à ne faire aucun usage de cette observation. Il n'y aurait eu, il est vrai, aucun inconvénient à employer l'observation de la sortie, en rejetant celle de l'entrée; mais on n'y aurait non plus rien gagné. Il serait en outre peu logique de choisir un nombre parmi des résultats défectueux, par cette considération qu'il s'accorde avec d'autres données que nous possédons déjà, et de prétendre ainsi ajouter à la certitude de ces dernières. N'aurait-on pas un peu suivi cette marche à l'égard des observations de Tcheou-koung, dont on a déduit la variation de l'obliquité de l'écliptique?

Passage du 6 *mai* 1753.

57. La sortie a été observée à Paris. Voici l'instant du second contact interne et les résultats qu'on en déduit :

Le Gentil	$10^h\,18^m 47^s$		
De l'Isle	10.18.45	Moyenne des trois observations	$10^h\,18^m 46^s,7$
Bouguer	10.18.48	Équation du temps	11.56.17,4
		Temps moyen de la phase	10.15. 4,1

Longitude géocentrique l de Mercure	$45^\circ 42'$ $0'',9$
Latitude géocentrique s de Mercure	$-$ 5. $16'',7$
Longitude ⊙ du Soleil	45.56. $44'',8$
Latitude σ du Soleil	$-$ $5'',4$
Distance c des centres	$942'',5$
Erreur tabulaire τ	$81^s,9$

$$\delta v - 0,35\ \delta\lambda - 1,31\ \delta c - 7'',1 = 0.$$

Les Tables de Mercure qu'on possédait à cette époque différaient énormément entre elles sur l'instant de l'entrée, celles de Lahire l'indiquant pour le 5 mai au soir, et celles de Halley pour le 6 mai à $6^h 30^m$ du matin. Elle eut réellement lieu le 6 mai, sur les $2^h 30^m$ du matin. Ces grandes erreurs provenaient du trop petit nombre d'observations que les auteurs avaient employées à la construction de leurs Tables.

Passage du 5 *novembre* 1743.

58. Il a été observé complétement à Paris. Voici les données de l'observation, en réduisant au méridien de Paris l'observation de Cassini, qui fut faite à Thury, 6^s à l'occident de Paris :

	1^{er} contact interne.	2^e contact interne.
La Caille	$8^h 40^m 38^s$	$13^h 10^m 3^s$
Maraldi.	8.40.46	13.10.17
Cassini.	8.40.43	13.10.38
Cassini (fils). . . .	8.40.34	13.10.26
Moyenne des quatre obs.	8.40.40,2	13.10.21,0
Équation du temps. . . .	11.43.52,0	11.43.52,4
Temps moyen.	$8^h 24^m 32^s,2$	$12^h 54^m 13^s,4$

La discussion de ces observations m'a fourni les résultats suivants :

	Premier contact.	Deuxième contact.
Longitude géocentrique l de Mercure. . .	222° 44′ 37″,3	222° 29′ 36″,6
Latitude géocentrique s de Mercure. . .	— 11′ 2″,3	— 7′ 11″,7
Longitude ⊙ du Soleil.	222.32.39″,9	222.43.52″,8
Latitude σ du Soleil.	— 5″,5	— 7″,9
Distance c des centres.	962″,3	
Erreur tabulaire τ.	$127^s,8$	$85^s,6$

Entrée. . . . . $\delta v + 0{,}93\,\delta\lambda + 2{,}92\,\delta c - 30'',2 = 0,$

Sortie. . . . . $\delta v - 0{,}49\,\delta\lambda - 2{,}39\,\delta c - 16'',7 = 0;$

et de la combinaison de ces deux équations on déduit la suivante, propre à donner la correction de la longitude :

$$\delta v = 22'',5 - 0{,}13\,\delta\lambda + 0{,}12\,\delta c.$$

Passage du 2 mai 1740.

59. L'entrée a été observée à Cambridge, État du Massachussetts, par Wintrop. Cet observateur rend compte de ses résultats, ainsi qu'il suit, dans les *Philosophical Transactions*, n° 471, tome XLII :

« At $4^h 54^m 59^s$ I perceived that Mercury had made an Impression
» on the Sun's limb, by the Quantity of wich I concludet that almost
» one quarter of his Diameter might be entered. » (Un nuage se montre

ensuite sur le Soleil, pendant trois minutes, disparaît, et l'auteur continue ainsi) : « I continued to see him (Mercury) till $5^h\ 0^m\ 40^s$ at wich time
» he seemed to be gotten almost wholly within the Sun ; for he ap-
» peared now very near round, though I could not yet discern the
» Sun's light behind him. By the shaking of the Tube, I unfortunately
» missed the moment of his interior contact with the Sun's limb ; but
» am certain it could be but very little later than this ; for I presently
» after saw him fairly within the Sun. »

Cette relation m'a inspiré, je l'avoue, peu de confiance. L'instant décisif de l'observation est manqué par accident. J'ai craint que les autres parties ne fussent également peu soignées, et j'ai préféré ne faire aucun usage de ce passage.

Passage du 11 *novembre* 1736.

60. C'est le premier qui ait été observé complétement à Paris. Je prends les observations de Maraldi et de Cassini de Thury.

	1^{er} contact interne.	2^e contact interne.
Maraldi.	$9^h\ 35^m\ 15^s$	$12^h\ 15^m\ 5^s$
Cassini de Thury. .	9.35. 10	12.15. 18
Moyenne des observations.	9.35. 12,5	12 15. 11,5
Équation du temps. . . .	11.44. 24,2	11.44. 24,2
Temps moyen.	$9^h\ 19^m\ 36^s,7$	$11^h\ 59^m\ 35^s,7$

On trouve par la discussion de ces observations :

$$\text{Entrée. . . .}\ \delta\nu - 1,32\,\delta\lambda + 3,58\,\delta c - 30'',4 = 0,$$

$$\text{Sortie. . . .}\ \delta\nu + 2,61\,\delta\lambda - 6,07\,\delta c - 13'',9 = 0;$$

équations qui s'accordent parfaitement avec celles du passage de 1743. On en déduit :

$$\delta\nu = 24'',5 - 0,11\,\delta\lambda - 0,11\,\delta c.$$

Quelques astronomes ont encore observé ce passage à la chambre obscure. Leurs résultats sont de nature à ôter tout crédit à une observation isolée, faite par ce procédé. Les durées du passage, observées par quatre astronomes différents, varient depuis $2^h\,37^m\,32^s$ jusqu'à $2^h\,43^m\,53^s$: c'est-à-dire qu'il y a plus de six minutes de différence entre les résultats extrêmes. Or, chaque minute de temps équivaut à $17'',7$ de degré en longitude héliocentrique à l'instant de l'entrée, et à $10'',3$ à l'instant de la sortie. Dans les passages de mai, le mouvement relatif est plus lent, et l'erreur du temps a moins d'influence ; mais, d'un autre côté, l'observation est plus difficile, les chances de l'erreur sur le temps variant en raison inverse du mouvement relatif : l'erreur en longitude doit donc être à peu près la même dans tous les cas.

Dans les passages de 1736 et de 1743, les astronomes ont pris, par un grand nombre de mesures micrométriques, la position relative de Mercure pendant qu'il passait sur le Soleil. Si l'on consulte les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour ces deux années, on verra que les résultats qu'on a déduits de ces mesures, relativement à l'instant de la conjonction, sont très-différents entre eux. Ils laisseraient, dans la longitude héliocentrique, des incertitudes bien supérieures aux petites erreurs dont sont susceptibles les observations de l'entrée et de la sortie, faites dans ces deux dernières années. C'est ce qui m'a déterminé à ne faire usage que des observations des contacts dans mes équations de condition.

Passage du 9 *novembre* 1723.

61. L'entrée a été observée à Paris. Voici les données et le calcul de cette observation :

	1^er^ contact.
Maraldi. .	$14^h\,51^m\,48^s$
Cassini.. .	$14.\,51.\,48$

Moyenne des deux observations. . . .	$14^h\,51^m\,48^s,0$
Équation du temps..	$11.\,44.\;\;7,6$
Temps moyen de la phase.	$14^h\,35^m\,55^s,6$

Longitude géocentrique l de Mercure.	$226^\circ\,56'\,20'',4$
Latitude géocentrique s de Mercure.	$3.\,24'',7$
Longitude $\odot$ du Soleil.	$226.\,40.\,21'',6$
Latitude σ du Soleil.	$-\,9'',2$
Distance c des centres.	$963'',3$
Erreur tabulaire τ.	$207^s,2$

$$\delta v - 0,23\,\delta\lambda + 2,21\,\delta c - 42'',2 = 0.$$

Passage du 6 *mai* 1707.

62. Les Tables de Mercure, par Lahire, se trouvaient d'accord, en 1701 et 1705, avec des observations méridiennes. Suivant l'observation méridienne du 12 avril 1707, elles étaient encore exactes. Lahire se croyait donc certain d'avoir prédit juste, en annonçant, pour le 5 mai, un passage de Mercure sur le Soleil, *visible à Paris*. Le 5 mai, cependant, le Soleil fut visible toute la journée, depuis son lever jusqu'à son coucher, et l'on n'aperçut aucune trace du passage annoncé. Il n'eut effectivement lieu que dans la nuit suivante, et la fin fut entrevue à Copenhague par Rœmer, le 6 mai au matin. Les nuages empêchèrent Rœmer de prendre aucune mesure exacte.

Passage du 3 *novembre* 1697.

63. La sortie a été observée à Paris par Cassini, et à Nuremberg par Wurtzelbaur. Mais ce dernier astronome s'étant servi de la chambre obscure, je ne ferai usage que de l'observation de Cassini, rapportée en ces termes :

« Horâ $8^h\,8^m\,38^s$, margo præcedens Mercurii pervenit ad Solis mar-
» ginem præcedentem. »

L'équation du temps étant de $11^h\,43^m\,52^s{,}6$, le second contact interne a donc eu lieu à $7^h\,52^m\,30^s{,}6$ de temps moyen, et on en déduit

Longitude géocentrique l de Mercure. . . .	$221^\circ\,27'\,24'',9$
Latitude géocentrique s de Mercure.	$-\,9.\;\,5'',6$
Longitude $\odot$ du Soleil.	$221.40.\,19'',4$
Latitude σ du Soleil.	$-\,6'',9$
Distance c des centres.	$962'',3$
Erreur tabulaire τ.	$262^s,1$

$$\delta v - 0{,}67\,\delta\lambda - 2{,}58\,\delta c - 49'',2 = 0.$$

Passage du 10 *novembre* 1690.

64. L'observation de la sortie a été faite à Nuremberg par Wurtzelbaur, qui en rend compte en ces termes, dans les *Transactions philosophiques* de 1693 :

« Tubum illò ubi emersio Solis è nubibus expectanda erat direxi

» et postquàm emergens ejùs discus ad Tabulam observatoriam af-
» fluxerat...... (ainsi Wurtzelbaur observait sur l'image du Soleil).
» Tandem cùm limbi mutuo contactu se stringerent.... et postquàm
» limbus uterque ad minutum ferè sibi invicem adhæsitare viderentur,
» H. 8 min. 36. oscillatorii nostri, Mercurius totus disco exiisse ob-
» servatus est. »

Suivent des observations de Pégase et d'Andromède, et des hauteurs du Soleil pour avoir le temps de l'horloge.

La sortie a encore été observée à Erfurth, à Canton, à Tchaotcheou. Mais toutes ces observations m'ont peu satisfait, et je ne les ai pas calculées.

Passage du 7 novembre 1677.

65. Cette époque commençant à s'éloigner de nous, j'avais craint que les Tables du Soleil ne fussent plus suffisamment exactes, et je ne fis pas entrer ce passage dans mes équations de condition. Toutefois, comme il a été observé à Sainte-Hélène par Halley, je n'ai pas laissé de le calculer, afin de voir comment j'y satisferais au moyen de mes éléments rectifiés : on verra plus loin que la concordance est parfaite. Ce passage a encore été observé à Avignon, par Gallet; mais il a employé la chambre obscure, et je ne ferai pas usage de ses résultats.

Des observations du premier et du second contact internes, il résulte que le milieu du passage a été vu par Halley à $12^h\ 3^m\ 50^s$, temps vrai de son observatoire, c'est-à-dire à $12^h\ 20^m\ 9^s$, temps moyen de l'Observatoire de Paris. En comparant ces résultats avec les Tables provisoires, on trouve, pour la correction de la longitude héliocentrique :

$$\delta v = 69'',9.$$

Passage du 3 mai 1661.

66. Quoiqu'il n'ait été observé qu'à la chambre obscure, par Hevelius, la supériorité du talent d'observation de cet illustre astronome nous fait un devoir de calculer ses résultats. Nous les comparerons à nos Tables rectifiées, mais sans les faire entrer dans les équations de condition.

Hevelius nous a laissé les mesures de sept distances de Mercure à l'extrémité de la corde qu'il parcourut sur le Soleil, ce qui, avec les temps correspondants, équivaut à sept observations du milieu du passage. La première observation diffère de la moyenne des six autres de plus de 5^{m} de temps. Nous la laisserons de côté, et nous aurons ainsi :

Milieu du passage, temps vrai de Dantzick. . . .	$18^{h}\ 7^{m}\ 3^{s},7$
Équation du temps.	11. 56. 24,4
Longitude ouest de Dantzick.	22. 54. 43,0
Temps moyen du milieu du passage.	$16^{h}\ 58^{m}\ 11^{s},1$

En comparant ce moment à celui qu'on déduirait des Tables provisoires, j'ai trouvé, pour la correction de la longitude héliocentrique :

$$\delta v = 42'',5 + 0,18\ \delta\lambda.$$

Passage du 3 *novembre* 1651.

67. Il n'a été vu qu'imparfaitement, à Surate, dans les Indes, par Skakerlœus.

Passage du 7 *novembre* 1631.

68. C'est le premier passage de Mercure sur le Soleil, qui ait été observé. Gassendi ne nous a laissé aucune autre détermination que l'instant de la sortie, pris à la chambre obscure. Comme on ne peut répondre de l'exactitude de cette observation, je ne l'ai pas calculée.

§ X.

Equations de condition, déduites des passages de Mercure sur le Soleil, entre les corrections des éléments elliptiques, du diamètre du Soleil et de la masse de Vénus.

69. Il faudra, pour obtenir ces équations, remplacer, dans les expressions de la correction δv, déduites soit de l'observation de l'entrée, soit de celle de la sortie, δv et $\delta\lambda$ par leurs valeurs n^os^ **41** et **46**.

De plus, la constante ϖ de la longitude du périhélie devra être remplacée par $\varpi + 2'',81.t\mu'$; et la constante θ de la longitude du nœud devra être remplacée par $\theta - 4'',09.t\mu'$.

On aura ainsi les équations suivantes, dans lesquelles celles qui proviennent de l'observation de l'entrée sont marquées par la lettre E, celles qui proviennent de l'observation de la sortie étant indiquées par la lettre S.

Années.

$$1697.\quad \text{S.}\ \left\{\begin{array}{l} -\ 138{,}75\,\delta n + 1{,}36\,\delta\varepsilon - 1{,}06\,\delta e - 0{,}440\,\delta\varpi + 0{,}03\,\delta\varphi \\ \qquad + 0{,}082\,\delta\theta - 2{,}58\,\delta c + 160{,}6\,\mu' - 49''{,}2 \end{array}\right\} = 0$$

$$1723.\quad \text{E.}\ \left\{\begin{array}{l} -\ 110{,}52\,\delta n + 1{,}45\,\delta\varepsilon - 1{,}00\,\delta e - 0{,}480\,\delta\varpi - 0{,}00\,\delta\varphi \\ \qquad + 0{,}028\,\delta\theta + 2{,}21\,\delta c + 111{,}4\,\mu' - 42''{,}2 \end{array}\right\} = 0$$

$$1736.\quad \left\{\begin{array}{l} \text{E.}\ \left\{\begin{array}{l} -\ 79{,}69\,\delta n + 1{,}26\,\delta\varepsilon - 0{,}78\,\delta e - 0{,}423\,\delta\varpi - 0{,}09\,\delta\varphi \\ \qquad + 0{,}161\,\delta\theta + 3{,}58\,\delta c + 116{,}6\,\mu' - 30''{,}4 \end{array}\right\} = 0 \\ \text{S.}\ \left\{\begin{array}{l} -\ 125{,}60\,\delta n + 1{,}99\,\delta\varepsilon - 1{,}20\,\delta e - 0{,}670\,\delta\varpi + 0{,}21\,\delta\varphi \\ \qquad - 0{,}320\,\delta\theta - 6{,}07\,\delta c + 36{,}2\,\mu' - 13''{,}9 \end{array}\right\} = 0 \end{array}\right.$$

$$1743.\quad \left\{\begin{array}{l} \text{E.}\ \left\{\begin{array}{l} -\ 92{,}35\,\delta n + 1{,}65\,\delta\varepsilon - 1{,}30\,\delta e - 0{,}531\,\delta\varpi - 0{,}05\,\delta\varphi \\ \qquad - 0{,}114\,\delta\theta + 2{,}92\,\delta c + 57{,}6\,\mu' - 30''{,}2 \end{array}\right\} = 0 \\ \text{S.}\ \left\{\begin{array}{l} -\ 78{,}13\,\delta n + 1{,}39\,\delta\varepsilon - 1{,}07\,\delta e - 0{,}451\,\delta\varpi + 0{,}02\,\delta\varphi \\ \qquad + 0{,}060\,\delta\theta - 2{,}39\,\delta c + 84{,}9\,\mu' - 16''{,}7 \end{array}\right\} = 0 \end{array}\right.$$

$$1753.\quad \text{S.}\ \left\{\begin{array}{l} -\ 34{,}60\,\delta n + 0{,}74\,\delta\varepsilon + 0{,}92\,\delta e + 0{,}300\,\delta\varpi + 0{,}01\,\delta\varphi \\ \qquad - 0{,}043\,\delta\theta - 1{,}31\,\delta c - 47{,}5\,\mu' - 7''{,}1 \end{array}\right\} = 0$$

$$1769.\quad \text{E.}\ \left\{\begin{array}{l} -\ 43{,}12\,\delta n + 1{,}43\,\delta\varepsilon - 0{,}97\,\delta e - 0{,}474\,\delta\varpi - 0{,}01\,\delta\varphi \\ \qquad + 0{,}043\,\delta\theta + 2{,}28\,\delta c + 45{,}5\,\mu' - 11''{,}0 \end{array}\right\} = 0$$

$$1782\quad \left\{\begin{array}{l} \text{E.}\ \left\{\begin{array}{l} -\ 17{,}29\,\delta n + 1{,}01\,\delta\varepsilon - 0{,}61\,\delta e - 0{,}339\,\delta\varpi - 0{,}21\,\delta\varphi \\ \qquad + 0{,}330\,\delta\theta + 6{,}01\,\delta c + 39{,}5\,\mu' - 25''{,}6 \end{array}\right\} = 0 \\ \text{S.}\ \left\{\begin{array}{l} -\ 18{,}35\,\delta n + 1{,}07\,\delta\varepsilon - 0{,}64\,\delta c - 0{,}360\,\delta\varpi + 0{,}32\,\delta\varphi \\ \qquad - 0{,}460\,\delta\theta - 8{,}18\,\delta c - 14{,}9\,\mu' + 32''{,}1 \end{array}\right\} = 0 \end{array}\right.$$

$$1786.\quad \left\{\begin{array}{l} \text{E.}\ \left\{\begin{array}{l} -\ 11{,}69\,\delta n + 0{,}86\,\delta\varepsilon + 1{,}16\,\delta e + 0{,}329\,\delta\varpi - 0{,}06\,\delta\varphi \\ \qquad - 0{,}189\,\delta\theta + 2{,}21\,\delta c - 23{,}1\,\mu' - 5''{,}3 \end{array}\right\} = 0 \\ \text{S.}\ \left\{\begin{array}{l} -\ 8{,}91\,\delta n + 0{,}66\,\delta\varepsilon + 0{,}87\,\delta c + 0{,}255\,\delta\varpi + 0{,}02\,\delta\varphi \\ \qquad + 0{,}090\,\delta\theta - 1{,}54\,\delta c - 4{,}7\,\mu' - 3''{,}8 \end{array}\right\} = 0 \end{array}\right.$$

$$1789.\quad \left\{\begin{array}{l} \text{E.}\ \left\{\begin{array}{l} -\ 16{,}31\,\delta n + 1{,}61\,\delta\varepsilon - 1{,}27\,\delta e - 0{,}519\,\delta\varpi - 0{,}03\,\delta\varphi \\ \qquad - 0{,}088\,\delta\theta + 2{,}64\,\delta c + 11{,}2\,\mu' + 7''{,}4 \end{array}\right\} = 0 \\ \text{S.}\ \left\{\begin{array}{l} -\ 14{,}42\,\delta n + 1{,}42\,\delta\varepsilon - 1{,}08\,\delta e - 0{,}463\,\delta\varpi - 0{,}01\,\delta\varphi \\ \qquad + 0{,}041\,\delta\theta - 2{,}27\,\delta c + 14{,}9\,\mu' + 11''{,}4 \end{array}\right\} = 0 \end{array}\right.$$

$$1799.\quad \left\{\begin{array}{l} \text{E.}\ \left\{\begin{array}{l} -\ 0{,}46\,\delta n + 0{,}70\,\delta\varepsilon + 0{,}87\,\delta e + 0{,}280\,\delta\varpi - 0{,}00\,\delta\varphi \\ \qquad + 0{,}024\,\delta\theta + 1{,}25\,\delta c - 0{,}5\,\mu' - 4''{,}9 \end{array}\right\} = 0 \\ \text{S.}\ \left\{\begin{array}{l} -\ 0{,}50\,\delta n + 0{,}77\,\delta\varepsilon + 0{,}93\,\delta e + 0{,}311\,\delta\varpi + 0{,}02\,\delta\varphi \\ \qquad - 0{,}076\,\delta\theta - 1{,}44\,\delta c - 0{,}8\,\mu' - 0''{,}9 \end{array}\right\} = 0 \end{array}\right.$$

$$1802\quad \text{S.}\ \left\{\begin{array}{l} 4{,}38\,\delta n + 1{,}53\,\delta\varepsilon - 1{,}07\,\delta e - 0{,}506\,\delta\varpi + 0{,}00\,\delta\varphi \\ \qquad - 0{,}026\,\delta\theta - 2{,}20\,\delta c - 3{,}8\,\mu' + 22''{,}0 \end{array}\right\} = 0$$

$$1832\quad \left\{\begin{array}{l} \text{E.}\ \left\{\begin{array}{l} 25{,}79\,\delta n + 0{,}80\,\delta\varepsilon + 1{,}07\,\delta e + 0{,}309\,\delta\varpi - 0{,}03\,\delta\varphi \\ \qquad - 0{,}106\,\delta\theta + 1{,}63\,\delta c + 42{,}1\,\mu' + 1''{,}9 \end{array}\right\} = 0 \\ \text{S.}\ \left\{\begin{array}{l} 22{,}20\,\delta n + 0{,}69\,\delta\varepsilon + 0{,}90\,\delta e + 0{,}268\,\delta\varpi + 0{,}01\,\delta\varphi \\ \qquad + 0{,}045\,\delta\theta - 1{,}30\,\delta c + 18{,}4\,\mu' + 4''{,}4 \end{array}\right\} = 0 \end{array}\right.$$

§ XI.

Détermination des nouveaux éléments de l'orbite de Mercure, du diamètre du Soleil et de la masse de Vénus.

70. J'ai traité par la méthode des moindres carrés le système des équations, n° **45**, et celui des équations, n° **47**, en multipliant chaque équation par le coefficient de l'inconnue qu'on considère, et par le nombre des observations qui sont entrées dans la détermination de la constante de cette équation. Aux équations résultantes, j'ai ajouté celles qu'on déduit des équations fournies par les passages, et traitées par la même méthode. Réduisant enfin à l'unité le coefficient de chaque inconnue, dans l'équation qui lui correspond, j'ai obtenu les huit équations suivantes entre les huit corrections cherchées δn, $\delta\varepsilon$, δe. $\delta\varpi$. $\delta\varphi$, $\delta\theta$. μ' et δc :

$$\begin{aligned}
\delta n &= -\ 0'',3310 + 0,0086\,\delta\varepsilon - 0,0094\,\delta e - 0,00354\,\delta\varpi + 0,0002\,\delta\varphi \\
&\qquad - 0,00025\,\delta\theta - 0,0056\,\delta c + 0,693\,\mu', \\
\delta\varepsilon &= -\ 0'',488 + 15,990\,\delta n + 0,182\,\delta e + 0,204\,\delta\varpi - 0,006\,\delta\varphi \\
&\qquad + 0,019\,\delta\theta + 0,177\,\delta c - 20,546\,\mu', \\
\delta e &= -\ 4'',622 - 11,153\,\delta n + 0,121\,\delta\varepsilon - 0,107\,\delta\varpi + 0,003\,\delta\varphi \\
&\qquad - 0,001\,\delta\theta - 0,067\,\delta c + 9,336\,\mu', \\
\delta\varpi &= 4'',824 - 61,152\,\delta n + 1,760\,\delta\varepsilon - 1,560\,\delta e + 0,025\,\delta\varphi \\
&\qquad - 0,027\,\delta\theta - 0,553\,\delta c + 61,956\,\mu', \\
\delta\varphi &= -\ 2'',438 + 0,820\,\delta n - 0,010\,\delta\varepsilon + 0,011\,\delta e + 0,005\,\delta\varpi \\
&\qquad + 0,028\,\delta\theta + 0,214\,\delta c + 0,399\,\mu', \\
\delta\theta &= 38'',670 - 18,451\,\delta n + 0,706\,\delta\varepsilon - 0,075\,\delta e - 0,100\,\delta\varpi \\
&\qquad + 0,688\,\delta\varphi - 5,867\,\delta c - 38,807\,\mu', \\
\delta c &= 2'',424 - 2,362\,\delta n + 0,041\,\delta\varepsilon - 0,018\,\delta e - 0,011\,\delta\varpi \\
&\qquad + 0,028\,\delta\varphi - 0,032\,\delta\theta - 2,320\,\mu', \\
\mu' &= 0,2886 + 0,8212\,\delta n - 0,0126\,\delta\varepsilon + 0,0093\,\delta e + 0,00429\,\delta\varpi \\
&\qquad + 0,0002\,\delta\varphi - 0,00063\,\delta\theta - 0,0072\,\delta c.
\end{aligned}$$

Ces équations fournissent, pour les valeurs des inconnues qu'elles renferment :

$$\begin{aligned}
\delta n &= -\ 0'',424, \\
\delta\varepsilon &= -\ 0'',36, \\
\delta c &= -\ 3'',63,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\varpi &= 35'',78, \\ \delta\varphi &= -1'',30, \\ \delta\theta &= 28'',70, \\ \delta c &= 2'',06, \\ \mu' &= 0,031. \end{aligned}$$

71. La correction $\mu' = 0,031$ nous donne pour la masse de Vénus :

$$m' = \frac{1}{390000}.$$

La différence de cette masse avec celle déterminée par Burckardt ne produit en cent ans que 8'',7 sur la longitude du périhélie de Mercure ; quantité dont je ne crois pas qu'on puisse répondre d'une manière absolue par les observations. La théorie de Mercure conduit donc à une masse de Vénus, très-peu différente de celle qu'a donnée la variation de l'obliquité de l'écliptique ; et c'est un résultat dont on a lieu d'être satisfait.

72. Une correction de 0'',424 par année, sur le moyen mouvement, et dont l'effet doit aller en s'accumulant, est sans doute considérable ; mais, sans elle, il est impossible de représenter simultanément les anciennes observations et les nouvelles. J'ajouterai même que la discussion des 397 observations méridiennes que j'ai empruntées aux registres de l'Observatoire de Paris, depuis 1801 jusqu'en 1842, m'avait fourni à elle seule une diminution plus considérable.

Nous avons donc, pour l'expression du moyen mouvement, en $365^j,25$, et à partir de l'équinoxe mobile, en vertu de la précession,

$$49^s\,24^\circ\,44'\,26'',441.$$

En retranchant du moyen mouvement la précession annuelle 50'',223, on aura le moyen mouvement sidéral

$$n = 5\,381\,016'',218;$$

d'où l'on déduira, conformément au n° **27**, la valeur suivante du demi-grand axe,

$$a = 0,387\,098\,4.$$

73. La longitude de l'époque, rapportée au minuit qui sépare le 31 décembre 1799 du 1^{er} janvier 1800, temps moyen de l'Observatoire de Paris, sera

$$\varepsilon = 3^s\,20^\circ\,13'\,17'',84.$$

74. L'expression $\delta e = -3'',63$ donne, pour le rapport de l'arc correspondant au rayon, $-0,000\,017\,6$; en sorte que l'excentricité au 1er janvier 1800 était égale à

$$e = 0,205\,600\,3.$$

75. La longitude ϖ du périhélie, au 1er janvier 1800, était, suivant nos déterminations,

$$\varpi = 2^s\,14^\circ\,20'\,41'',6.$$

La correction 35″,8 que j'ai apportée à cet élément est assez considérable, eu égard à la grande excentricité de l'orbite. Il en peut résulter près de 20 secondes de variation sur la longitude héliocentrique.

Afin de m'assurer que les corrections que je viens d'indiquer étaient exactes, et ne seraient guère différentes si l'on employait un plus grand nombre d'observations, j'ai séparé mes observations méridiennes en deux groupes, composés d'un nombre égal d'observations prises au hasard, et j'ai cherché les corrections qui seraient données par chacun de ces groupes en particulier. Elles se sont trouvées à peu près les mêmes. Puis, en réunissant toutes les équations avec celles déduites de la considération des passages de Mercure sur le Soleil, j'ai déduit une troisième détermination, encore très-voisine des deux premières. Je dois donc supposer que cette moyenne, à laquelle je me suis arrêté, est fort exacte.

76. Voici les expressions de l'inclinaison de l'orbite et de la longitude du nœud, pour le 1er janvier 1800 :

$$\varphi = 7^\circ\ 0'\ 4'',60,$$
$$\theta = 1^s\,15^\circ\,57'\,37'',70.$$

Diamètre du Soleil.

77. Les passages de Mercure sur le Soleil fournissent, par la comparaison de l'entrée avec la sortie, un moyen précis d'obtenir le véritable diamètre du Soleil, pourvu que celui de la planète soit connu avec exactitude. On se rappellera que nous avons employé le demi-diamètre solaire des Tables de Delambre, diminué de 3″,6, le demi-diamètre de Mercure étant supposé de 3″,25 à la distance moyenne. Et nous avons reconnu, par la valeur trouvée pour δc, qu'avec ces hypothèses, la diminution de 3″,6 était trop forte et devait être réduite à 1″,54.

Je supposerai ici le demi-diamètre de Mercure égal à 3″,34 à la distance moyenne, nombre qui me paraît exact. D'une part, suivant les idées qu'on s'est faites de l'irradiation, le diamètre de Mercure, obtenu par des mesures micrométriques, lorsque cette planète se projette sur le Soleil, devrait être trop petit du double de l'irradiation. Mais, d'un autre côté, en suivant ces mêmes idées, on reconnaît que le demi-diamètre, déduit du temps écoulé entre les seconds contacts interne et externe, doit être indépendant de l'irradiation. Ce dernier procédé est d'ailleurs fort exact, puisque les deux derniers contacts s'observent avec précision; et le résultat qu'il fournit s'accorde parfaitement avec les mesures micrométriques. C'est un premier fait difficile à concilier avec l'hypothèse de l'irradiation.

Les passages de Mercure conduisent tous à peu près au même diamètre du Soleil, à l'exception de celui du 6 novembre 1756; mais, si je ne me trompe, il n'en peut surgir aucune difficulté, l'exagération du résultat étant plus que suffisante pour le faire rejeter sans scrupule, ainsi que je l'ai expliqué dans la discussion de ce passage, nº 36.

L'emploi des autres passages m'a conduit à la détermination d'un demi-diamètre que je regarde comme très-précis; car, en laissant de côté un ou deux passages, les autres conduisent toujours sensiblement au même résultat. Voici ce demi-diamètre, réduit à la distance moyenne, et comparé à ceux de Short, de Lalande et des *Éphémérides de Berlin* :

Demi-diamètre du Soleil suivant Short.	15′ 59″,86
Demi-diamètre du Soleil déduit des passages de Mercure. . .	16. 0″,01
Demi-diamètre du Soleil suivant les *Éphémérides de Berlin*.	16. 0″,93
Demi-diamètre du Soleil suivant Lalande.	16. 1″,36

L'observation de Short était, je crois, fort bonne, et c'est celle dont je me rapproche le plus. Mon résultat servira, je l'espère, à éclaircir les doutes qui pourraient rester sur l'influence de l'irradiation dans les éclipses de Soleil, irradiation dont on a au moins fort exagéré les effets.

De l'introduction de nouvelles observations dans les équations de condition du n° **70**

78. Les équations de condition sur lesquelles j'ai basé la rectification des éléments de l'orbite de Mercure s'appuient sur un assez grand nombre d'observations anciennes et modernes, et les représentent toutes assez parfaitement pour qu'il me paraisse inutile de rien changer à ces équations sous ce rapport; mais la perfection progressive des Tables, à laquelle on ne doit jamais renoncer, exigera que de temps à autre on apporte à ces équations les modifications qui seront indiquées par les observations postérieures à 1842. Ces changements se feront aisément, en comparant les observations à des éphémérides, supposées construites sur les nouvelles Tables.

Appelons $\delta' n$, $\delta' \varepsilon$, $\delta' e$, ... les corrections à introduire dans les nouveaux éléments. Les équations de condition, déduites des nouvelles observations comparées avec mes Tables, renfermeront ces quantités comme inconnues. Ce sont ces équations qu'il s'agit de joindre aux équations du n° **70**.

Remplaçons dans ces dernières δn, $\delta \varepsilon$, ... respectivement par

$$\delta n + \delta' n, \quad \delta \varepsilon + \delta' \varepsilon, \ldots.$$

En vertu de la première détermination, les termes en δn, $\delta \varepsilon$, ... détruiront les constantes des équations : en sorte qu'on pourra, dans ces équations, remplacer δn, $\delta \varepsilon$, ..., par $\delta' n$, $\delta' \varepsilon$, ..., pourvu qu'on y efface les constantes.

De plus, dans le n° **70**, j'ai réduit à l'unité le coefficient de δn dans l'équation qui est relative à cette correction, en divisant par 86225 l'équation telle qu'elle était fournie par la méthode des moindres carrés. Il faudra diviser par le même nombre l'équation en $\delta' n$, fournie par les nouvelles observations, avant de l'ajouter à la première des équations du n° **70**.

Il faudra diviser de même les équations correspondantes aux autres inconnues par les nombres suivants :

L'équation correspondante à $\delta'\varepsilon$ par 45
L'équation correspondante à $\delta'e$ par 70
L'équation correspondante à $\delta'\varpi$ par 5,03
L'équation correspondante à $\delta'\varphi$ par 25,5
L'équation correspondante à $\delta'\theta$ par 1,18
L'équation correspondante à $\delta'c$ par 213
L'équation correspondante à $\delta'\mu'$ par 72795

J'espere avoir le loisir de faire connaître les corrections que les observations postérieures au 18 juillet 1842 apporteront annuellement aux équations du n° **70**, et de maintenir ainsi la théorie de Mercure toujours appuyée sur les observations les plus récentes.

79. *Comparaison de la longitude héliocentrique de Mercure, calculée par les nouvelles Tables, aux instants des passages sur le Soleil, avec celle qu'on a déduite de l'observation.*

DATES.	PHASES CALCULÉES.	ERREURS TABULAIRES AVEC LES ÉLÉMENTS	
		provisoires.	rectifiés.
1832	Entrée et sortie..	3″4	— 0″1
1802	Sortie.	23,3	0,0
1799	Entrée et sortie.	— 3,3	3,4
1789	Entrée et sortie.	9,7	2,3
1786	Entrée et sortie.	— 4,4	5,1
1782	Entrée..	— 25,6	— 5,2
1782	Sortie.	32,1	— 2,0
1769	Entrée..	— 11,0	0,7
1753	Sortie.	— 7,1	9,3
1743	Entrée et sortie..	— 23,5	0,9
1736	Entrée et sortie.	— 22,2	2,2
1723	Entrée..	— 42,2	— 0,6
1697	Sortie.	— 49,2	— 0,8
1677	Entrée et sortie.	— 69,9	— 1,7
1661	Milieu du passage.	— 42,5	2,6

Je dois ajouter, pour l'intelligence de ce tableau, que la comparaison qu'il renferme a été obtenue au moyen des équations de condition, en faisant porter toutes les erreurs sur la longitude de la planète, et en supposant la latitude exacte. L'observation de 1782, qui donnait ainsi deux erreurs si différentes l'une de l'autre, par le calcul de l'entrée et par celui de la sortie, faits au moyen des anciennes Tables, fournit, avec les nouveaux éléments, des résultats concordants. Cette observation est très-propre à montrer la nécessité des corrections que j'ai apportées à la position du nœud de Mercure, et au diamètre du Soleil.

Dans la colonne des erreurs qui subsistent avec l'emploi de mes éléments, il n'y en a pas une seule qu'on ne puisse rejeter tout entière sur l'incertitude des Tables du Soleil. Je dois donc penser que cette nouvelle détermination des éléments de l'orbite elliptique de Mercure, et de ses perturbations périodiques et séculaires, donne à la théorie de cette planète le degré de précision qu'on peut attendre de l'état actuel de la Mécanique céleste, et de la perfection des observations modernes. Il me restait, pour remplir ma tâche jusqu'au bout, à donner des Tables numériques, au moyen desquelles on pût introduire dans la construction des éphémérides journalières les améliorations dont je viens de rendre compte : c'est ce que j'ai fait.

J'ai présenté ces Tables au Bureau des Longitudes, en demandant à cette illustre assemblée qu'elle voulût bien les publier sous ses auspices. Si ma demande est accueillie, je rendrai compte, dans un préambule, des dispositions particulières par lesquelles j'ai singulièrement abrégé le calcul du lieu héliocentrique.

* * *

Sur la loi de la pesanteur à la surface ellipsoïdale d'équilibre d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation;

PAR J. LIOUVILLE.

Nous admettons bien entendu que les molécules du liquide s'attirent en raison inverse du carré des distances. Ainsi les ellipsoïdes de révolution ou à trois axes dont nous parlons sont ceux de Maclaurin et de M. Jacobi. Or, si l'on prend

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k'^2} + \frac{z^2}{k''^2} = 1$$

pour l'équation d'un quelconque de ces ellipsoïdes, le premier membre exprimera, comme on sait, à un facteur constant près, ce que M. Jacobi nomme la *fonction des forces*, c'est-à-dire la fonction dont les dérivées partielles donnent les composantes des forces agissant sur chaque point. La pesanteur au point (x, y, z) de la surface est, par suite, proportionnelle à

$$\sqrt{\frac{x^2}{k^4} + \frac{y^2}{k'^4} + \frac{z^2}{k''^4}}.$$

Donc *la pesanteur varie à la surface de chaque ellipsoïde en raison inverse de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent à l'ellipsoïde au point dont on s'occupe.* Si l'on mène en ce point une normale terminée à un quelconque des plans principaux de l'ellipsoïde, on pourra énoncer le théorème d'une autre manière; car *l'intensité de la pesanteur est directement proportionnelle à la longueur de cette normale.*

NOTE

SUR LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DE LA DOUBLE RÉFRACTION;

Par M. H. SÉNARMONT,

Ingenieur des Mines.

Depuis que le génie de Fresnel a créé l'admirable théorie de la double réfraction, M. Hamilton a déduit des conséquences nouvelles et singulières de la forme de l'onde lumineuse dans les milieux biréfringents; et l'expérience, d'accord avec ces épreuves délicates et décisives, est venue confirmer les idées de Fresnel d'une manière aussi complete qu'inattendue.

Fresnel avait laissé imparfaites les démonstrations de plusieurs résultats auxquels il avait été conduit par une sorte de divination. M. Hamilton les a complétées par une analyse savante [*], et M. Plücker les a rattachées très-simplement aux propriétés des surfaces réciproques [**]. On peut aussi retrouver tous les résultats connus, sans recourir à aucune théorie géométrique particulière, et en s'écartant à peine de la marche que Fresnel avait adoptée.

On se contentera, dans ce qui va suivre, d'établir les principes et les conséquences de la théorie de Fresnel, à peu près dans l'ordre qu'il a suivi lui-même : on ne s'arrêtera pas d'ailleurs à l'interprétation physique de chaque résultat géométrique; et, tout en empruntant le langage de l'optique, on supprimera les développements qui ne seraient pas ici à leur place

---

[*] *Transactions of the royal irish Academy*, LXX vol.

[**] Journal de M. Crelle, tome XIX.

§ Ier.

Lorsqu'une onde plane se propage dans un milieu élastique quelconque, on peut toujours déterminer dans le plan de cette onde deux droites telles, que si la direction du mouvement vibratoire coïncide avec l'une ou avec l'autre, les forces élastiques mises en jeu ont une résultante comprise dans le plan qui contient déjà le mouvement vibratoire lui-même et la normale au plan de l'onde.

On désignera par a^2, b^2, c^2 les élasticités suivant trois axes d'élasticité principaux, par α, β, γ les angles que fait avec ces axes la direction d'un mouvement vibratoire quelconque. On démontre d'ailleurs que la résultante des forces élastiques développées a pour composantes, suivant les trois axes, des quantités proportionnelles à

$$a^2 \cos\alpha, \qquad b^2 \cos\beta, \qquad c^2 \cos\gamma;$$

de sorte que la projection de cette résultante sur la direction du mouvement vibratoire lui-même est proportionnelle à

$$(1) \qquad r^2 = a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma.$$

Si le mouvement vibratoire se trouve compris dans le plan d'une onde perpendiculaire à la droite qui fait avec les axes des angles l, m, n, on a la condition

$$(2) \qquad \cos\alpha \cos l + \cos\beta \cos m + \cos\gamma \cos n = 0;$$

enfin, pour que la direction du mouvement vibratoire, la résultante des réactions élastiques mises en jeu, et la normale au plan de l'onde, soient comprises dans le même plan, il faut qu'elles puissent être toutes trois perpendiculaires à une même droite qui fera des angles convenables u, v, w avec les trois axes, de sorte que l'on a les trois conditions

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos\alpha \cos u + \cos\beta \cos v + \cos\gamma \cos w &= 0, \\ a^2 \cos\alpha \cos u + b^2 \cos\beta \cos v + c^2 \cos\gamma \cos w &= 0, \\ \cos l \cos u + \cos m \cos v + \cos n \cos w &= 0, \end{aligned} \right.$$

desquelles on tire successivement

$$\frac{\cos u}{\left(\frac{b^2-c^2}{\cos\alpha}\right)} = \frac{\cos v}{\left(\frac{c^2-a^2}{\cos\beta}\right)} = \frac{\text{sco}\ w}{\left(\frac{a^2-b^2}{\cos\gamma}\right)},$$

$$\frac{\cos l}{\cos\alpha}(b^2-c^2) + \frac{\cos m}{\cos\beta}(c^2-a^2) + \frac{\cos n}{\cos\gamma}(a^2-b^2) = 0.$$

L'équation (2) peut être mise sous la forme

$$\frac{\cos l}{\cos\alpha}\cos^2\alpha + \frac{\cos m}{\cos\beta}\cos^2\beta + \frac{\cos n}{\cos\gamma}\cos^2\gamma = 0,$$

et l'on arrive enfin à

$$\frac{\left(\frac{\cos l}{\cos\alpha}\right)}{(b^2-a^2)\cos^2\beta + (c^2-a^2)\cos^2\gamma} = \frac{\left(\frac{\cos m}{\cos\beta}\right)}{(a^2-b^2)\cos^2\alpha + (c^2-b^2)\cos^2\gamma}$$
$$= \frac{\left(\frac{\cos n}{\cos\gamma}\right)}{(a^2-c^2)\cos^2\alpha + (b^2-c^2)\cos^2\beta}.$$

L'expression (1) peut prendre les trois formes,

$$r^2 - a^2 = (b^2-a^2)\cos^2\beta + (c^2-a^2)\cos^2\gamma,$$
$$r^2 - b^2 = (a^2-b^2)\cos^2\alpha + (c^2-b^2)\cos^2\gamma,$$
$$r^2 - c^2 = (a^2-c^2)\cos^2\alpha + (b^2-c^2)\cos^2\beta;$$

donc

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{\left(\frac{\cos l}{r^2-a^2}\right)}{\cos\alpha} = \frac{\left(\frac{\cos m}{r^2-b^2}\right)}{\cos\beta} = \frac{\left(\frac{\cos n}{r^2-c^2}\right)}{\cos\beta} \\ & = \sqrt{\frac{\cos^2 l}{(r^2-a^2)^2} + \frac{\cos^2 m}{(r^2-b^2)^2} + \frac{\cos^2 n}{(r^2-c^2)^2}} \\ & = \frac{\frac{\cos^2 l}{r^2-a^2} + \frac{\cos^2 m}{r^2-b^2} + \frac{\cos^2 n}{r^2-c}}{\cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n}. \end{aligned}\right.$$

A cause de l'équation (2), le dénominateur de la dernière fraction est nul; il faut donc que le numérateur soit égal à zéro :

$$(5)\quad \frac{\cos^2 l}{r^2-a^2} + \frac{\cos^2 m}{r^2-b^2} + \frac{\cos^2 n}{r^2-c^2} = 0.$$

Cette dernière équation fournit généralement deux valeurs de r^2, auxquelles correspondent deux systèmes de valeurs pour α, β, γ.

L'équation (5) représente la surface d'élasticité, dont les rayons vecteurs sont proportionnels aux vitesses avec lesquelles se propageraient, suivant leur direction, des ondes planes qui leur seraient perpendiculaires, et dont les vibrations auraient la direction déterminée par l'un ou l'autre système de valeurs de α, β, γ.

§ II.

Les directions déterminées par les deux systèmes de valeurs de α, β, γ, sont rectangulaires entre elles.

Soient r'^2, r''^2 les deux racines conjuguées de l'équation (5), α', β', γ', α'', β'', γ'' les valeurs correspondantes de α, β, γ :

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\left(\dfrac{\cos l}{r'^2 - a^2}\right)}{\cos\alpha'} &= \frac{\left(\dfrac{\cos m}{r'^2 - b^2}\right)}{\cos\beta'} = \frac{\left(\dfrac{\cos n}{r'^2 - c^2}\right)}{\cos\gamma'}\\ \frac{\left(\dfrac{\cos l}{r''^2 - a^2}\right)}{\cos\alpha''} &= \frac{\left(\dfrac{\cos m}{r''^2 - b^2}\right)}{\cos\beta''} = \frac{\left(\dfrac{\cos n}{r''^2 - c^2}\right)}{\cos\gamma''}.\end{aligned}\right.$$

En multipliant ces équations membre à membre, on a

$$\frac{\left[\dfrac{\cos^2 l}{(r'^2 - a^2)(r''^2 - a^2)}\right]}{\cos\alpha'\cos\alpha''} = \frac{\left[\dfrac{\cos^2 m}{(r'^2 - b^2)(r'^2 - b^2)}\right]}{\cos\beta'\cos\beta''} = \frac{\left[\dfrac{\cos^2 n}{(r'^2 - c^2)(r''^2 - c^2)}\right]}{\cos\gamma'\cos\gamma''}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos^2 l}{(r'^2 - a^2)(r''^2 - a^2)} + \dfrac{\cos^2 m}{(r'^2 - b^2)(r''^2 - b^2)} + \dfrac{\cos^2 n}{(r'^2 - c^2)(r''^2 - c^2)}}{\cos\alpha'\cos\alpha'' + \cos\beta'\cos\beta'' + \cos\gamma'\cos\gamma''}.$$

Mais de l'équation (5) on tire facilement

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} (r'^2 - a^2)(r''^2 - a^2) &= (a^2 - b^2)(a^2 - c^2)\cos^2 l,\\ (r'^2 - b^2)(r''^2 - b^2) &= (b^2 - a^2)(b^2 - c^2)\cos^2 m,\\ (r'^2 - c^2)(r''^2 - c^2) &= (c^2 - a^2)(c^2 - b^2)\cos^2 n;\end{aligned}\right.$$

et comme, après substitution, le numérateur de la dernière fraction se réduit identiquement à zéro, son dénominateur est nécessairement nul.

§ III.

Dans tout milieu élastique il existe deux directions suivant lesquelles les deux vitesses de propagation des ondes planes deviennent égales. Ces vitesses correspondent d'ailleurs à des directions quelconques du mouvement vibratoire dans le plan de l'onde.

Soit

$$a > b > c.$$

L'équation (5) peut se mettre sous la forme

$$(r^2 - b^2)^2 + (r^2 - b^2)[\cos^2 m(2b^2 - a^2 - c^2) + \cos^2 l(b^2 - c^2) + \cos^2 n(b^2 - a^2)] \\ + (b^2 - a^2)(b^2 - c^2)\cos^2 m.$$

Si l'on exprime la condition des racines égales,

$$o = [\cos^2 m(2b^2 - a^2 - c^2) + \cos^2 l(b^2 - c^2) + \cos^2 n(b^2 - a^2)]^2 \\ + 4(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)\cos^2 m,$$

les deux termes sont essentiellement positifs; il faut donc qu'on ait

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{c} \cos^2 m = o, \quad \cos^2 l = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad \cos^2 n = \dfrac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}. \\ r^2 = b^2. \end{array} \right.$$

Si l'on porte ces valeurs dans les équations (4), les valeurs de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, se présentent sous la forme $\frac{o}{o}$ et demeurent indéterminées.

Les deux directions déterminées par les équations (8) sont les axes optiques.

§ IV.

Si l'on définit la normale à une onde plane quelconque par ses distances angulaires aux deux axes optiques, les deux vitesses de propagation correspondantes pourront s'exprimer simplement en fonction des nouvelles coordonnées.

Soient t_0, t_1, les angles que fait la normale avec les deux axes optiques; on a

$$\sqrt{a^2 - c^2} \cos t_0 = \sqrt{a^2 - b^2} \cos l + \sqrt{(b^2 - c^2)} \cos n,$$
$$\sqrt{(a^2 - c^2)} \cos t_1 = \sqrt{(a^2 - b^2)} \cos l - \sqrt{(b^2 - c^2)} \cos n;$$

donc

$$\cos l = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} \left(\frac{\cos t_0 + \cos t_1}{2}\right),$$
$$\cos n = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{\sqrt{(b^2 - c^2)}} \left(\frac{\cos t_0 - \cos t_1}{2}\right).$$

Par ce changement de coordonnées l'équation (5) prend la forme

$$r^4 - r^2[a^2 + c^2 - (a^2 - c^2) \cos t_0 \cos t_1] + \frac{4a^2c^2 + (a^2 - c^2)[a^2(\cos t_0 + \cos t_1)^2 - c^2(\cos t_0 - \cos t_1)^2]}{4};$$

d'où

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{a^2 - c^2}{2}(\cos t_0 \cos t_1 \pm \sin t_0 \sin t_1) \\ &= \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{a^2 - c^2}{2} \cos(t_0 \mp t_1) \\ &= a^2 \sin\left(\frac{t_0 \mp t_1}{2}\right) + c^2 \cos\left(\frac{t_0 \mp t_1}{2}\right). \end{aligned}$$

§ V.

Les plans qui contiennent une droite quelconque, et les deux directions des mouvements vibratoires des ondes planes normales à cette droite, partagent en deux parties égales les angles dièdres compris entre les plans qui passent par la même droite et par les axes optiques.

Les directions des mouvements vibratoires et la normale aux ondes planes correspondantes sont trois droites perpendiculaires entre elles. On peut donc les prendre pour axes coordonnés.

Pour changer de coordonnées angulaires, soient f'_0, f'_1, f''_0, f''_1, les angles que les directions des deux vibrations font avec les axes optiques;

$$\frac{\cos f'_0}{\cos f'_1} = \frac{\cos \alpha' \sqrt{(a^2 - b^2)} + \cos \gamma' \sqrt{(b^2 - c^2)}}{\cos \alpha' \sqrt{(a^2 - b^2)} - \cos \gamma' \sqrt{(b^2 - c^2)}},$$
$$\frac{\cos f''_0}{\cos f''_1} = \frac{\cos \alpha'' \sqrt{(a^2 - b^2)} + \cos \gamma'' \sqrt{(b^2 - c^2)}}{\cos \alpha'' \sqrt{(a^2 - b^2)} + \cos \gamma'' \sqrt{(b^2 - c^2)}}.$$

Si l'on élimine α', γ', α'', γ'', au moyen des équations (6), on a

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\cos f'_0}{\cos f'_1} &= \frac{\cos l\,(r'^2 - c^2)\sqrt{(a^2 - b^2)} + \cos n\,(r'^2 - a^2)\sqrt{(b^2 - c^2)}}{\cos l\,(r'^2 - c^2)\sqrt{(a^2 - b^2)} - \cos n\,(r'^2 - c^2)\sqrt{(b^2 - c^2)}},\\ \frac{\cos f''_0}{\cos f''_1} &= \frac{\cos l\,(r''^2 - c^2)\sqrt{(a^2 - b^2)} + \cos n\,(r''^2 - a^2)\sqrt{(b^2 - c^2)}}{\cos l\,(r''^2 - c^2)\sqrt{(a^2 - b^2)} - \cos n\,(r''^2 - c^2)\sqrt{(b^2 - c^2)}}.\end{aligned}\right.$$

Mais des équations (7) l'on tire

$$\frac{(r'^2 - a^2)\sqrt{(b^2 - c^2)}\cos n}{(r''^2 - a^2)\sqrt{(a^2 - b^2)}\cos l} = \frac{(r'^2 - c^2)\sqrt{(a^2 - b^2)}\cos l}{(r'^2 - a^2)\sqrt{(b^2 - c^2)}\cos n};$$

donc

$$\frac{\cos f'_0}{\cos f'_1} = -\frac{\cos f''_0}{\cos f''_1}.$$

Les projections des axes optiques sur un plan parallèle au plan de l'onde font donc des angles égaux avec les nouveaux axes, ou, en d'autres termes, avec les directions des deux vibrations rectangulaires.

§ VI.

La surface représentée par l'équation (7) est susceptible d'une construction géométrique très-simple.

Si l'on coupe l'ellipsoïde

$$\frac{1}{R^2} = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma$$

par un plan quelconque passant par son centre, et si l'on porte sur la perpendiculaire à ce plan des longueurs inversement proportionnelles aux diamètres maximum et minimum de l'ellipse ainsi déterminée, les deux points que l'on obtient de cette manière appartiennent à la surface.

La longueur d'un rayon vecteur quelconque est donnée par les équations

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

$$\frac{1}{R^2} = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma;$$

si le rayon est compris dans un plan perpendiculaire à la droite qui fait des angles l, m, n avec les axes,

$$\cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n = 0\,;$$

si ce rayon doit être maximum ou minimum,

$$\begin{gathered}\cos\alpha\, d\cos\alpha + \cos\beta\, d\cos\beta + \cos\gamma\, d\cos\gamma = 0,\\ a^2\cos\alpha\, d\cos\alpha + b^2\cos\beta\, d\cos\beta + c^2\cos\gamma\, d\cos\gamma = 0,\\ \cos l\, d\cos\alpha + \cos m\, d\cos\beta + \cos n\, d\cos\gamma = 0.\end{gathered}$$

Si l'on compare maintenant ces équations à celles qui ont fourni l'équation (5), on voit qu'elle ne diffère que par la notation des quantités à éliminer et par la substitution de $\frac{1}{R^2}$ à r^2. Il est d'ailleurs évident que les axes de l'ellipse coïncident en direction avec les deux vibrations rectangulaires.

On verra facilement que la proposition du § V résulte immédiatement de cette construction géométrique.

§ VII.

Détermination de la surface d'une onde élémentaire.

Si l'on désigne par ρ, $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ des coordonnées polaires variables, l'équation d'une onde plane qui a passé par l'origine sera, au bout de l'unité de temps,

$$\cos\lambda\cos l + \cos\mu\cos m + \cos\nu\cos n = \frac{r}{\rho} = \cos\varepsilon\,; \tag{10}$$

et les constantes l, m, n, r doivent satisfaire aux deux conditions

$$\frac{\cos^2 l}{r^2 - a^2} + \frac{\cos^2 m}{a - b} + \frac{\cos^2 n}{r^2 - c^2} = 0. \tag{5}$$

$$\cos^2 l + \cos^2 m + \cos^2 n = 1.$$

La surface d'une onde élémentaire est tangente à toutes les ondes planes qui ont passé en même temps par l'origine ; elle enveloppe donc toutes les positions du plan (10), quand l, m, n, r varient. Cette surface enveloppe se déterminera de la manière suivante :

On a d'abord

$$\cos\lambda + \cos\nu \frac{d\cos n}{d\cos l} = \frac{dr}{\rho\, d\cos l},$$

$$\cos l + \cos n \frac{d\cos n}{d\cos l} = 0.$$

$$\frac{\cos l}{r^2 - a^2} + \frac{\cos n}{r^2 - c^2}\,\frac{d\cos n}{d\cos l} = \left[\frac{\cos^2 l}{(r^2 - a^2)^2} + \frac{\cos^2 m}{(r^2 - b^2)^2} + \frac{\cos^2 n}{(r^2 - c^2)^2}\right]\frac{rdr}{d\cos l};$$

$$\cos\mu + \cos\nu \frac{d\cos n}{d\cos m} = \frac{dr}{\rho\, d\cos m},$$

$$\cos m + \cos n \frac{d\cos n}{d\cos m} = 0,$$

$$\frac{\cos m}{r^2 - b^2} + \frac{\cos n}{r^2 - c^2}\,\frac{d\cos n}{d\cos m} = \left[\frac{\cos^2 l}{(r^2 - a^2)^2} + \frac{\cos^2 m}{(r^2 - b^2)^2} + \frac{\cos^2 n}{(r^2 - c^2)^2}\right]\frac{rdr}{d\cos m}.$$

Si l'on élimine les coefficients différentiels au moyen des coefficients arbitraires V, W, V′, W′, on trouve facilement

$$V = V', \qquad W = W',$$

et l'on arrive aux équations

$$\cos\lambda = V\cos l + W\frac{\cos l}{r^2 - a^2},$$

$$\cos\mu = V\cos m + W\frac{\cos m}{r^2 - b^2},$$

$$\cos\nu = V\cos n + W\frac{\cos n}{r^2 - c^2},$$

$$\frac{1}{\rho} = Vr\left[\frac{\cos^2 l}{(r^2 - a^2)^2} + \frac{\cos^2 m}{(r^2 - b^2)^2} + \frac{\cos^2 n}{(r^2 - c^2)^2}\right].$$

Si l'on ajoute membre à membre les trois premières équations multipliées respectivement par $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$, on a, à cause des équations (10) et (5),

$$V = \frac{1}{\rho}.$$

Si on les ajoute après les avoir élevées au carré, on a, à cause de l'équation (5) et de la relation précédente,

$$W = \frac{r}{\rho}(\rho^2 - r^2),$$

et, si l'on reporte ces valeurs dans les équations ci-dessus,

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\rho\cos\lambda = r\cos l + r\frac{\rho^2 - r^2}{r^2 - a^2}\cos l = r\frac{\rho^2 - a^2}{r^2 - a^2}\cos l = r\cos l + \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - a^2}\rho\cos\lambda.\\ &\rho\cos\mu = r\cos m + r\frac{\rho^2 - r^2}{r^2 - b^2}\cos m = r\frac{\rho^2 - b^2}{r^2 - a^2}\cos m = r\cos m + \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - b^2}\rho\cos\mu.\\ &\rho\cos\nu = r\cos n + r\frac{\rho^2 - r^2}{r^2 - c^2}\cos n = r\frac{\rho^2 - c^2}{r^2 - a^2}\cos n = r\cos n + \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - c^2}\rho\cos\nu,\\ &\qquad\frac{\cos^2 l}{(r^2 - a^2)^2} + \frac{\cos^2 m}{(r^2 - b^2)^2} + \frac{\cos^2 n}{(r^2 - c^2)^2} = \frac{1}{r^2(\rho^2 - r^2)}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on ajoute les trois premières équations sous leur dernière forme, après les avoir multipliées respectivement par $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, on a, à cause de l'équation (10),

$$(12)\qquad \frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\lambda}{\rho^2 - a^2} + \frac{\cos^2\mu}{\rho^2 - b^2} + \frac{\cos^2\nu}{\rho^2 - c^2};$$

cette équation appartient à la surface de l'onde. Si on la retranche de l'identité

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\lambda}{\rho^2} + \frac{\cos^2\mu}{\rho^2} + \frac{\cos^2\nu}{\rho^2},$$

elle prend la nouvelle forme

$$(13)\qquad \frac{a^2\cos^2\lambda}{\rho^2 - a^2} + \frac{b^2\cos^2\mu}{\rho^2 - b^2} + \frac{c^2\cos^2\nu}{\rho^2 - c^2} = 0.$$

§ VIII.

Si dans l'équation (5) on remplaçait r^2, a^2, b^2, c^2, $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$, par $\frac{1}{\rho^2}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$, $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, on retomberait sur l'équation (13). Il suffit donc de faire le même changement dans toutes les équations qui dérivent de l'équation (5), pour avoir des relations analogues entre

$$\rho,\ \lambda,\ \mu,\ \nu.$$

Ainsi les directions déterminées par

$$\cos^2\mu = 0,\quad \cos^2\lambda = \frac{c^2(a^2 - b^2)}{b^2(a^2 - c^2)},\quad \cos^2\nu = \frac{a^2(b^2 - c^2)}{b^2(a^2 - c^2)},$$
$$\rho^2 = b^2,$$

correspondent à des racines égales de l'équation (13), et si l'on rapporte à ces deux droites la position d'un rayon quelconque, en appelant θ_0, θ_1 les nouvelles coordonnées angulaires, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} &= \frac{a^2+c^2}{2a^2c^2} + \frac{a^2-c^2}{2a^2c^2}(\cos\theta_0\cos\theta_1 \pm \sin\theta_0\sin\theta_1)\\ &= \frac{a^2+c^2}{2a^2c^2} + \frac{a^2-c^2}{2a^2c^2}\cos(\theta_0 \mp \theta_1)\\ &= \frac{1}{a^2}\sin\left(\frac{\theta_0\mp\theta_1}{2}\right) + \frac{1}{b^2}\cos\left(\frac{\theta_0\mp\theta_1}{2}\right).\end{aligned}$$

Enfin, si l'on coupe l'ellipsoïde

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{a^2}\cos^2\alpha + \frac{1}{b^2}\cos^2\beta + \frac{1}{c^2}\cos^2\gamma$$

par un plan perpendiculaire à la droite qui fait des angles λ, μ, ν, avec les axes, et si l'on porte sur cette droite des longueurs directement proportionnelles aux diamètres maximum et minimum de l'ellipse ainsi déterminée, les deux points que l'on obtient de cette manière appartiennent à la surface de l'onde.

§ IX.

A chaque direction d'un rayon de la surface (13) correspondent deux directions de vibrations.

Si l'on élimine l, m, n entre les équations (4) et (11),

$$(14)\qquad \frac{\left(\dfrac{\cos\lambda}{\rho^2-a^2}\right)}{\cos\alpha} = \frac{\left(\dfrac{\cos\mu}{\rho^2-b^2}\right)}{\cos\beta} = \frac{\left(\dfrac{\cos\nu}{\rho^2-c^2}\right)}{\cos\gamma} = \frac{1}{\rho\sqrt{\rho^2-r^2}};$$

à chaque valeur de ρ tirée de l'équation (13) correspond un système particulier de valeurs pour α, β, γ.

Les plans qui contiennent à la fois le rayon et la direction d'une des deux vibrations sont rectangulaires entre eux; ils partagent en deux parties égales les angles dièdres compris entre les plans qui passent tous deux par le rayon, et chacun par l'une des droites correspondantes à

$$\cos^2\mu = 0,\quad \cos^2\lambda = \frac{c^2(a^2-b^2)}{b^2(a^2-c^2)},\quad \cos^2\nu = \frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}.$$

Il suffit pour s'en assurer de chercher les angles que font avec les axes deux droites perpendiculaires, toutes deux au rayon, et chacune à l'une des vibrations. En reprenant ensuite la marche suivie au § II et au § V, on prouverait, absolument de la même manière, que ces deux droites sont perpendiculaires entre elles, et qu'elles partagent en deux parties égales les angles compris entre les deux traces déterminées sur leur plan, par des plans qui passent tous deux par le rayon et chacun par l'une des droites correspondantes aux racines égales de l'équation (13).

Il est d'ailleurs facile de voir que cette dernière propriété résulte de la construction de la surface de l'onde au moyen d'un ellipsoïde.

§ X.

La droite qui joint, dans le plan d'une onde, le pied de la normale à cette onde et l'extrémité du rayon correspondant détermine la direction de la vibration.

Des équations (14) on tire, en ayant égard à l'équation (12),

$$\cos\lambda\cos\alpha + \cos\mu\cos\beta + \cos\nu\cos\gamma = \sqrt{1 - \frac{r^2}{\rho^2}} = \sin\varepsilon.$$

L'angle compris entre le rayon et la normale est complément de l'angle compris entre le rayon et la vibration. Mais la vibration et la normale sont perpendiculaires entre elles : les trois droites sont donc dans un même plan.

§ XI.

Etant donnée la position de l'onde plane, en déduire celle du rayon correspondant.

Si l'on élimine ρ entre (11) et (13), et entre (10) et (13),

$$(15)\qquad \frac{a^2\cos\lambda\cos l}{r^2 - a^2} + \frac{b^2\cos\mu\cos m}{r^2 - b^2} + \frac{c^2\cos\nu\cos n}{r^2 - c^2} = 0;$$

$$(16)\qquad \frac{a^2\cos^2\lambda}{r^2 - a^2\cos^2\varepsilon} + \frac{b^2\cos^2\mu}{r^2 - b^2\cos^2\varepsilon} + \frac{c^2\cos^2\nu}{r^2 - c^2\cos^2\varepsilon} = 0.$$

Ces équations, qui représentent un plan passant par l'origine et un cone dont le sommet est à la même origine, répondent à la question. L'intersection du cône et de la surface de l'onde est déterminée par l'ensemble des équations (12) et (15).

§ XII.

Étant donnée la position du rayon, en déduire celle de l'onde plane correspondante.

Si l'on élimine r entre (11) et (5), et entre (10) et (5),

$$(17)\qquad \frac{\cos\lambda\cos l}{\rho^2 - a^2} + \frac{\cos\mu\cos m}{\rho^2 - b^2} + \frac{\cos\nu\cos n}{\rho^2 - c^2} = 0,$$

$$(18)\qquad \frac{\cos^2 l}{\rho^2\cos^2\varepsilon - a^2} + \frac{\cos^2 m}{\rho^2\cos^2\varepsilon - b^2} + \frac{\cos^2 n}{\rho^2\cos^2\varepsilon - c^2} = 0.$$

Ces équations, qui représentent un plan passant par l'origine et un cône dont le sommet est à la même origine, répondent à la question. L'intersection du cône et de la surface (5) est déterminée par l'ensemble des équations (5) et (10).

§ XIII.

Les problèmes des § XI et XII présentent chacun un cas particulier qui mérite d'être considéré.

Lorsque les constantes qui entrent dans les équations des plans sont telles que ces équations se réduisent identiquement à zéro, on n'a plus, pour répondre à chaque question, que l'équation des cônes; il faut donc nécessairement qu'une infinité de rayons, réfractés suivant les génératrices d'une surface conique, correspondent, dans certaines circonstances, à une onde plane unique, et qu'une infinité d'ondes planes, normales aux génératrices d'une surface conique, correspondent, dans certaines circonstances, à un rayon réfracté unique.

Ces deux cas particuliers vont être discutés successivement.

§ XIV.

Discussion du cas particulier du § XII.

L'équation (15) du plan se réduit identiquement à zéro quand

$$\cos m = 0, \quad r = b, \quad \cos^2 l = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad \cos^2 n = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2},$$

$$\rho \cos \varepsilon = b = \rho\left(\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} \cos \lambda \pm \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \cos \nu\right).$$

(Le double signe répond à une double surface conique. On ne conservera, pour la discussion, que le signe supérieur.)

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation (16) du cône, elle devient, après toutes réductions faites,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)} \cos^2 \lambda + \dfrac{c^2(a^2-b^2)}{b^2(a^2-c^2)} \cos^2 \nu + \cos^2 \mu. \\ \qquad - \dfrac{a^2+c^2}{a^2-c^2} \dfrac{\sqrt{(a^2-b^2)}\sqrt{(b^2-c^2)}}{b^2} \cos \lambda \cos \nu \end{array}\right\} = 0,$$

ou, en coordonnées rectangulaires,

$$\left(x\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}} - z\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\right)\left(x\frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}} - z\frac{c^2}{b^2}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\right) + y^2 = 0.$$

L'équation du plan de la base est, en coordonnées rectangulaires.

$$b = x\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} + z\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}},$$

et il est nécessairement tangent à la surface de l'onde, dans toute l'étendue du contour de cette base, puisque chaque génératrice est un rayon, et que chaque rayon est déterminé par un point de contact de l'onde plane correspondante. Si, dans l'équation du cône, on fait $y = 0$,

$$\frac{z}{x} = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}, \quad \frac{z}{x} = \frac{a^2}{c^2}\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

La première génératrice, qui se confond avec la normale à l'onde plane unique, est donc perpendiculaire à la base du cône. Si on la prend pour nouvel axe des X, l'équation du cône devient

$$\eta^2 + \zeta^2 - \zeta\xi \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}}{b^2};$$

et si l'on fait $\xi = b$, on a pour l'équation de la courbe de contact

$$\eta^2 + \zeta^2 - \zeta \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}}{b}.$$

A chaque rayon correspond une direction particulière de la vibration dans le plan de l'onde. On déterminera (§ X) cette direction en joignant dans le plan de la base du cône le pied d'une génératrice, ou, en d'autres termes, d'un rayon quelconque au pied de la normale à l'onde plane qui se confond avec la génératrice perpendiculaire à la base.

Après l'émergence, chaque rayon devient parallèle à la normale a l'onde plane unique extérieure correspondante à l'onde plane unique intérieure. La direction de cette onde extérieure se déduira facilement de la direction de l'onde intérieure par la loi des sinus.

L'indice de réfraction est évidemment égal à $\frac{b}{v}$, si l'on représente par v la vitesse de propagation dans le milieu extérieur.

Les rayons émergents forment, par conséquent, un cylindre du second degré.

§ XV.

Discussion du cas particulier du § XIII.

L'équation (17) du plan se réduit identiquement à zéro si l'on a

$$\cos\mu = 0, \quad \rho^2 = b^2, \quad \cos\lambda = \frac{c}{b^2}\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad \cos^2 v = \frac{a^2}{b^2}\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2},$$

$$\cos\varepsilon = \frac{r}{b} = \frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}\cos l \pm \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}\cos n.$$

On ne conservera, comme précédemment, que le signe supérieur. Il est facile de voir que, pour obtenir l'équation du cône, il suffit de changer a^2, b^2, c^2, λ, μ, ν, en $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$, l, m, n, dans les équations du § XIV.

L'équation du cône est donc

$$\left.\begin{array}{r}\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}\cos^2 l+\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}\cos^2 n+\cos^2 m\\ -\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}\frac{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}{ac}\cos l\cos n\end{array}\right\}=0,$$

ou, en coordonnées rectangulaires,

$$\left(x\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}-z\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\right)\left(x\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}-z\frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\right)+y^2=0;$$

et l'on prouverait, comme précédemment, que le plan perpendiculaire à la génératrice, qui se confond avec le rayon unique, coupe le cône suivant un cercle.

L'intersection du cône et de la surface (5) est donnée par l'ensemble des équations (5) et (10). La seconde représente une sphère qui passe par l'origine et dont le diamètre est b.

On peut mettre ces deux équations sous la forme

$$\frac{a^2-b^2}{r^2-a^2}\cos^2 l+\frac{c^2-b^2}{r^2-c^2}\cos^2 n+1=0,$$

$$\frac{c^2(a^2-b^2)}{a^2(r^2-c^2)}\cos^2 l+\frac{c^2-b^2}{r^2-c^2}\cos^2 n+2\frac{rc}{a^2}\frac{\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{a^2-c^2}}{r^2-c^2}+\frac{r^2(a^2-c^2)}{a^2(r^2-c^2)}=0.$$

Si on les retranche, on obtient l'équation d'une nouvelle sphere,

$$c(r^2-a^2)+r\cos l\sqrt{(a^2-b^2)}\sqrt{(a^2-c^2)}=0.$$

Si l'on retranche de nouveau les équations des sphères l'une de l'autre, après les avoir mises sous la forme convenable, on obtient l'équation du plan du cercle d'intersection,

$$r\left(a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos l+c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos n\right)-ac=0,$$

ou, en coordonnées rectangulaires,

$$xa\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}+zc\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}-ac=0.$$

Ce plan est perpendiculaire à la génératrice du cône diamétralement opposée au rayon unique; il détermine donc une section circulaire antiparallèle à la première.

Si l'on fait passer des plans par la génératrice qui se confond avec le rayon unique et par une génératrice quelconque, ces plans contiennent (§ X) la vibration correspondante à cette dernière, ou, pour mieux dire, à l'onde plane qui lui est perpendiculaire. Si l'un quelconque de ces plans est incliné sur la section méridienne du cône d'un angle δ, et si un second plan, qui passerait par la même génératrice et par l'axe du cône, est incliné sur la même section méridienne d'un angle τ, on trouve facilement

$$\operatorname{tang} \tau = \sqrt{1 + \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}{4a^2c^2}} \operatorname{tang} 2\delta;$$

mais, en général, $\frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}{4a^2c^2}$ est une quantité tres-petite qu'on peut négliger, et l'on a, à très-peu près,

$$\tau = 2\delta.$$

A chaque onde plane intérieure correspond, après l'émergence, une onde plane extérieure. Les normales aux premières formant un cône du second degré, les normales aux secondes en formeront un du quatrième. La face d'émergence est supposée perpendiculaire au rayon unique.

Chaque onde plane suit, en se réfractant, la loi des sinus, mais avec un indice différent pour chacune d'elles, la vitesse de propagation intérieure propre à chaque onde étant précisément égale aux longueurs des génératrices du cône interceptées par le plan antiparallèle à celui perpendiculaire au rayon unique.

Soient l'équation de ce plan antiparallèle et celle du cône rapportées au rayon unique comme nouvel axe des X,

$$\eta^2 + \zeta^2 + \xi\zeta\sqrt{\frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}{ac}} = 0,$$

$$\xi ac - \zeta\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)} - abc = 0.$$

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées courantes de la normale à une onde extérieure, correspondante à une onde intérieure, dont la normale perce le plan antiparallèle en ξ, η, ζ.

On a d'abord, entre ξ, η, ζ, les relations qui précèdent, et de plus, entre les mêmes quantités et x_0, y_0, z_0, les relations suivantes.

Les directions de propagation intérieure et extérieure, et la normale à la face d'émergence sont dans le même plan :

$$\frac{\eta}{y_0} = \frac{\zeta}{z_0}.$$

Le rapport des sinus est égal au rapport des vitesses intérieure et extérieure, ou, en désignant cette dernière par v,

$$\frac{\sqrt{\frac{\eta^2+\zeta^2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}}{\sqrt{\frac{y_0^2+z_0^2}{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}} = \frac{\sqrt{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}}{v}.$$

Si entre ces quatre équations on élimine ξ, η, ζ, on trouve, pour l'équation du cône émergent,

$$(y_0^2+z_0^2)^2 = \frac{v^2(a^2-b^2)(b^2-c^2)}{a^2b^2c^2} z_0^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2) = \mathrm{K}^2 z_0^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2\ ;$$

et l'on peut remarquer que l'intersection de ce cône et d'une sphere dont le centre serait à l'origine se projette sur le plan des xz suivant deux paraboles, sur le plan des yz, suivant deux cercles passant par l'origine.

On peut mettre l'équation du cône sous la forme suivante :

$$y_0^2 + z_0^2 = \pm \mathrm{K} z_0 x_0 \left[1 + \mathrm{K}\frac{z_0}{x_0}\sqrt{\left(1+\frac{y_0^2+z_0^2}{x_0^2}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

k est généralement une quantité assez petite pour qu'on puisse négliger ses puissances supérieures; l'équation devient alors

$$y_0^2 + z_0^2 \pm \mathrm{K} z_0 x_0 = 0,$$

et représente deux cônes obliques à bases circulaires de même forme que le cône intérieur, mais dont les bases ont des diamètres différents.

DE LA DÉTERMINATION,

SOUS FORME INTÉGRABLE,

DES ÉQUATIONS DES DÉVELOPPÉES DES COURBES A DOUBLE COURBURE;

Par H. MOLINS,

Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Monge a fait voir le premier qu'une courbe quelconque a une infinité de développées, dont il a donné la construction avec la manière de former leurs équations. Ces équations n'étant pas sous forme intégrable, Lancret fit ensuite connaître une méthode par laquelle il les obtenait sous cette forme. Elle repose sur l'emploi d'un plan touchant de la courbe, en l'assujettissant à faire un angle donné avec le plan osculateur. Comme l'équation de ce plan est extrêmement compliquée, le procédé lui-même exige de longs calculs qui le rendent peu praticable. La marche que nous suivons nous a paru remédier à cet inconvénient et donner une solution assez simple de la question. Nous établissons d'abord, pour les courbes à double courbure, quelques relations générales applicables à la théorie des développées, et dont la première servira à former leurs équations.

1. Considérons un point quelconque O d'une courbe à double courbure, et plaçons-y l'origine des coordonnées, en prenant pour axe des x la tangente en ce point, pour axe des y la direction du rayon du cercle osculateur, et pour axe des z la perpendiculaire au plan osculateur. Soient

$$y = \varphi x, \quad z = \psi x,$$

les équations de la courbe; nous supposerons que l'on prenne x pour variable indépendante, ce qui donnera

$$d^2x = 0.$$

La tangente au point O a pour équations

$$y' = \frac{dy}{dx} x', \quad z' = \frac{dz}{dx} x',$$

et comme elle sert d'axe de x, on aura en ce point

$$dy = 0, \quad dz = 0.$$

En outre, le plan osculateur au point O a pour équation

$$Xx' + Yy' + Zz' = 0,$$

les coefficients ayant ici pour valeurs

$$X = 0, \quad Y = -dx\, d^2z, \quad Z = dx\, d^2y,$$

et puisque ce plan sert de plan des x, y, on aura évidemment

$$d^2z = 0.$$

Il suit de là que l'on a au point O,

$$ds = dx, \quad d^2s = 0,$$

et si l'on différentie les expressions générales de X, Y, Z, on trouvera que l'on a en ce même point

$$dX = 0, \quad dY = -dx\, d^3z, \quad dZ = dx\, d^3y.$$

Cela posé, soient α, β, γ les coordonnées du centre du cercle osculateur au point O, on trouvera que leurs expressions générales donnent, en vertu des valeurs précédentes,

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{dx^2}{d^2y}, \quad \gamma = 0,$$

de sorte que le rayon de ce cercle est

$$\rho = \frac{dx^2}{d^2y}.$$

Soient, en second lieu, x', y', z' les coordonnées du point d'intersection de trois plans normaux consécutifs, point que Monge appelle centre de courbure sphérique, parce qu'il est le centre de la sphère qui passerait par quatre points consécutifs de la courbe; on trouvera que leurs valeurs relatives au point O sont

$$x' = 0, \quad y' = \frac{dx^2}{d^2y}, \quad z' = -\frac{dx^2\,d^3y}{d^2y\,d^3z}.$$

Appelons H la distance du centre de courbure sphérique au plan osculateur; elle est visiblement égale à z', et l'on a

$$\mathrm{H} = -\frac{dx^2\,d^3y}{d^2y\,d^3z}.$$

Soit enfin ω l'angle de torsion de la courbe au point O, on trouvera

$$\omega = \frac{d^3z}{d^2y},$$

et pour la différence de deux rayons de courbure consécutifs,

$$d\rho = -\frac{dx^2\,d^3y}{(d^2y)^2}.$$

Maintenant, si l'on multiplie entre elles les valeurs de H et ω, on obtient

$$\mathrm{H}\omega = -\frac{dx^2\,d^3y}{(d^2y)^2},$$

ce qui est la valeur de $d\rho$. Donc on a cette relation générale,

$$d\rho = \mathrm{H}\omega,$$

qui peut s'énoncer ainsi : « Le rapport de la différence de deux rayons
» de courbure consécutifs à l'angle de torsion est égal à la distance du
» centre de courbure sphérique au plan osculateur. »

2. Les coordonnées du centre du cercle osculateur sont données par la formule

$$\alpha - x = ds^2 . \frac{\mathrm{Y}dz - \mathrm{Z}dy}{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2},$$

et par deux autres analogues. Si on les différentie, on trouvera pour les valeurs de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ relatives au point O,

$$d\alpha = 0, \quad d\beta = -\frac{dx^2\,d^3y}{(d^2y)^2}, \quad d\gamma = \frac{dx^2\,d^3z}{(d^2y)^2},$$

et par suite, pour la valeur de l'élément de la courbe lieu des centres de courbure, que nous désignerons par $d\sigma$,

$$d\sigma = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2} = \frac{dx^2\sqrt{(d^3y)^2 + (d^3z)^2}}{(d^2y)^2}$$

Mais la formule

$$\rho = \frac{dx^2}{d^2y}$$

donne

$$d^2y = \frac{dx^2}{\rho},$$

valeur qui, portée dans les formules

$$\omega = \frac{d^3z}{d^2y}, \quad d\rho = -\frac{dx^2 d^3y}{(d^2y)^2},$$

leur fait prendre la forme

$$\omega = \frac{\rho d^3z}{dx^2}, \quad d\rho = -\frac{\rho^2 d^3y}{dx^2},$$

d'où

$$d^3y = -\frac{d\rho}{\rho^2}dx^3, \quad d^3z = \frac{\omega}{\rho}dx^2.$$

Substituant ces valeurs de d^2y, d^3y, d^3z dans l'expression de $d\sigma$, on obtient cette nouvelle relation générale

$$d\sigma = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2\omega^2}.$$

Si la courbe proposée était plane, ω serait nul et l'on aurait la relation connue $d\sigma = d\rho$ qui lie entre elles cette courbe et la courbe lieu des centres des cercles osculateurs qui en est la développée. Mais lorsque la courbe est à double courbure, la formule précédente prouve que $d\sigma$ n'est pas égal à $d\rho$, ce qui démontre d'une nouvelle manière cette proposition, que le lieu des centres des cercles osculateurs n'est pas une développée de la courbe proposée. Enfin, si dans cette formule on porte la valeur $d\rho = \mathrm{H}\omega$, on obtient cette autre relation

$$\frac{d\sigma}{\omega} = \sqrt{\mathrm{H}^2 + \rho^2}.$$

Si l'on observe que la quantité $\sqrt{H^2 + \rho^2}$ exprime la distance du point O de la courbe proposée au point d'intersection de trois plans normaux consécutifs, ou, ce qui revient au même, le rayon de courbure sphérique, on pourra énoncer ainsi la relation précédente : « Le rapport de » l'élément différentiel de la courbe lieu des centres de courbure à l'angle » de torsion est égal à la longueur du rayon de courbure sphérique. »

3. Les valeurs que nous avons trouvées pour $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, d^3y, d^3z donnent

$$d\alpha = 0, \quad \frac{d\gamma}{d\beta} = -\frac{d^3z}{d^3y} = \frac{\rho\omega}{d\rho},$$

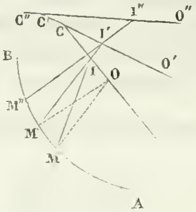
ce qui montre que la tangente à la courbe lieu des centres de courbure est contenue dans le plan normal au point O, et de plus, qu'elle fait avec le rayon du cercle osculateur un angle dont la tangente est égale à $\frac{\rho\omega}{d\rho}$. Comme cette quantité n'est pas nulle dans les courbes à double courbure, on en conclut que le rayon du cercle osculateur n'est pas tangent au lieu des centres de courbure, et cela peut encore servir à voir que cette courbe n'est pas une développée de la courbe proposée. On peut encore remarquer que l'expression de $\frac{d\gamma}{d\beta}$ devient, en y mettant $H\omega$ à la place de $d\rho$,

$$\frac{d\gamma}{d\beta} = \frac{\rho}{H},$$

quantité qui représente aussi la cotangente de l'angle que forme avec le rayon de courbure ρ le rayon de courbure sphérique $\sqrt{H^2 + \rho^2}$. Donc on peut énoncer la proposition suivante : « L'angle que fait la » tangente à la courbe lieu des centres des cercles osculateurs avec le » rayon du cercle osculateur est le complément de l'angle que fait avec » ce même rayon le rayon de courbure sphérique. »

4. Cherchons maintenant les équations des développées d'une courbe quelconque à double courbure AB. Concevons que l'on ait construit la surface développable lieu des intersections successives des plans normaux; on sait que toutes les développées sont situées sur

cette surface. Soient M, M′, M″ divers points consécutifs de la courbe, CO l'intersection des plans normaux en M, M′, C′O′ celle des plans



normaux en M′, M″, etc. Pour construire une développée quelconque, on prendra à volonté sur la droite CO un point I qu'on regardera comme le point de la développée qui répond au point M, et pour avoir le point suivant de cette courbe, on mènera la droite M′I contenue dans le plan OCO′ qui est le plan normal au point M′; le point I′ où cette droite rencontre C′O′ est le second point de la développée, lequel répond à M′. Pareillement on joindra I′M″ qu'on prolongera jusqu'à la rencontre de C″O″ au point I″ qui est le point de la développée correspondant à M″, et ainsi de suite. On nomme rayons de la développée les diverses longueurs MI, M′I′, M″I″,... qui sont les distances des points de cette courbe aux points correspondants de la courbe proposée. Nous désignerons par ρ_1 le rayon MI qui répond au point M, et voyons comment il varie lorsqu'on passe de ce point au point infiniment voisin M′.

La droite CO étant l'intersection des plans normaux en M, M′, il s'ensuit que le point I est le centre d'une sphère qui a un contact du second ordre avec la courbe AB au point M. Donc IM = IM′, et la différence $d\rho_1$ des deux rayons consécutifs IM, I′M′ est égale à II′. Or le triangle ICI′ donne la proportion

$$\text{II}' : \text{IC} :: \sin \text{ICI}' : \sin (\text{ICI}' + \text{CII}'),$$

d'où

$$\text{II}' \times \sin (\text{ICI}' + \text{CII}') = \text{IC} \times \sin \text{ICI}';$$

ou bien, en remarquant que II′ et l'angle ICI′ sont infiniment petits, et négligeant, dans le premier membre, les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier,

$$(1)\qquad \mathrm{II}' \times \sin \mathrm{CII}' = \mathrm{IC} \times \sin \mathrm{ICI}'.$$

Soit O le point où la droite CO rencontre le plan osculateur relatif au point M ; les droites MO, M′O sont égales entre elles et au rayon ρ du cercle osculateur; de plus, elles sont perpendiculaires à CO. On a donc par le triangle rectangle IM′O, ou son égal IMO,

$$\sin \mathrm{M'IO} \quad \text{ou} \quad \sin \mathrm{CII}' = \frac{\rho}{\rho_1}, \quad \mathrm{IO} = \sqrt{\rho_1^2 - \rho^2};$$

par suite, en représentant, comme plus haut, par H la longueur CO, qui est la distance du centre de courbure sphérique au plan osculateur,

$$\mathrm{IC} = \mathrm{H} - \sqrt{\rho_1^2 - \rho^2}.$$

Quant à l'angle ICI′ qui est formé par les normales à deux plans osculateurs consécutifs, il est égal à l'angle de torsion que nous avons appelé ω.

Substituant ces diverses valeurs dans l'équation (1), et remplaçant $\sin \omega$ par ω angle infiniment petit, il vient

$$\mathrm{II}' \text{ ou } d\rho_1 = (\mathrm{H} - \sqrt{\rho_1^2 - \rho^2}) \cdot \frac{\omega\rho_1}{\rho} = \mathrm{H}\omega \cdot \frac{\rho_1}{\rho} - \sqrt{\rho_1^2 - \rho^2} \cdot \frac{\omega\rho_1}{\rho}.$$

Mais nous avons trouvé la relation $d\rho = \mathrm{H}\omega$, d'où $\omega = \frac{d\rho}{\mathrm{H}}$; par conséquent l'équation précédente devient

$$d\rho_1 = \frac{\rho_1 d\rho}{\rho} - \sqrt{\rho_1^2 - \rho^2} \cdot \frac{\rho_1 d\rho}{\mathrm{H}\rho},$$

et comme les valeurs de ρ, H et $d\rho$ sont déterminées au moyen des équations de la courbe donnée, cette équation est une équation différentielle qui déterminera ρ_1. Pour l'intégrer, on la mettra sous la forme suivante

$$\frac{d\rho}{\mathrm{H}} = \frac{\rho_1 d\rho - \rho d\rho_1}{\rho_1 \sqrt{\rho_1^2 - \rho^2}} = \frac{d.\frac{\rho}{\rho_1}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^2}},$$

et l'on aura pour l'intégrale

$$\text{arc sin}\,\frac{\rho}{\rho_1} = \int \frac{d\rho}{H} + C,$$

C étant une constante arbitraire, et $\frac{d\rho}{H}$ étant égal à ω. Si l'on désigne $\int \frac{d\rho}{H}$ par Ω, on aura enfin

$$(2) \qquad \rho_1 = \frac{\rho}{\sin(\Omega + C)}.$$

5. Cela posé, il est aisé, à l'aide de cette expression générale de ρ_1, d'obtenir, sous forme intégrale, les équations d'une développée quelconque. Car soient x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque de la développée qui réponde au point (x, y, z) de la courbe proposée; le premier de ces points étant situé sur l'intersection de deux plans normaux consécutifs, on aura ces deux équations

$$(3) \qquad (x' - x)\,dx + (y' - y)\,dy + (z' - z)\,dz = 0,$$
$$(4) \qquad (x' - x)\,d^2x + (y' - y)\,d^2y + (z' - z)\,d^2z = ds^2;$$

d'un autre côté l'on a

$$\rho_1^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$

ou bien, en mettant pour ρ_1 sa valeur donnée par l'équation (2).

$$(5) \qquad \frac{\rho^2}{\sin^2(\Omega + C)} = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2.$$

Au moyen des équations (3), (4), (5), on déterminerait le point (x', y', z') de la développée qui répond au point (x, y, z) de la courbe proposée; mais, si entre ces trois équations on élimine la variable indépendante dont x, y, z sont des fonctions que déterminent les équations de cette dernière courbe, on aura en quantités finies les équations de la développée. Les diverses valeurs que l'on pourra attribuer à C, répondront au nombre infini de développées que possède une courbe quelconque.

6. Dans le cas où la courbe donnée est plane, le triangle infiniment petit CII' cesse d'exister, puisque les intersections successives des plans normaux sont des droites parallèles; on doit par conséquent exa-

miner séparément ce cas particulier. Or, on remarquera que le point M' et les centres O, O', de deux cercles osculateurs consécutifs, sont en ligne droite, et que cette droite M' OO' est la projection du rayon de développée M'II'. Par suite OO' ou $d\rho$ est la projection de II' ou $d\rho_1$ sur le plan de la courbe, de même que OM' ou ρ est la projection de M' I ou ρ_1; donc on a la proportion

$$d\rho_1 : d\rho :: \rho_1 : \rho,$$

d'où

$$\frac{d\rho_1}{\rho_1} = \frac{d\rho}{\rho},$$

et en intégrant et désignant par C une constante arbitraire, $\rho_1 = C\rho$. Ayant l'expression de ρ_1, on procédera comme plus haut. Ainsi, en supposant que le plan de la courbe serve de plan des x, y, et que x soit la variable indépendante, les équations de l'intersection des deux plans normaux consécutifs seront

$$x - x' + (y - y')\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - y')\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

à quoi l'on joindra l'équation

$$\rho_1^2 \quad \text{ou} \quad C^2\rho^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + z'^2.$$

On mettra enfin pour y et ρ leurs valeurs en fonction de x, et l'élimination de x entre ces trois équations donnera celles d'une développée quelconque. Lorsqu'on fera $C = 1$, on aura visiblement $z' = 0$, et la développée sera plane. On remarquera encore que le rapport constant $\frac{\rho}{\rho_1}$ exprime le sinus de l'angle que forme le rayon ρ_1 tangent à la développée avec la direction des génératrices de la surface cylindrique lieu de toutes les développées. Donc ces développées sont des hélices.

7. Appliquons la méthode précédente à la recherche des développées de l'hélice tracée sur un cylindre circulaire droit; nous retrouverons par une voie analytique des résultats qu'on obtient ordinairement par des considérations géométriques (*voir* les *Leçons d'analyse* de Navier). Si l'on prend pour axe des z l'axe du cylindre, et pour plan des x, y le plan de la base, en ayant soin de faire passer l'axe des x

par la trace de l'hélice sur ce plan, les équations de cette courbe seront

$$x = \mathrm{R} \cos \frac{z}{\mathrm{R}a}, \quad y = \mathrm{R} \sin \frac{z}{\mathrm{R}a},$$

R étant le rayon du cylindre, et a la cotangente de l'angle constant que font les tangentes de l'hélice avec les génératrices. Les équations (3), (4) de l'intersection de deux plans normaux consécutifs deviennent

$$(6) \qquad x' \sin \frac{z}{\mathrm{R}a} - y' \cos \frac{z}{\mathrm{R}a} = a(z' - z),$$

$$(7) \qquad x' \cos \frac{z}{\mathrm{R}a} + y' \sin \frac{z}{\mathrm{R}a} = -\mathrm{R}a^2.$$

L'angle de torsion ω étant ici égal à $\frac{dz}{\mathrm{R}\sqrt{1+a^2}}$, on aura pour la quantité Ω qui est égale à $\int \omega$,

$$\Omega = \frac{z + \mathrm{C}}{\mathrm{R}\sqrt{1+a^2}},$$

C étant une constante arbitraire; et l'équation (5) deviendra, en mettant pour ρ sa valeur $\mathrm{R}(1 + a^2)$,

$$\frac{\mathrm{R}^2(1+a^2)^2}{\sin^2 \frac{z+\mathrm{C}}{\mathrm{R}\sqrt{1+a^2}}} = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$

ou bien, en mettant pour x, y leurs valeurs données par les équations de l'hélice, et pour x', y' leurs valeurs tirées des équations (6), (7),

$$\frac{\mathrm{R}^2(1+a^2)}{\sin^2 \frac{z+\mathrm{C}}{\mathrm{R}\sqrt{1+a^2}}} = (z' - z)^2 + \mathrm{R}^2(1 + a^2),$$

d'où

$$(8) \qquad z' - z = \pm \mathrm{R}\sqrt{1+a^2} \operatorname{cotang} \frac{z+\mathrm{C}}{\mathrm{R}\sqrt{1+a^2}}.$$

L'élimination de z entre les équations (6), (7), (8) donnerait les équations d'une développée quelconque; pour cela on ferait la somme des carrés des équations (6), (7), et l'on aurait

$$x'^2 + y'^2 = a^2(z' - z)^2 + \mathrm{R}^2 a^4,$$

d'où

$$(9) \qquad a(z' - z) = \pm \sqrt{x'^2 + y'^2 - \mathrm{R}^2 a^4}.$$

Il ne resterait qu'à porter la valeur de z en x', y', z', qui se déduit de là immédiatement, dans les équations (7), (8); on aurait en quantités finies les équations de la développée. D'ailleurs on voit que l'équation (7), après cette substitution, deviendrait celle de la surface développable enveloppe des plans normaux. Mais il est préférable, pour la discussion, de garder les équations (7), (8), (9), qui déterminent chaque point (x', y', z') de la développée correspondant au point (x, y, z) de l'hélice. Seulement on remplacera l'équation (8) par celle qu'on obtient en égalant les valeurs de $z' - z$ que donnent les équations (8) et (9),

$$(10)\qquad \sqrt{x'^2 + y'^2 - \mathrm{R}^2 a^4} = \mathrm{R}a\sqrt{1 + a^2}\,\mathrm{cotang}\,\frac{z + \mathrm{C}}{\mathrm{R}\sqrt{1 + a^2}}.$$

Le radical du premier membre devrait être pris avec l'un ou l'autre des signes ±, selon que la cotangente sera positive ou négative.

Soient r et ψ les coordonnées polaires qui déterminent la projection du point (x', y', z') sur le plan des x, y; on aura

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = r,\quad \frac{x'}{r} = \cos\psi,\quad \frac{y'}{r} = \sin\psi,$$

et les équations (7), (9), (10) prendront la forme

$$(11)\qquad \cos\left(\psi - \frac{z}{\mathrm{R}a}\right) = -\frac{\mathrm{R}a^2}{r},$$

$$(12)\qquad z' = z \pm \frac{1}{a}\sqrt{r^2 - \mathrm{R}^2 a^4}.$$

$$(13)\qquad \frac{\sqrt{r^2 - \mathrm{R}^2 a^4}}{\mathrm{R}a\sqrt{1 + a^2}} = \mathrm{cotang}\,\frac{z + \mathrm{C}}{\mathrm{R}\sqrt{1 + a^2}}.$$

L'équation (13) détermine r quand on se donne z; par suite, les deux autres feront connaître ψ et z', et le point (x', y', z') de la développée sera déterminé. On remarquera que le double signe que renferme l'équation (12) tient à ce que les diverses branches de la développée sont situées alternativement sur les nappes supérieure et inférieure de la surface développable lieu des intersections successives des plans normaux. Il est d'ailleurs facile de distinguer l'un et l'autre cas d'après la position de la portion d'hélice dont on cherche la développée.

Si l'on pose

$$\frac{z + \mathrm{C}}{\mathrm{R}\sqrt{1 + a^2}} = (2k + 1)\,.\,\frac{\pi}{2},$$

k étant un nombre entier quelconque, on aura en vertu des équations (11), (12), (13),

$$r = \mathrm{R}a^2, \quad z' = z, \quad \psi = \pi + \frac{z}{\mathrm{R}a},$$

valeurs qui déterminent un point situé sur l'hélice arête de rebroussement de la surface précédente. Donc la développée coupe cette courbe en une infinité de points dont les distances au plan de la base du cylindre sont données par la formule

$$z' = -\mathrm{C} + \mathrm{R}\sqrt{1 + a^2}\,(2k + 1).\frac{\pi}{2}.$$

La différence des valeurs de ψ qui répondent à deux de ces points supposés consécutifs est constante et égale à $\pi\frac{\sqrt{1 + a^2}}{a}$, et l'arc de cette hélice compris entre les mêmes points est égal à $\pi\mathrm{R}(1 + a^2)$.

Si l'on pose, en second lieu,

$$\frac{z + \mathrm{C}}{\mathrm{R}\sqrt{1 + a^2}} = k\pi,$$

on voit, par les équations (12) et (13), que r et z' sont infinis, et par l'équation (11) que l'on a

$$\psi = \frac{z}{\mathrm{R}a} + \frac{1}{2}\pi.$$

Cette valeur de ψ détermine la direction de la projection d'une des asymptotes de la développée sur le plan des x, y, et elle montre en même temps que cette projection est tangente au cercle qui sert de base au cylindre donné. En outre, la branche suivante de la développée a même asymptote que la premiere, car la direction de la projection de cette asymptote serait déterminée par

$$\psi = \frac{z}{\mathrm{R}a} + \frac{3}{2}\pi.$$

Il y a donc une infinité de branches dans la développée, dont chacune est réunie à la précédente par un point de rebroussement, et a avec la suivante une asymptote commune.

REMARQUES SUR UN MÉMOIRE DE N. FUSS;

Par J. LIOUVILLE.

Le Mémoire dont je veux parler est imprimé dans le tome IX des *Nova acta Acad. Petrop.* (année 1761). Il a pour objet la solution du problème suivant : « Un polygone P étant donné, de combien de manières peut-on le partager en polygones de m côtés au moyen de » diagonales? » Ce problème comprend, comme cas particulier, celui de la décomposition en triangles, dont plusieurs géomètres se sont occupés, et qui, dans ces derniers temps, a surtout donné lieu à des remarques intéressantes de la part de MM. Lamé, Rodrigues et Binet [*].

Soit n le nombre des côtés du polygone P. Parmi les polygones $p_1, p_2, \ldots, p_i$ de m côtés, dont il est pour ainsi dire la somme dans une quelconque des décompositions proposées, il y en a toujours deux formés par $(m-1)$ côtés et une diagonale de P, tandis que les $(i-2)$ autres le sont par $(m-1)$ côtés et deux diagonales. Le nombre total des côtés de P sera ainsi

$$2(m-1)+(i-2)(m-2);$$

il faudra donc que l'on ait

$$n = im - 2(i-1)$$

pour que la décomposition en polygones de m côtés soit possible.

Cela admis, désignons par $\varphi(i)$ le nombre des décompositions cherchées, lequel pour une valeur donnée de m est naturellement une fonction de i. Il est évident qu'on aura d'abord

$$\varphi(1) = 1;$$

---

[*] *Voir* le tome III de ce Journal, page 505 et page 549, puis le tome IV, page 79 et page 91.

quant aux valeurs de $\varphi(2)$, $\varphi(3)$, $\varphi(4)$,..., Fuss les déduit les unes des autres à l'aide de la formule générale,

$$(a)\quad \varphi(i) = \frac{im-2(i-1)}{2(i-1)}\left[\varphi(1)\varphi(i-1)+\varphi(2)\varphi(i-2)+\ldots+\varphi(i-1)\varphi(1)\right],$$

en faisant successivement $i=2$, $i=3$, $i=4$, etc. Il est aisé de démontrer cette formule, et je ne m'arrèterai pas à rapporter ici en détail les raisonnements de Fuss.

Le cas de $m=3$ se rapporte à la décomposition du polygone P en triangles. On a alors $n=i+2$, et en désignant par P_n ce que $\varphi(i)$ devient dans ce cas, la formule de Fuss se réduit à

$$P_n = \frac{n(P_3 P_{n-1} + P_4 P_{n-2} + \ldots + P_{n-1} P_3)}{2n-6}.$$

Or, voilà précisément l'équation que M. Lamé (après l'avoir établie à peu près comme Fuss lui-même, bien qu'il n'eût pas lu le passage des *Nova acta*) combine avec l'équation de Segner,

$$P_{n+1} = P_n + P_3 P_{n-1} + P_4 P_{n-2} + \ldots + P_{n-1} P_3 + P_n,$$

pour arriver à la formule d'Euler,

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n,$$

dont on demandait une démonstration. Mais Fuss n'a pas même comparé sa formule à celle de Segner : à plus forte raison est-il loin d'avoir vu quel parti l'on pouvait tirer de cette comparaison. La démonstration que M. Lamé a donnée de la formule d'Euler s'est ainsi, pour ainsi dire, présentée d'elle-même à Fuss, lequel (habile géomètre pourtant) n'a pas su profiter de ce hasard heureux.

Ce n'est pas tout. Dans une addition placée à la fin de son Mémoire, Fuss considère la série

$$1 + x\varphi(1) + x^2\varphi(2) + \ldots + x^i\varphi(i) + \ldots,$$

où nous regarderons l'indéterminée x comme ayant une valeur très-petite, et il trouve que, d'après la loi des coefficients $\varphi(i)$, la $(m-1)^{\text{ième}}$

puissance de cette série est

$$\varphi(1) + x\varphi(2) + \ldots + x^{i-1}\varphi(i) + \text{ etc.}$$

La remarque est tout à la fois curieuse et exacte. Il s'ensuit qu'en posant

$$(b) \qquad u = 1 + x\varphi(1) + \ldots + x^i\varphi(i) + \ldots,$$

on a

$$u = 1 + xu^{m-1}.$$

Cette équation, dans le cas de $m = 3$, coïncide avec celle dont M. Binet a fait usage. Mais Fuss n'en a tiré aucun parti : il n'a pas su en déduire les nombres $\varphi(i)$ exprimés en fonction de i; que dis-je? il ne l'a pas même écrite explicitement. Et cette fois encore il a laissé échapper une conclusion élégante qui s'offrait à lui sans efforts.

L'équation

$$u = 1 + xu^{m-1}$$

se résout aisément par la formule de Lagrange; ou du moins la formule de Lagrange fournit celle des racines qui est développable suivant les puissances entières et positives de x, la seule dont nous ayons besoin. En général, pour l'équation

$$u = \alpha + xf(u),$$

cette racine est

$$u = \alpha + \frac{x}{1} f(\alpha) + \frac{x^2}{1.2}\frac{d.f(\alpha)^2}{d\alpha} + \ldots + \frac{x^i}{1.2\ldots i}\cdot\frac{d^{i-1}.f(\alpha)^i}{d\alpha^i} + \ldots.$$

En faisant $f(u) = u^{m-1}$, $\alpha = 1$, il viendra donc

$$u = 1 + x + (m-1)x^2 + \ldots + \frac{(im-i)(im-i-1)\ldots(im-2i+2)}{1.2\ldots i}x^i + \ldots.$$

D'un autre côté, on a

$$u = 1 + x\varphi(1) + x\varphi(2) + \ldots + x^i\varphi(i) + \text{ etc.}$$

De là résulte $\varphi(2) = m - 1$, puis, en général,

$$\varphi(i) = \frac{(im - i)(im - i - 1)\ldots(im - 2i + 2)}{1.2\ldots i}.$$

Telle est la valeur de $\varphi(i)$, que Fuss aurait dû trouver. On voit par les *Nova acta* que Pfaff s'était aussi occupé de ce problème, mais j'ignore entièrement quelle solution il avait obtenue.

Note de M. J. Binet.

M. Liouville ayant bien voulu me donner communication des recherches précédentes, relatives à une question intéressante d'analyse, analogue à celle dont je me suis occupé dans le tome IV de ce Journal, je me propose de reconnaître comment la méthode des fonctions génératrices peut établir l'équation

$$u = 1 + xu^{m-1},$$

à laquelle Fuss paraît n'être arrivé que par une sorte d'induction. Je conserverai dans cette Note les dénominations employées par M. Liouville, et je poserai, pour abréger,

$$\psi(i) = \varphi(1)\varphi(i-1) + \varphi(2)\varphi(i-2) + \ldots + \varphi(i-2)\varphi(2) + (i-1)\varphi(1)\varphi,$$

à partir de $i = 2$; en sorte que

$$\psi(2) = \varphi(1)\varphi(1) = 1, \quad \psi(3) = \varphi(1)\varphi(2) + \varphi(2)\varphi(1), \text{ etc.}$$

L'échelle de relation (a), page 392, prend alors cette expression

$$(a) \qquad 2(i-1)\varphi(i) = [(m-2)i + 2]\psi(i).$$

u est une fonction de x donnée par l'équation

$$(b) \qquad u = 1 + \sum_{1}^{\infty} x^i.\varphi(i);$$

on en tire

$$(u-1)^2 = \left[\sum x^i.\varphi(i)\right]^2,$$

ou bien

$$(u-1)^2 = x^2\varphi(1)\,\varphi(1) + x^3[\varphi(1)\,\varphi(2) + \varphi(2)\,\varphi(1)] + \text{etc.};$$

c'est-à-dire

$$(\beta) \qquad (u-1)^2 = \sum\nolimits_2 x^i.\psi(i):$$

ainsi $(u-1)^2$ est la fonction génératrice de $\psi(i)$, comme u est celle de $\varphi(i)$. Pour déterminer u, on formera la dérivée par dx de l'équation (b),

$$\frac{du}{dx} = \sum i\,x^{i-1}\varphi(i);$$

on multiplie par $2x$, et du produit l'on retranche $2(u-1) = \sum x^i.\varphi(i)$; il vient

$$2x\frac{du}{dx} - 2u + 2 = \sum 2(i-1)\,\varphi(i).x^i.$$

Prenez aussi la dérivée de l'équation (β), multipliée par $m-2$,

$$(m-2)\,\frac{d.(u-1)^2}{dx} = \sum (m-2)\,i\,\psi(i).x^{i-1};$$

multipliez par x, et ajoutez la même formule (β), multipliée par 2; cela fait

$$(m-2)x\frac{d.(u-1)^2}{dx} + 2(u-1)^2 = \sum[(m-2)\,i+2]\,\psi(i).x^i.$$

Or, en vertu de l'échelle de relation (a), le second membre est égal à

$$\sum\nolimits_1 2(i-1)\,\varphi(i)\,x^i,$$

et il peut être remplacé par sa valeur tirée de l'équation antérieure; on a donc, pour déterminer u, cette équation différentielle

$$2(m-2)\,x(u-1)\frac{du}{dx} + 2(u-1)^2 = 2x\frac{du}{dx} - 2(u-1):$$

on en tire sur-le-champ l'équation séparée

$$\frac{(m-2)(u-1)-1}{u(u-1)}du + \frac{dx}{x} = 0.$$

Le numérateur

$$(m-2)(u-1)-1 = (m-2)(u-1)+u-1-u,$$

ou bien $= (m-1)(u-1)-u$; l'équation à intégrer devient ainsi

$$\frac{du}{u-1} - \frac{(m-1)du}{u} = \frac{dx}{x};$$

son intégrale est

$$\log(u-1) - (m-1)\log u = \log(\mathrm{A}x),$$

A étant une constante d'intégration; on en tire

$$\frac{u-1}{u^{m-1}} = \mathrm{A}x,$$

et la fonction u doit être déterminée par l'équation algébrique

$$u = 1 + \mathrm{A}x u^{m-1}.$$

La fonction u, tirée de l'équation (b), va fournir la valeur de la constante A, car on a, par la substitution dans l'équation algébrique,

$$x\varphi(1) + x^2\varphi(2) + \text{etc.} = \mathrm{A}xu^{m-1};$$

en divisant par x, il vient

$$\varphi(1) + x\varphi(2) + \text{etc.} = \mathrm{A}u^{m-1};$$

on posera $x = 0$, ce qui entraîne $u = 1$, et l'équation donnera,

$$\varphi(1) = 1 = \mathrm{A}.$$

L'équation en u est donc simplement

$$u = 1 + xu^{m-1}.$$

Il est, en effet, très-singulier que Fuss n'ait pas su tirer parti de cette équation, car on connaissait depuis longtemps une formule de Lambert pour le développement, selon les puissances de x, de la valeur de u: c'est le développement que donne aussi le théorème de Lagrange, employé comme l'a fait ci-dessus M. Liouville.

MÉMOIRE

SUR LES SURFACES ORTHOGONALES ET ISOTHERMES;

PAR M. G. LAMÉ.

(Lu à l'Académie des Sciences, le 21 août 1843.)

Dans un Mémoire, inséré dans ce Journal (tome V, page 313), j'ai démontré les formules qui peuvent servir à transformer des équations aux différences partielles en coordonnées curvilignes, et dont l'interprétation géométrique se résume en deux théorèmes sur les variations de courbure de tout système de surfaces orthogonales. Les formules dont il s'agit sont aux différences partielles du second ordre, mais non linéaires. Elles contiennent, comme variables indépendantes, les paramètres des surfaces conjuguées, ou les trois coordonnées curvilignes, et, comme fonctions de ces variables, les trois paramètres différentiels du premier ordre. Ces équations aux différences partielles sont trop compliquées pour qu'on puisse les intégrer généralement; mais en assujettissant les fonctions qu'elles contiennent à de nouvelles conditions, l'intégration devient possible.

Dans le Mémoire actuel, j'introduis la condition que les surfaces conjuguées soient toutes isothermes, ce qui donne trois équations nouvelles aux différences partielles, linéaires et du premier ordre. Un système de surfaces isothermes, ou d'égale température, existe dans tout solide homogène soumis à diverses sources constantes de chaleur ou de froid. Deux quelconques des surfaces qui composent ce système peuvent être prises à volonté; mais ces deux surfaces, une fois choisies, non-seulement toutes les autres se dessinent d'elles-mêmes, mais encore les surfaces orthogonales qui leur sont conjuguées. Il faut toutefois excepter le cas de deux sphères concentriques, et celui de deux plans parallèles, à cause de l'indétermination des systèmes conjugués qui leur correspondent. Mais ces cas étant écartés, l'ensemble des surfaces orthogonales est totalement déterminé dès qu'on se donne deux surfaces individuelles; ce qui montre clairement que les deux surfaces choisies doivent avoir une nature et des positions relatives particulières, pour que les systèmes conjugués qui les accompagnent soient tous les trois isothermes.

J'ai fait voir que, dans tout système triple de surfaces isothermes, les six rayons de courbure des surfaces qui passent en chaque point sont tels, que le produit de trois d'entre eux, pris dans un certain ordre, est égal au produit des trois autres. Depuis, M. J. Bertrand, dans le Mémoire qu'il a récemment présenté à l'Académie des Sciences, a démontré plusieurs théorèmes nouveaux sur les surfaces dont il s'agit. Il démontre, par exemple, que toute surface appartenant au système triple doit jouir de la propriété de pouvoir être divisée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure, lesquelles, d'après le beau théorème démontré généralement par M. Dupin, ne sont autres que les intersections de cette surface, par toutes les surfaces orthogonales qui peuvent lui être conjuguées.

C'est cette proposition élégante, trouvée par M. J. Bertrand, qui m'a donné l'idée de chercher, par l'intégration des équations différentielles dont je viens de parler, quelles sont toutes les surfaces capables de composer un système triplement isotherme. Je considère d'abord le cas des surfaces de révolution, c'est-à-dire celui où l'un des trois systèmes partiels se compose de plans menés suivant une même droite, et les deux autres de surfaces de révolution autour de cette droite; or, l'intégration complète ne conduit qu'aux deux systèmes connus des surfaces de révolution du second degré. Je considère ensuite le cas général, et l'intégration me conduit pareillement aux systèmes triples des surfaces isothermes du second ordre; ainsi, par le théorème de M. J. Bertrand, les surfaces du second ordre peuvent être partagées en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure.

Des résultats aussi simples doivent pouvoir se démontrer d'une manière en quelque sorte élémentaire, à l'aide des infiniment petits et en s'appuyant sur la théorie, aujourd'hui si bien connue, des surfaces du second ordre; mais la méthode complétement analytique que j'ai suivie m'offrait l'avantage d'essayer une première fois, sur un cas simple, l'intégration des équations différentielles qui appartiennent à tous les systèmes de surfaces orthogonales. Ces équations sont compliquées et d'une forme telle, que les méthodes d'intégration employées jusqu'ici ne leur sont pas applicables. Je n'ai pu atteindre le but que je me proposais qu'en ayant recours à des procédés particuliers qui paraissent liés intimement avec cette sorte d'équations différentielles, et qui doivent mettre sur la voie pour parvenir à les intégrer dans des cas plus généraux.

En résumé, on connaît maintenant tous les genres de surfaces orthogonales dans lesquels les trois systèmes partiels sont isothermes : 1° celui des ellipsoïdes et des hyperboloïdes homofocaux, qui m'a servi à trouver les lois de l'équilibre et du mouvement des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux, dont la surface est directement soumise à des sources constantes de chaleur et de froid; 2° celui des paraboloïdes elliptiques et hyperboliques, ayant même axe et mêmes foyers; 3° ceux qui comprennent les ellipsoïdes de révolution autour du petit axe et autour du grand axe; 4° celui où l'un des systèmes partiels se compose de sphères concentriques, lesquelles peuvent être conjuguées à une infinité de cônes du second ordre; 5° enfin ceux où l'un des systèmes partiels se compose de plans parallèles, qui peuvent être conjugués à une infinité de cylindres isothermes.

De ces cinq genres, les quatre premiers ne forment réellement qu'un seul et même groupe, car le second, le troisième et le quatrième peuvent se déduire du premier, en modifiant convenablement les constantes qu'il renferme. Il n'en est pas de même du cinquième genre, qui forme un second groupe distinct et très-étendu; car il existe une infinité de cylindres de tous les degrés, dont les bases sont des courbes orthogonales isothermes : on démontre, en effet, très-facilement qu'un système de courbes planes isothermes a pour trajectoires orthogonales des courbes pareillement isothermes.

§ I.

Rappelons en peu de mots les principes établis et les formules démontrées dans le Mémoire sur les coordonnées curvilignes (tome V de ce Journal, page 313).

Lorsqu'une famille de surfaces est donnée par une équation de la forme $f(x, y, z) = \rho$, le paramètre ρ, et les deux expressions différentielles

$$\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2\rho}{dx^2} + \frac{d^2\rho}{dy^2} + \frac{d^2\rho}{dz^2}\right),$$

que nous désignons par h et $\Delta_2\rho$, conservent les mêmes valeurs numériques en chaque point, quels que soient les axes coordonnés. La seconde de ces quantités, ou h, que nous appelons paramètre différentiel du premier ordre, est telle que $\frac{d\rho}{h}$ représente la distance normale de deux surfaces consécutives; la troisième, ou $\Delta_2\rho$, que nous appelons paramètre différentiel du second ordre, est telle que l'expression $\left(\frac{dh}{d\rho} - \frac{\Delta_2\rho}{h}\right)$ représente la somme des deux courbures de la surface qui passe au point que l'on considère.

Lorsque trois familles de surfaces, aux paramètres ρ, ρ_1, ρ_2, partagent l'espace en parallélipipèdes infiniment petits, leur ensemble constitue un système de surfaces conjuguées et orthogonales. Un point quelconque est déterminé par les trois surfaces qui s'y coupent à angles droits, ou par les valeurs numériques des paramètres ρ, ρ_1, ρ_2, qui leur correspondent. Les trois paramètres différentiels du premier ordre, h, h_1, h_2, vérifient les six équations aux différences partielles suivantes, dans lesquelles on a posé, pour simplifier, $\frac{1}{h} = \mathrm{H}$, $\frac{1}{h_1} = \mathrm{H}_1$, $\frac{1}{h_2} = \mathrm{H}_2$:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2\mathrm{H}}{d\rho_1 d\rho_2} &= \frac{1}{\mathrm{H}_1}\frac{d\mathrm{H}}{d\rho_1}\frac{d\mathrm{H}_1}{d\rho_2} + \frac{1}{\mathrm{H}_2}\frac{d\mathrm{H}}{d\rho_2}\frac{d\mathrm{H}_2}{d\rho_1},\\ \frac{d^2\mathrm{H}_1}{d\rho_2 d\rho} &= \frac{1}{\mathrm{H}_2}\frac{d\mathrm{H}_1}{d\rho_2}\frac{d\mathrm{H}_2}{d\rho} + \frac{1}{\mathrm{H}}\frac{d\mathrm{H}_1}{d\rho}\frac{d\mathrm{H}}{d\rho_2},\\ \frac{d^2\mathrm{H}_2}{d\rho\, d\rho_1} &= \frac{1}{\mathrm{H}}\frac{d\mathrm{H}_2}{d\rho}\frac{d\mathrm{H}}{d\rho_1} + \frac{1}{\mathrm{H}_1}\frac{d\mathrm{H}_2}{d\rho_1}\frac{d\mathrm{H}_1}{d\rho}; \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\frac{1}{H_1}\frac{dH}{d\rho_1}}{d\rho_1}+\frac{d\frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\rho}}{d\rho}+\frac{1}{H_2}\frac{dH}{d\rho_2}\,\frac{1}{H_2}\frac{dH}{d\rho_2}=0,\\
&\frac{d\frac{1}{H}\frac{dH_2}{d\rho}}{d\rho}+\frac{d\frac{1}{H_2}\frac{dH}{d\rho_2}}{d\rho_2}+\frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{d\rho_1}\,\frac{1}{H_1}\frac{dH}{d\rho_1}=0,\\
&\frac{d\frac{1}{H_2}\frac{dH_1}{d\rho_2}}{d\rho_2}+\frac{d\frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{d\rho_1}}{d\rho_1}+\frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\rho}\,\frac{1}{H}\frac{dH_2}{d\rho}=0.
\end{aligned}\right.$$

Les trois fonctions $h=\frac{1}{H}$, $h_1=\frac{1}{H_1}$, $h_2=\frac{1}{H_2}$, étant connues en ρ, ρ_1, ρ_2, 1°. les formules

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{c}=\frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1},\quad \frac{1}{c_1}=\frac{h_2}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho_2},\quad \frac{1}{c_2}=\frac{h}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho},\\
&\frac{1}{\gamma}=\frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2},\quad \frac{1}{\gamma_1}=\frac{h}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho},\quad \frac{1}{\gamma_2}=\frac{h_1}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho_1},
\end{aligned}\right.$$

donnent les rayons de plus grande et de plus petite courbure des surfaces ρ, ρ_1, ρ_2, lesquels sont respectivement (γ_1, c_2), (γ_2, c), (γ, c_1); ou bien, les surfaces orthogonales se coupant suivant leurs lignes de courbure, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{\gamma}$, sont les deux courbures de l'arc $ds=\frac{d\rho}{h}$; $\frac{1}{c_1}$, $\frac{1}{\gamma_1}$, celles de l'arc $ds_1=\frac{d\rho_1}{h_1}$; $\frac{1}{c_2}$, $\frac{1}{\gamma_2}$, celles de l'arc $ds_2=\frac{d\rho_2}{h_2}$.

2°. Les paramètres différentiels du second ordre des surfaces conjuguées sont déterminés par les équations

$$(4)\qquad \frac{\Delta_2\rho}{h^2}=\frac{d\log\frac{h}{h_1h_2}}{d\rho},\quad \frac{\Delta_2\rho_1}{h_1^2}=\frac{d\log\frac{h_1}{h_2h}}{d\rho_1},\quad \frac{\Delta_2\rho_2}{h_2^2}=\frac{d\log\frac{h_2}{hh_1}}{d\rho_2},$$

qui, d'après les formules (3), peuvent se mettre sous la forme

$$(4\ bis)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{dh}{d\rho}-\frac{\Delta_2\rho}{h}=\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{c},\quad \frac{dh_1}{d\rho_1}-\frac{\Delta_2\rho_1}{h}=\frac{1}{\gamma_2}+\frac{1}{c},\\
&\frac{dh_2}{d\rho_2}-\frac{\Delta_2\rho_2}{h_2}=\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{c_1}.
\end{aligned}\right.$$

3°. Toute coordonnée rectiligne x, y ou z, ou en général toute distance φ d'un point de l'espace à un plan fixe quelconque, étant exprimée en ρ, ρ_1, ρ_2, doit vérifier les quatre équations différentielles

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2\varphi}{d\rho d\rho_1} + \frac{1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{d\varphi}{d\rho} + \frac{1}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho}\frac{d\varphi}{d\rho_1} = 0,\\
&\frac{d^2\varphi}{d\rho_2 d\rho} + \frac{1}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho}\frac{d\varphi}{d\rho_2} + \frac{1}{h}\frac{dh}{d\rho_2}\frac{d\varphi}{d\rho} = 0,\\
&\frac{d^2\varphi}{d\rho_1 d\rho_2} + \frac{1}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho_2}\frac{d\varphi}{d\rho_1} + \frac{1}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho_1}\frac{d\varphi}{d\rho_2} = 0.\\
&h^2\left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2 + h_1^2\left(\frac{d\varphi}{d\rho_1}\right)^2 + h_2^2\left(\frac{d\varphi}{d\rho_2}\right)^2 = 1.
\end{aligned}\right.$$

Ainsi, lorsqu'on aura intégré, soit généralement, soit dans quelque cas particulier, les équations (1) et (2), on connaîtra les fonctions $h = \frac{1}{\mathrm{H}}$, $h_1 = \frac{1}{\mathrm{H}_1}$, $h_2 = \frac{1}{\mathrm{H}_2}$, en ρ, ρ_1, ρ_2; les formules (3) donneront les six courbures des surfaces conjuguées, les équations (4) leurs paramètres différentiels du second ordre. Mais, si l'on veut passer aux coordonnées rectilignes, il faudra, en outre, intégrer les équations (5); cette intégration conduira aux valeurs de x, y, z en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2, et l'élimination de deux des trois paramètres entre ces valeurs donnera les équations générales des surfaces conjuguées en coordonnées rectilignes.

§ II.

Considérons le cas où les systèmes conjugués sont tous les trois isothermes. On sait que, pour toute famille de surfaces isothermes, le rapport du paramètre différentiel du second ordre, au carré de celui du premier, est constant sur chaque surface individuelle; d'où l'on conclut facilement que si l'on prend, pour paramètre intégral, la fonction même qui exprimerait la température, le paramètre différentiel du second ordre doit être nul. (*Mémoire sur les surfaces isothermes*, tome II de ce Journal.)

Ainsi, dans le cas que nous nous proposons de traiter, les paramètres peuvent toujours être tels que l'on ait

$$\Delta_2\rho = 0, \quad \Delta_2\rho_1 = 0, \quad \Delta_2\rho_2 = 0,$$

ou, d'après les formules (4),

$$\frac{d\,\frac{h}{h_1 h_2}}{d\rho} = 0, \quad \frac{d\,\frac{h_1}{h_2 h}}{d\rho_1} = 0, \quad \frac{d\,\frac{h_2}{h h_1}}{d\rho_2} = 0,$$

ou enfin,

$$(6) \qquad \frac{d\,\frac{H_1 H_2}{H}}{d\rho} = 0, \quad \frac{d\,\frac{H_2 H}{H_1}}{d\rho_1} = 0, \quad \frac{d\,\frac{H H_1}{H_2}}{d\rho_2} = 0,$$

et il s'agit de trouver tous les groupes de fonctions H, H_1, H_2, qui peuvent vérifier à la fois les équations différentielles (1), (2), (6).

On aura les intégrales générales des équations (6) en posant

$$\frac{H_1 H_2}{H} = Q^2, \quad \frac{H_2 H}{H_1} = Q_1^2, \quad \frac{H H_1}{H_2} = Q_2^2,$$

d'où

$$(7) \qquad H = Q_1 Q_2, \quad H_1 = Q_2 Q, \quad H_2 = Q Q_1,$$

Q, Q_1, Q_2 étant respectivement indépendants de ρ, ρ_1, ρ_2; c'est-à-dire Q étant simplement fonction de ρ_1 et ρ_2, Q_1 de ρ_2 et ρ, Q_2 de ρ et ρ_1.

Des fonctions (7) on déduit par la différentiation

$$(8) \qquad \left\{\begin{array}{lll} \frac{dH}{d\rho_1} = Q_1 \frac{dQ_2}{d\rho_1}, & \frac{dH_1}{d\rho_2} = Q_2 \frac{dQ}{d\rho_2}, & \frac{dH_2}{d\rho} = Q \frac{dQ_1}{d\rho}, \\ \frac{dH}{d\rho_2} = Q_2 \frac{dQ_1}{d\rho_2}, & \frac{dH_1}{d\rho} = Q \frac{dQ_2}{d\rho}, & \frac{dH_2}{d\rho_1} = Q_1 \frac{dQ}{d\rho_1}, \\ \frac{d^2 H}{d\rho_1\, d\rho_2} = \frac{dQ_2}{d\rho_1} \frac{dQ_1}{d\rho_2}, & \frac{d^2 H_1}{d\rho_2\, d\rho} = \frac{dQ}{d\rho_2} \frac{dQ_2}{d\rho}, & \frac{d^2 H_2}{d\rho\, d\rho_1} = \frac{dQ_1}{d\rho} \frac{dQ}{d\rho_1}. \end{array}\right.$$

La substitution des valeurs (7) et (8) transforme ainsi qu'il suit les équations (1) et (2),

$$(9) \qquad \left\{\begin{array}{l} Q \frac{dQ_1}{d\rho_2} \frac{dQ_2}{d\rho_1} = Q_1 \frac{dQ_2}{d\rho_1} \frac{dQ}{d\rho_2} + Q_2 \frac{dQ}{d\rho_1} \frac{dQ_1}{d\rho_2}, \\ Q_1 \frac{dQ_2}{d\rho} \frac{dQ}{d\rho_2} = Q_2 \frac{dQ}{d\rho_2} \frac{dQ_1}{d\rho} + Q \frac{dQ_1}{d\rho_2} \frac{dQ_2}{d\rho}, \\ Q_2 \frac{dQ}{d\rho_1} \frac{dQ_1}{d\rho} = Q \frac{dQ_1}{d\rho} \frac{dQ_2}{d\rho_1} + Q_1 \frac{dQ_2}{d\rho_1} \frac{dQ}{d\rho}; \end{array}\right.$$

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}
&Q\,\frac{d\,\frac{1}{Q_1Q_2}\,\frac{dQ_2}{d\rho}}{d\rho}+Q_1\,\frac{d\,\frac{1}{QQ_2}\,\frac{dQ_2}{d\rho_1}}{d\rho_1}+\frac{Q_2^2}{Q^2Q_1^2}\,\frac{dQ}{d\rho_2}\,\frac{dQ_1}{d\rho_2}=0.\\
&Q_2\,\frac{d\,\frac{1}{QQ_1}\,\frac{dQ_1}{d\rho_2}}{d\rho_2}+Q\,\frac{d\,\frac{1}{Q_2Q_1}\,\frac{dQ_1}{d\rho}}{d\rho}+\frac{Q_1^2}{Q_2^2Q^2}\,\frac{dQ_2}{d\rho_1}\,\frac{dQ}{d\rho_1}=0,\\
&Q_1\,\frac{d\,\frac{1}{Q_2Q}\,\frac{dQ}{d\rho_1}}{d\rho_1}+Q_2\,\frac{d\,\frac{1}{Q_1Q}\,\frac{dQ}{d\rho_2}}{d\rho_2}+\frac{Q^2}{Q_1^2Q_2^2}\,\frac{dQ_1}{d\rho}\,\frac{dQ_2}{d\rho}=0.
\end{aligned}\right.$$

Le probleme est maintenant réduit à trouver trois fonctions : l'une, Q, de ρ_1 et ρ_2; la seconde, Q_1, de ρ_2 et ρ; la troisième, Q_2, de ρ et ρ_1, qui vérifient les six équations (9) et (10).

§ III.

Si l'un des trois systèmes conjugués, celui au paramètre ρ par exemple, se compose de plans parallèles, les deux courbures $\frac{1}{\gamma_1}$, $\frac{1}{c_2}$, des surfaces ρ, sont nulles généralement; il en est de même des deux courbures $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{\gamma}$, de l'arc ds. On a donc, d'après les formules (3),

$$\frac{dH_1}{d\rho}=0,\qquad \frac{dH_2}{d\rho}=0,\qquad \frac{dH}{d\rho_1}=0,\qquad \frac{dH}{d\rho_2}=0,$$

et par les valeurs (8),

$$\frac{dQ_2}{d\rho}=0,\qquad \frac{dQ_1}{d\rho}=0,\qquad \frac{dQ_2}{d\rho_1}=0,\qquad \frac{dQ_1}{d\rho_2}=0;$$

c'est-à-dire que les fonctions Q_1 et Q_2 sont constantes ainsi que H. Il est facile de voir que l'on pourra disposer de l'indétermination des paramètres, de telle sorte que $Q_1 = Q_2 = H = 1$; d'où résultera $H_1 = H_2 = Q$, seule fonction encore inconnue. Les équations (9) et (10) deviendront identiques, à l'exception de la dernière, qui se réduira à

$$(11)\qquad \frac{d\,\frac{1}{Q}\,\frac{dQ}{d\rho_1}}{d\rho_1}+\frac{d\,\frac{1}{Q}\,\frac{dQ}{d\rho_2}}{d\rho_2}=0,$$

et qui peut être vérifiée par une infinité de fonctions Q. On retombe ainsi dans la classe très-étendue des surfaces cylindriques orthogonales et isothermes, déjà suffisamment étudiée dans une Note spéciale (tome I^er^ de ce *Journal*).

Si l'un des trois systèmes conjugués, celui dont le paramètre est ρ, se compose de sphères concentriques, r étant le rayon variable, il faut prendre $\rho = \frac{1}{r}$, pour que $\Delta_2 \rho$ soit nul, et l'on a

$$h = \frac{1}{r^2} = \rho^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{dh}{d\rho_1} = 0, \quad \frac{dh}{d\rho_2} = 0,$$

ou, d'après les formules (3),

$$\frac{1}{c} = 0, \quad \frac{1}{\gamma} = 0;$$

en effet, tous les éléments dS sont des lignes droites, et les surfaces orthogonales conjuguées au système sphérique sont des cônes. De plus, les deux courbures $\frac{1}{\gamma_1}$, $\frac{1}{c_2}$, de chaque surface ρ, sont égales entre elles et à $\frac{1}{r} = \rho$; on a donc, d'après les formules (3),

$$\frac{1}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho} = \frac{1}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho} = \frac{1}{\rho};$$

ou bien l'on a

$$\mathrm{H} = \frac{1}{\rho^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{d\mathrm{H}}{d\rho_1} = 0, \quad \frac{d\mathrm{H}}{d\rho_2} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mathrm{H}_1}\frac{d\mathrm{H}_1}{d\rho} = \frac{1}{\mathrm{H}_2}\frac{d\mathrm{H}_2}{d\rho} = -\frac{1}{\rho};$$

relations qui donnent définitivement

$$(12) \qquad \mathrm{Q}_1 = \frac{a}{\rho}, \quad \mathrm{Q}_2 = \frac{1}{a\rho},$$

a étant une constante. Ces valeurs (12) de Q_1 et Q_2 rendent identiques les équations (9), ainsi que les deux premières (10); la dernière se réduit à

$$(13) \qquad a^2 \frac{d\frac{1}{\mathrm{Q}}\frac{d\mathrm{Q}}{d\rho_1}}{d\rho_1} + \frac{1}{a^2}\frac{d\frac{1}{\mathrm{Q}}\frac{d\mathrm{Q}}{d\rho_2}}{d\rho_2} + \mathrm{Q}^2 = 0,$$

et peut être vérifiée par un grand nombre de fonctions Q. On retrouve ainsi la classe des surfaces coniques orthogonales et isothermes, dont la généralité a été reconnue dans un Mémoire précédent (tome IV de ce Journal, page 126).

§ IV.

Supposons encore que les surfaces ρ et ρ_1 soient de révolution autour du même axe, et conséquemment les surfaces ρ_2 des plans méridiens. Les deux courbures $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{c_1}$, de la surface ρ_2, sont généralement nulles, on a donc, d'après les formules (3),

$$\frac{dH}{d\rho_2} = 0, \quad \frac{dH_1}{d\rho_2} = 0,$$

ou, dans les valeurs (8),

$$\frac{dQ_1}{d\rho_2} = 0, \quad \frac{dQ}{d\rho_2} = 0.$$

Ainsi Q_1 ne contient que ρ, nous le désignerons dorénavant par p; pareillement Q ne contient que ρ_1, et nous le désignerons par p_1; enfin Q_2 que nous remplacerons par F, contient toujours les deux variables ρ et ρ_1. Ces valeurs rendent identiques les deux premieres équations (9): la troisième devient, en désignant, pour simplifier, $\frac{dp}{d\rho}$ et $\frac{dp_1}{d\rho_1}$ par p' et p'_1:

$$\frac{p'p'_1}{pp_1} = \frac{p'}{p\,\mathrm{F}}\frac{d\mathrm{F}}{d\rho_1} + \frac{p'_1}{p_1\mathrm{F}}\frac{d\mathrm{F}}{d\rho}; \tag{14}$$

et les trois équations (10) se transforment ainsi

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\frac{d\,\frac{1}{p\,\mathrm{F}}\frac{d\mathrm{F}}{d\rho}}{d\rho} + \frac{1}{p_1}\frac{d\,\frac{1}{p_1\mathrm{F}}\frac{d\mathrm{F}}{d\rho_1}}{d\rho} = 0,\\
&\frac{1}{p^2}\frac{d\,\frac{p'}{p}}{d\rho} - \frac{p'}{p^3}\frac{1}{\mathrm{F}}\frac{d\mathrm{F}}{d\rho} + \frac{p'_1}{p_1^3}\frac{1}{\mathrm{F}}\frac{d\mathrm{F}}{d\rho_1} = 0,\\
&\frac{1}{p_1^2}\frac{d\,\frac{p'_1}{p_1}}{d\rho_1} + \frac{p'}{p^3}\frac{1}{\mathrm{F}}\frac{d\mathrm{F}}{d\rho} - \frac{p'_1}{p_1^3}\frac{1}{\mathrm{F}}\frac{d\mathrm{F}}{d\rho_1} = 0.
\end{aligned}\right. \tag{15}$$

Si l'on ajoute les deux dernières équations (15), il vient

$$(16)\qquad \frac{1}{p^2}\,\frac{d\frac{p'}{p}}{d\rho} + \frac{1}{p_1^2}\,\frac{d\frac{p'_1}{p_1}}{d\rho_1} = 0.$$

Or p ne contient que ρ, p_1 que ρ_1; il faut donc que, k désignant une constante, on ait séparément

$$\frac{1}{p^2}\,\frac{d\frac{p'}{p}}{d\rho} = k,\qquad \frac{1}{p_1^2}\,\frac{d\frac{p'_1}{p_1}}{d\rho_1} = -k.$$

On peut intégrer ces deux équations en les multipliant par $2p\,dp$, $2p_1\,dp_1$, ce qui les transforme ainsi

$$d.\left(\frac{p'}{p}\right)^2 = kd.p^2,\quad d.\left(\frac{p'_1}{p_1}\right)^2 = -kd.p_1^2,$$

d'où l'on conclut, A et B étant deux nouvelles constantes,

$$p' = \frac{dp}{d\rho} = p\sqrt{kp^2 - \mathrm{A}},\quad p'_1 = \frac{dp_1}{d\rho_1} = p_1\sqrt{\mathrm{B} - kp_1^2},$$

et enfin,

$$\rho = \int \frac{dp}{p\sqrt{kp^2 - \mathrm{A}}},\qquad \rho_1 = \int \frac{dp_1}{p_1\sqrt{\mathrm{B} - kp_1^2}}.$$

Si l'on pose

$$p = \varpi\sqrt{\mathrm{A}},\quad p_1 = \varpi_1\sqrt{\mathrm{B}},\quad k = \frac{1}{c^2},$$

ces équations deviennent

$$\frac{\sqrt{\mathrm{A}}}{c}.\rho = \int \frac{d\varpi}{\varpi\sqrt{\varpi^2 - c^2}},\qquad \frac{\sqrt{\mathrm{B}}}{c}.\rho_1 = \int \frac{d\varpi}{\varpi\sqrt{c^2 - \varpi^2}},$$

or on peut prendre pour paramètres $\frac{\sqrt{\mathrm{A}}}{c}.\rho$, et $\frac{\sqrt{\mathrm{B}}}{c}.\rho_1$, sans que les paramètres différentiels du second ordre cessent d'être nuls; on ne diminuera donc en rien la généralité du cas actuel, en prenant

$$(17)\qquad \begin{cases} p' = p\sqrt{p^2 - c^2}, & p'_1 = p_1\sqrt{c^2 - p_1^2},\\ \rho = \displaystyle\int_c^p \frac{dp}{p\sqrt{p^2 - c^2}}, & \rho_1 = \displaystyle\int_0^{p_1} \frac{dp_1}{p_1\sqrt{c^2 - p_1^2}}: \end{cases}$$

ces valeurs vérifient l'équation (16). Si l'on regarde maintenant F comme une fonction de p et p_1, et qu'on ait égard aux valeurs (17), l'équation (14) et les deux dernieres équations (15), lesquelles se réduisent à une seule, deviennent

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} &p\frac{d\mathrm{F}}{dp}+p_1\frac{d\mathrm{F}}{dp_1}=\mathrm{F},\\ &\mathrm{F}=\frac{p^2-c^2}{p}\frac{d\mathrm{F}}{dp}-\frac{c^2-p_1^2}{p_1}\frac{d\mathrm{F}}{dp_1}.\end{aligned}\right.$$

La première de ces équations réduit la seconde à

$$\frac{1}{p}\frac{d\mathrm{F}}{dp}+\frac{1}{p_1}\frac{d\mathrm{F}}{dp_1}=0,$$

équation aux différences partielles dont l'intégrale est

$$\mathrm{F}=\mathrm{f}(p^2-p_1^2);$$

or, si l'on pose

$$(p^2-p_1^2)=z,$$

cette valeur générale de F, substituée dans la premiere des équations (18), exige que l'on ait

$$2z\frac{d\mathrm{f}}{dz}=\mathrm{f},\quad \text{d'ou}\quad \mathrm{f}=\mathrm{G}\sqrt{z};$$

on doit donc prendre

$$(19)\qquad \mathrm{F}=\sqrt{p^2-p_1^2};$$

car la constante G, qui serait facteur du radical, pourrait toujours être ramenée à l'unité en changeant convenablement le paramètre ρ_2. On reconnaîtra facilement que cette valeur (19) de F vérifie la premiere des équations (15), en ayant égard aux relations (17).

Ainsi, p et p_1 étant déterminés par les relations (17), on a

$$\mathrm{Q}=p_1,\quad \mathrm{Q}_1=p,\quad \mathrm{Q}_2=\mathrm{F}=\sqrt{p^2-p_1^2};$$

d'où

$$\mathrm{H}=p\sqrt{p^2-p_1^2},\quad \mathrm{H}_1=p_1\sqrt{p^2-p_1^2},\quad \mathrm{H}_2=pp_1.$$

et enfin,

$$(20)\quad \begin{cases} h = \dfrac{1}{p\sqrt{p^2-p_1^2}}, \quad h_1 = \dfrac{1}{p_1\sqrt{p^2-p_1^2}}, \quad h_2 = \dfrac{1}{pp}, \\ \displaystyle\int_c^p \frac{dp}{p\sqrt{p^2-c^2}} = \rho, \quad \int_0^{p_1} \frac{dp_1}{p_1\sqrt{c^2-p_1^2}} = \rho_1. \end{cases}$$

Il s'agit maintenant de trouver en coordonnées rectilignes les équations des surfaces de révolution, orthogonales et isothermes, toutes caractérisées par les valeurs (20).

§ V.

Les valeurs (20), substituées dans les formules (3), donnent

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{c} = \dfrac{p_1\sqrt{c^2-p_1^2}}{(p^2-p_1^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \dfrac{1}{c} = 0, \quad \dfrac{1}{c} = \dfrac{-\sqrt{p^2-c^2}}{p\sqrt{p-p^2}}, \\ \dfrac{1}{\gamma} = 0, \quad \dfrac{1}{\gamma_1} = \dfrac{-p\sqrt{p^2-c}}{(p^2-p_1^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \dfrac{1}{\gamma_2} = \dfrac{-\sqrt{p^2-p^2}}{p_1\sqrt{c^2-p^2}} \end{cases}$$

Les deux limites de p sont c et l'infini, celles de p_1. zéro et c. Il résulte des expressions (21) que les deux courbures $\frac{1}{\gamma_1}$, $\frac{1}{c_2}$, des surfaces ρ, sont nulles, quel que soit p_1, quand $p = c$, ou $\rho = 0$; que les deux courbures $\frac{1}{\gamma_2}$, $\frac{1}{c}$, des surfaces ρ_1, sont l'une infinie, l'autre nulle, quel que soit p ou ρ, quand $p_1 = 0$, ou $\rho_1 = 0$. On conclut de là que la surface ρ_1, correspondante à $p_1 = 0$, se réduit à une droite, laquelle ne peut être que l'axe de révolution lui-même, et que la surface ρ correspondante à $p = c$ est une aire plane, laquelle est nécessairement perpendiculaire à la surface $p_1 = 0$, ou à l'axe de révolution.

Cet axe et cette aire plane, si intimement liés au système orthogonal que nous étudions, assignent aux coordonnées rectilignes leur position naturelle. En effet, il conviendra de prendre pour axe des z, l'axe de révolution ou la surface $\rho_1 = 0$, et pour plan des xy l'aire plane correspondante à $p = c$, ou à $\rho = 0$.

Ainsi, en intégrant les équations (5), afin de trouver les valeurs de x, y, z, en ρ, ρ_1, ρ_2, il faudra que x et y deviennent nuls pour $\rho_1 = 0$, ou $p_1 = 0$, et z pour $\rho = 0$, ou $p = c$. De plus, il est évident que x et y dépendront du paramètre ρ_2, ou de l'azimut des plans méridiens, mais que z en sera indépendant.

La première des équations (5), transformée en p et p_1, à l'aide des formules (20), devient

$$(p^2 - p_1^2)\frac{d^2\varphi}{dp\,dp_1} + p_1\frac{d\varphi}{dp} - p\frac{d\varphi}{dp_1} = 0; \tag{22}$$

si l'on y pose $\varphi = \mathrm{PP}_1$, P ne contenant que p, P_1 que p_1, on trouve

$$p^2 - \frac{p\mathrm{P}}{\left(\frac{d\mathrm{P}}{dp}\right)} = p_1^2 - \frac{p_1\mathrm{P}_1}{\left(\frac{d\mathrm{P}_1}{dp_1}\right)};$$

or le premier membre ne contient que p, le second que p_1, il faut donc que leur valeur commune A soit indépendante de p et p_1; on aura alors séparément

$$\frac{d\mathrm{P}}{\mathrm{P}} = \frac{pdp}{p^2 - \mathrm{A}}, \qquad \frac{d\mathrm{P}_1}{\mathrm{P}_1} = \frac{p_1dp_1}{p_1^2 - \mathrm{A}},$$

d'où

$$\mathrm{P} = \sqrt{p^2 - \mathrm{A}}, \quad \mathrm{P}_1 = \sqrt{p_1^2 - \mathrm{A}}.$$

Il suit de là que l'intégrale générale de l'équation (22) peut être mise sous la forme

$$\varphi = \sum \sqrt{\mathrm{B}(p^2 - \mathrm{A})(p_1^2 - \mathrm{A})}, \tag{23}$$

où B et A, constants relativement à p et p_1, varient d'un terme à l'autre de la série. Les trois coordonnées x, y, z, considérées comme des fonctions de p, p_1, et ρ_2, seront donc de la forme (23).

Mais s'il s'agit de x ou de y, comme elles doivent s'évanouir pour $p_1 = 0$, A sera nécessairement nul; le produit pp_1 sera facteur de tous les termes de la série; et si l'on pose $\sum\sqrt{\mathrm{B}} = \mathrm{M}$ pour x, $\sum\sqrt{\mathrm{B}} = \mathrm{N}$ pour y, on aura

$$x = pp_1\mathrm{M}, \quad y = pp_1\mathrm{N}; \tag{24}$$

M et N étant des fonctions encore inconnues du paramètre ρ_2 seul.

S'il s'agit de z, comme il doit s'évanouir pour $p=c$, il faudra que A soit égal à c^2, dans tous les termes de la série (23); et si l'on pose $\sum \sqrt{-B} = \frac{1}{g}$, on aura

$$(25) \qquad gz = \sqrt{p^2 - c^2}\sqrt{c^2 - p_1^2},$$

g étant constant, puisque z doit être indépendant de ρ_2.

Il ne reste plus qu'à déterminer les fonctions M et N et la constante g.

§ VI.

Les valeurs (24), mises successivement à la place de φ, dans la seconde et la troisième des équations (5), les vérifient, quelles que soient d'ailleurs les fonctions M et N; la valeur de z, formule (25), rend les mêmes équations identiques, puisque z, h, h_1, h_2, sont indépendants de ρ_2. Il n'y a donc plus que la dernière équation (5) dont la vérification nécessaire puisse servir à la détermination de M, N, et g.

Cette dernière équation (5), transformée en p, p_1, à l'aide des formules (20), devient

$$(26) \quad (p^2 - c^2)\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + (c^2 - p_1^2)\left(\frac{d\varphi}{dp_1}\right)^2 = (p^2 - p_1^2)\left[1 - \left(\frac{1}{pp_1}\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2\right]:$$

si l'on y substitue successivement, à la place de φ, les valeurs (24) de x et y, $(p^2 - p_1^2)$ devient facteur commun, et en supprimant ce facteur on a

$$c^2 M^2 = 1 - \left(\frac{dM}{d\rho_2}\right)^2, \quad c^2 N^2 = 1 - \left(\frac{dN}{d\rho}\right)^2;$$

d'où l'on conclut, par l'intégration, que M et N doivent être égales à l'une ou à l'autre des deux fonctions,

$$\frac{1}{c}\cos c\rho_2, \quad \frac{1}{c}\sin c\rho_2:$$

car la constante qu'il faudrait ajouter à l'arc $c\rho_2$ peut être supprimée.

Si l'on prend pour M l'une de ces valeurs, il faudra prendre l'autre pour N, sinon les valeurs (24) ne vérifieraient pas les équations

$$\frac{dx}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_2} + \frac{dy}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_2} = 0, \quad \frac{dx}{d\rho_1}\frac{dx}{d\rho_2} + \frac{dy}{d\rho_1}\frac{dy}{d\rho} = 0,$$

qui doivent avoir lieu, puisque les surfaces ρ, ρ_1, ρ_2, sont orthogonales, et que z ne contient pas ρ_2 dans le système d'axes choisi.

Si l'on substitue dans l'équation (26), à la place de φ, la valeur de z, formule (25), il vient

$$p^2(c^2 - p_1^2) + p_1^2(p^2 - c^2) = (p^2 - p_1^2)\,g^2,$$

ou, en réduisant et supprimant le facteur commun $(p^2 - p_1^2)$,

$$c^2 = g^2;$$

ainsi la constante g doit être égale à c.

On a donc enfin, pour les valeurs de x, y, z, en ρ, ρ_1, ρ_2,

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} cx &= pp_1 \cos c\rho_2,\\ cy &= pp_1 \sin c\rho_2,\\ cz &= \sqrt{p^2 - c^2}\,\sqrt{c^2 - p_1^2}. \end{aligned}\right.$$

L'élimination successive de p_1 et ρ_2, de ρ_2 et p, de p et p_1, entre ces trois équations, donne pour résultats,

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^2+y^2}{p^2} + \frac{z^2}{p^2-c^2} = 1,\\ &\frac{x^2+y^2}{p_1^2} - \frac{z^2}{c^2-p_1^2} = 1,\\ &\frac{y}{x} = \operatorname{tang} c\rho_2, \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire que les seuls systèmes de surfaces de révolution, à la fois orthogonales et isothermes, sont du second ordre.

§ VII.

La première des équations (28) ne représente que les ellipsoïdes de révolution autour du petit axe. Mais on peut, en changeant convenablement la constante c et les paramètres, transformer les équations (27) de manière à obtenir les ellipsoïdes de révolution autour du grand axe. En effet, si l'on pose

$$c^2 = -b^2,\quad p^2 = r^2 - b^2,\quad p_1^2 = r_1^2 - b^2,\quad \rho_2 = -r_2\sqrt{-1}.$$

les équations (27) deviennent

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} bx &= \sqrt{r^2 - b^2}\,\sqrt{b^2 - r_1^2}\cos br_2,\\ by &= \sqrt{r^2 - b^2}\,\sqrt{b^2 - r_1^2}\sin br_2,\\ bz &= rr_1,\end{aligned}\right.$$

et donnent par l'élimination successive de deux des paramètres r, r_1, r_2,

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{z^2}{r^2} + \frac{x^2+y^2}{r^2-b^2} = 1,\\ &\frac{z^2}{r_1^2} - \frac{x^2+y^2}{b^2-r_1^2} = 1,\\ &\frac{y}{x} = \text{tang}\, br_2;\end{aligned}\right.$$

or, la première de ces équations représente des ellipsoïdes de révolution autour du grand axe.

Ainsi les équations (27) comprennent implicitement les deux groupes généraux des surfaces de révolution du second ordre, à la fois orthogonales et isothermes. Si le groupe aux ellipsoïdes aplatis se présente ici plus naturellement que le système aux ellipsoïdes allongés, cela tient uniquement à la méthode adoptée pour intégrer l'équation (16). Par une autre méthode, que nous allons développer, on est conduit directement aux groupes (29) et (30), et au contraire par transformation aux groupes (27) et (28).

§ VIII.

Remontons aux équations (14) et (15), dans lesquelles p ne contient que ρ, p_1 que ρ_1, et F est fonction de ρ et ρ_1. En ajoutant les deux dernières équations (15), on obtient l'équation (16), qu'il s'agit d'intégrer d'une autre manière. Soient r et r_1 deux nouvelles fonctions, l'une de ρ, l'autre de ρ_1, données par les équations

$$dr = p^2 d\rho,\quad dr_1 = p_1^2 d\rho_1,$$

d'où

$$(31)\quad \rho = \int \frac{dr}{p^2},\quad \rho_1 = \int \frac{dr_1}{p_1^2};$$

en regardant maintenant p comme fonction de r, p_1 de r_1, l'équation (16) se mettra sous la forme

$$(32) \qquad \frac{d^2(p^2)}{dr^2} + \frac{d^2(p_1^2)}{dr_1^2} = 0,$$

et k représentant une constante, on devra avoir séparément

$$\frac{d^2(p^2)}{dr^2} = 2k, \quad \frac{d^2(p_1^2)}{dr_1^2} = -2k.$$

d'où l'on conclut, A et B étant deux nouvelles constantes,

$$p^2 = kr^2 - \mathrm{A}, \quad p_1^2 = \mathrm{B} - kr_1^2.$$

et enfin,

$$\rho = \int \frac{dr}{kr^2 - \mathrm{A}}, \quad \rho_1 = \int \frac{dr}{\mathrm{B} - kr_1^2}.$$

Si l'on pose

$$r = \varpi\sqrt{\mathrm{A}}, \quad r_1 = \varpi_1\sqrt{\mathrm{B}}, \quad k = \frac{1}{b^2},$$

les équations précédentes deviennent

$$\frac{\sqrt{\mathrm{A}}}{b^2}\rho = \int \frac{d\varpi}{\varpi^2 - b^2}, \quad \frac{\sqrt{\mathrm{B}}}{b^2}\rho_1 = \int \frac{d\varpi}{b^2 - \varpi^2};$$

or, on peut prendre pour paramètres $\frac{\sqrt{\mathrm{A}}}{b^2}\rho$, $\frac{\sqrt{\mathrm{B}}}{b^2}\rho_1$, sans que les paramètres différentiels du second ordre cessent d'être nuls; on ne diminuera donc pas la généralité du cas actuel, en prenant

$$(33) \qquad \begin{cases} \rho = \int_b^r \frac{dr}{r^2 - b^2}, & \rho_1 = \int_0^{r_1} \frac{dr}{b^2 - r^2}, \\ p = \sqrt{r^2 - b^2}, & p_1 = \sqrt{b^2 - r_1^2}. \end{cases}$$

Ces valeurs vérifient l'équation (16). Si l'on regarde F comme fonction de r et r_1, l'équation (14) et les deux dernières équations (15) donnent, en réduisant,

$$r\frac{d\mathrm{F}}{dr} + r_1\frac{d\mathrm{F}}{dr_1} = \mathrm{F},$$

$$\frac{1}{r}\frac{d\mathrm{F}}{dr} + \frac{1}{r_1}\frac{d\mathrm{F}}{dr_1} = 0,$$

et conduisent, par un calcul déjà fait, § IV, à

$$(34) \qquad F = \sqrt{r^2 - r_1^2},$$

forme qui vérifie aussi la première des équations (15).

On a enfin, pour les valeurs de h, h_1, h_2, qu'il s'agissait de trouver,

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{lll} h = \dfrac{1}{\sqrt{r^2-b^2}\sqrt{r^2-r_1^2}}, & h_1 = \dfrac{1}{\sqrt{b^2-r_1^2}\sqrt{r^2-r_1^2}}, & h_2 = \dfrac{1}{\sqrt{r^2-b^2}\sqrt{b^2-r^2}}, \\ \displaystyle\int_b^r \frac{dr}{r^2-b^2} = \rho, & \displaystyle\int_0^{r_1} \frac{dr_1}{b^2-r_1^2} = \rho_1; & \end{array} \right.$$

à l'aide de ces valeurs on peut calculer les six courbures (3); conclure de leurs propriétés le système d'axes rectilignes qu'il convient de choisir; intégrer les équations (5), en suivant identiquement la marche développée aux §§ V et VI, et l'on arrive alors aux équations (29) et (30).

§ IX.

Abordons maintenant le cas général, c'est-à-dire l'intégration des équations (9) et (10), sans supposer qu'aucune des six courbures soit généralement nulle. Q, Q_1, Q_2 sont alors respectivement fonctions de (ρ_1, ρ_2), de (ρ_2, ρ), de (ρ, ρ_1). Posons, pour simplifier,

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q = A \dfrac{dQ}{d\rho_1} = B \dfrac{dQ}{d\rho_2}, \\ Q_1 = A_1 \dfrac{dQ}{d\rho_2} = B_1 \dfrac{dQ}{d\rho}, \\ Q_2 = A_2 \dfrac{dQ}{d\rho} = B_2 \dfrac{dQ_2}{d\rho_1}. \end{array} \right.$$

Les équations (9) se transforment ainsi,

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} AA_1 + BB_2 = AB, \\ A_1A_2 + B_1B = A_1B_1, \\ A_2A + B_2B_1 = A_2B_2; \end{array} \right.$$

d'où l'on conclut, en ajoutant les deux premières respectivement multipliées par B_1 et A,

$$AA_1A_2 + BB_1B_2 = 0. \tag{38}$$

D'après les relations (36), A et B ne contiennent pas ρ, A_1 et B_1 pas ρ_1, A_2 et B_2 non ρ_2. Or, les équations (37), ayant lieu pour toutes les valeurs de ρ, ρ_1, ρ_2, auront encore lieu lorsque l'on y fera. ou $\rho = 0$, ou $\rho_1 = 0$, ou $\rho_2 = 0$. Désignons ainsi qu'il suit les valeurs que prennent A. B. A_1. B_1. A_2. B_2, quand l'une des variables qu'elles contiennent est nulle :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Pour } \rho = 0 : \; A = A, \; B = B, \; A_1 = \alpha_2, \; B_1 = b_2, \; A_2 = a_1, \; B_2 = \beta_1 ; \\ \text{Pour } \rho_1 = 0 : \; A = a_2, \; B = \beta_2, \; A_1 = A_1, \; B_1 = B_1, \; A_2 = \alpha, \; B_2 = b ; \\ \text{Pour } \rho_2 = 0 : \; A = \alpha_1, \; B = b_1, \; A_1 = a, \; B_1 = \beta, \; A_2 = A_2, \; B_2 = B_2. \end{array}\right. \tag{39}$$

a, α, b, β, ne contiennent que ρ; a_1, α_1, b_1, β_1, que ρ_1; a_2, α_2, b_2, β_2, que ρ_2. Les équations (37) deviendront alors

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Pour } \rho = 0. & \text{Pour } \rho_1 = 0. & \text{Pour } \rho_2 = 0. \\ A\alpha_2 + B\beta_1 = AB, & a_2A_1 + \beta_2 b = a_2\beta_2, & \alpha_1 a + b_1B_2 = \alpha_1 b_1. \\ \alpha_2 a_1 + b_2 B = \alpha_2 b_2, & A_1\alpha + B_1\beta_2 = A_1B_1. & aA_2 + \beta b_1 = a\beta. \\ a_1 A + \beta_1 b_2 = a_1\beta_1, & \alpha a_2 + bB_1 = \alpha b. & A_2\alpha_1 + B_2 b_1 = A_2B_2. \end{array}\right. \tag{40}$$

Parmi ces neuf équations, celles, au nombre de six, qui ne contiennent qu'une des fonctions A, B, A_1, B_1, A_2, B_2, donnent pour les valeurs de ces fonctions

$$\left\{\begin{array}{lll} A = \frac{\beta_1}{a_1}(a_1 - b_2); & A_1 = -\frac{\beta_2}{a_2}(b - a_2). & A_2 = \frac{\beta}{a}(a - b_1). \\ B = -\frac{\alpha_2}{b_2}(a_1 - b_2), & B_1 = \frac{\alpha}{b}(b - a_2). & B_2 = -\frac{\alpha}{b}(a - b_1). \end{array}\right. \tag{41}$$

et les trois autres équations (40) sont vérifiées par ces valeurs.

L'équation (38) devant être satisfaite, il faudra que l'on ait

$$\frac{\beta\beta_1\beta_2}{aa_1a_2} = \frac{\alpha\alpha_1\alpha_2}{bb_1b_2}. \tag{42}$$

§ X.

Les valeurs (41), substituées dans les relations (3), donnent

$$(43)\quad \left\{\begin{array}{lll} \frac{1}{Q}\frac{dQ}{d\rho_1} = \frac{1}{A} = \frac{a_1}{(a_1 - b_2)\beta_1}, & \frac{1}{Q}\frac{dQ}{d\rho_2} = \frac{1}{B} = -\frac{b_2}{(a_1 - b_2)\alpha_2}, \\ \frac{1}{Q_1}\frac{dQ_1}{d\rho} = \frac{1}{A_1} = -\frac{a}{(b - a_2)\beta_2}, & \frac{1}{Q_1}\frac{dQ_1}{d\rho_2} = \frac{1}{B_1} = \frac{b}{(b - a_2)\alpha}, \\ \frac{1}{Q_2}\frac{dQ_2}{d\rho} = \frac{1}{A_2} = \frac{a}{(a - b_1)\beta}, & \frac{1}{Q_2}\frac{dQ_2}{d\rho_1} = \frac{1}{B_2} = -\frac{b}{(a - b_1)\alpha}; \end{array}\right.$$

ce qui conduit aux relations différentielles suivantes, comme conditions d'intégrabilité :

$$\frac{a_1}{\beta_1}\frac{db_2}{d\rho_2} = \frac{b_2}{\alpha_2}\frac{da_1}{d\rho_1}, \quad \frac{a_2}{\beta_2}\frac{db}{d\rho} = \frac{b}{\alpha}\frac{da_2}{d\rho_2}, \quad \frac{a}{\beta}\frac{db}{d\rho} = \frac{b_1}{\alpha_1}\frac{da}{d\rho};$$

d'où l'on conclut

$$(44)\quad \left\{\begin{array}{lll} \frac{b_2}{\alpha_2} = i\frac{db_2}{d\rho_2}, & \frac{b}{\alpha} = i_1\frac{db}{d\rho}, & \frac{b}{\alpha} = i_2\frac{db}{d\rho}, \\ \frac{a_1}{\beta_1} = i\frac{da_1}{d\rho}, & \frac{a_2}{\beta} = i_1\frac{da_2}{d\rho}, & \frac{a}{\beta} = i_2\frac{da}{d\rho}, \end{array}\right.$$

i, i_1, i_2 étant nécessairement constants.

De ces valeurs (44) on déduit, par l'intégration des équations (43),

$$(45)\quad Q = (a_1 - b_2)^i, \quad Q_1 = (b - a_2)^{i_1}, \quad Q_2 = (a - b_1)^{i_2};$$

en outre, ces mêmes valeurs (44), combinées avec la relation nécessaire (42), donnent

$$\frac{db}{d\rho}\frac{db_1}{d\rho_1}\frac{db_2}{d\rho_2} = \frac{da}{d\rho}\frac{da_1}{d\rho_1}\frac{da_2}{d\rho_2},$$

équation qui, pour être satisfaite, exige que l'on ait

$$(46)\quad \left\{\begin{array}{lll} a = m\text{f}, & a_1 = m_1\text{f}_1, & a_2 = m_2\text{f}_2, \\ b = n\text{f}, & b_1 = n_1\text{f}_1, & b_2 = n_2\text{f}_2, \end{array}\right.$$

f ne contenant que ρ, f_1 que ρ_1, f_2 que ρ_2 [*]; m, n, m_1, n_1, m_2, n_2

---

[*] On pourrait penser que les valeurs (46) ne sont pas les plus générales, et qu'il

étant des constantes liées entre elles par la relation

$$mm_1m_2 = nn_1n_2. \tag{47}$$

Par ces valeurs (46) les fonctions Q, Q_1, Q_2 (45) se présentent sous la forme

$$Q = (m_1\mathrm{f}_1 - n_2\mathrm{f}_2)^i, \quad Q_1 = (n\mathrm{f} - m_2\mathrm{f}_2)^{i_1}, \quad Q_2 = (m\mathrm{f} - n_1\mathrm{f}_1)^{i_2};$$

mais, pour que ces valeurs vérifient réellement les équations (9), il faut que $i_2 = i_1 = i$. En effet, lorsqu'on les substitue dans la première (9), par exemple, on trouve

$$i(i_2nn_1n_2 - i_1mm_1m_2)\mathrm{f} + i_1(i - i_2)n_1m_1m_2\mathrm{f}_1 + i_2(i_1 - i)m_2n_1n_2\mathrm{f}_2 = 0;$$

et, comme $nn_1n_2 = mm_1m_2$ (47), cette équation ne peut etre satisfaite, quels que soient f, f_1, f_2, que si l'on a $i_2 = i_1 = i$.

---

manque une constante dans chacun des groupes (a, b) (a_1, b_1), (a_2, b_2); mais cette plus grande généralité n'est qu'apparente. En effet, si l'on pose

$$a = m\mathrm{f} + r_2, \quad a_1 = m_1\mathrm{f}_1 + r, \quad a_2 = m_2\mathrm{f}_2 - r_1,$$
$$b = n\mathrm{f}, \qquad b_1 = n_1\mathrm{f}_1, \qquad b_2 = n_2\mathrm{f}_2,$$

m, m_1, m_2, n, n_1, n_2 vérifiant nécessairement la relation (47), et les trois autres constantes r, r_1, r_2 etant arbitraires, les valeurs de Q, Q_1, Q_2 (45) deviennent

$$Q = (m_1\mathrm{f}_1 - n_2\mathrm{f}_2 + r)^i, \quad Q_1 = (n\mathrm{f} - m_2\mathrm{f}_2 + r_1)^{i_1}, \quad Q_2 = (m\mathrm{f} - n_1\mathrm{f}_1 + r_2)^{i_2}.$$

Pour que ces valeurs puissent vérifier les trois équations (9), quels que soient f, f_1, f_2, il faut d'abord, comme le texte le démontre, que les exposants i, i_1, i_2 soient égaux, et ensuite que les constantes r, r_1, r_2 soient liées par les équations

$$m_2n_1r - n_1n_2r_1 + m_1m_2r_2 = 0, \quad m_2mr - mn_2r_1 + n_2nr_2 = 0, \quad nn_1r - mm_1r_1 + m_1nr = 0.$$

Or, on satisfait généralement à ces relations en prenant

$$r = m_1\alpha_1 - n_2\alpha_2, \quad r_1 = n\alpha - m_2\alpha_2, \quad r_2 = m\alpha - n_1\alpha_1,$$

α, α_1, α_2 étant trois nouvelles constantes; d'où résulte

$$Q = [m_1(\mathrm{f}_1 + \alpha_1) - n_2(\mathrm{f}_2 + \alpha_2)]^i, \quad Q_1 = [n(\mathrm{f} + \alpha) - m_2(\mathrm{f}_2 + \alpha_2)]^i, \quad Q_2 = [m(\mathrm{f} + \alpha) - n_1(\mathrm{f}_1 + \alpha_1)]^i,$$

ou plus simplement les valeurs (48), puisque, les fonctions f, f_1, f_2 etant indeterminees, on peut supprimer les constantes α, α_1, α_2.

Donc enfin, les formes les plus générales des fonctions Q, Q_1, Q_2, qui puissent vérifier les équations (9), sont

$$(48)\quad Q=(m_1 f_1 - n_2 f_2)^i,\quad Q_1=(nf - m_2 f_2)^i,\quad Q_2=(mf - n_1 f_1)^i,$$

dans lesquelles m, m_1, m_2, n, n_1, n_2 sont des constantes liées entre elles par la relation (47), f une fonction de ρ, f_1 de ρ_1, f_2 de ρ_2.

Il s'agit maintenant de déterminer les fonctions f, f_1, f_2, l'exposant i, et les constantes m, m_1, m_2, n, n_1, n_2, de telle sorte que les valeurs (48) vérifient les équations différentielles (10).

§ XI.

Posons, pour simplifier,

$$(49)\quad \left\{\begin{array}{lll} m_1 f_1 - n_2 f_2 = q, & nf - m_2 f_2 = q_1, & mf - n_1 f_1 = q_2; \\ Q = q^i, & Q_1 = q_1^i, & Q_2 = q_2^i; \\ \frac{df}{d\rho} = f',\ \frac{d^2f}{d\rho^2} = f''; & \frac{df_1}{d\rho_1} = f'_1,\ \frac{d^2f_1}{d\rho_1^2} = f''_1; & \frac{df_2}{d\rho_2} = f'_2,\ \frac{d^2f_2}{d\rho_2^2} = f''_2 \end{array}\right.$$

Les équations (10), développées, deviennent alors

$$(50)\quad \left\{\begin{array}{l} q^{2i}\left(mf'' - \frac{m^2}{q_2}f'^2 - \frac{imn}{q_1}f'^2\right) - q_1^{2i}\left(n_1 f''_1 + \frac{n_1^2}{q_2}f'^2_1 - \frac{im_1n_2}{q}f'^2_1\right) + q_2^{2i-1}\frac{im_2n}{qq}f'^2_2 = 0, \\ q^{2i}\left(nf'' - \frac{n^2}{q_1}f'^2 - \frac{imn}{q_2}f'^2\right) - q_1^{2i+1}\frac{im_1n_1}{q_2q}f'^2_1 - q_2^{2i}\left(m_2 f''_2 + \frac{m_2^2}{q_1}f'^2_1 + \frac{im_2n_2}{q}f'^2_2\right) = 0, \\ q^{2i+1}\frac{imn}{q_1q_2}f'^2 + q_1^{2i}\left(m_1 f''_1 - \frac{m_1^2}{q}f'^2_1 + \frac{im_1n_1}{q_2}f'^2_1\right) - q_2^{2i}\left(n_2 f''_2 + \frac{n_2^2}{q}f'^2_2 + \frac{im_2n_2}{q}f'^2_2\right) = 0. \end{array}\right.$$

On peut poser

$$f'^2 = F,\quad f'^2_1 = F_1,\quad f'^2_2 = F_2,$$

et regarder F comme fonction de f, F_1 de f_1, F_2 de f_2, d'où

$$(51)\quad \left\{\begin{array}{l} \rho = \int \frac{df}{\sqrt{F}},\quad \rho_1 = \int \frac{df_1}{\sqrt{F_1}},\quad \rho_2 = \int \frac{df_2}{\sqrt{F_2}}, \\ f'' = \frac{1}{2}\frac{dF}{df},\quad f''_1 = \frac{1}{2}\frac{dF_1}{df_1},\quad f''_2 = \frac{1}{2}\frac{dF_2}{df_2}. \end{array}\right.$$

Les équations (50) deviennent alors

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} & mq^{2i+1}\left(q_1\frac{dF}{df}-\frac{2mq_1}{q_2}F-2inF\right)-nq_1^{2i+1}\left(q\frac{dF_1}{df_1}+\frac{2n_1q}{q_2}-2im_1F_1\right)+2im_2n_2q_2^{2i+1}F_2=0,\\ & nq^{2i-1}\left(q_2\frac{dF}{df}-\frac{2nq_2}{q_1}F-2imF\right)-2im_1n_1q_1^{2i+1}F_1-m_2q_2^{2i+1}\left(q\frac{dF_2}{df_2}+\frac{2m_2q}{q_1}F_2+2in_2F_2\right)=0,\\ & 2mnq^{2i+1}F+m_1q_1^{2i+1}\left(q_2\frac{dF_1}{df_1}-\frac{2m_1q_2}{q}F_1+2in_1F_1\right)-n_2q_2^{2i+1}\left(q\frac{dF_2}{df_2}+\frac{2n_2q_1}{q}F_2+2im_2F_2\right)=0. \end{aligned}\right.$$

Si l'on ajoute ces trois équations, après les avoir multipliées, la première par nn_2q_2, la seconde par $-mn_2q_1$, la troisième par mm_2q. les termes en $\frac{dF}{df}$, $\frac{dF_1}{df_1}$, $\frac{dF_2}{df_2}$ se détruisent; de plus, à l'aide de la relation (47) et de l'identité $mn_2q_1 = nn_2q_2 + mm_2q$, on met facilement le résultat sous la forme

$$(53)\qquad 2nm_2(2i-1)\left(m_2q^{2i+2}F+\frac{mm_1}{n}\frac{n_1n_2}{m_2}q_1^{2i+2}F_1+n_2^2q_2^{2i+2}F_2\right)=0.$$

Or, d'après la relation (47),

$$\frac{mm_1}{n}=\frac{n_1n_2}{m_2},$$

et le facteur

$$\left[m^2q^{2i+2}f'^2+\left(\frac{n_1n_2}{m_2}\right)^2q_1^{2i+2}f'^2_1\qquad {}_2^2q_2^{2i+2}f'^2_2\right]$$

est essentiellement positif; l'équation (53) ne peut donc être satisfaite que par l'annulation du facteur $(2i-1)$.

Ainsi $i=\frac{1}{2}$, et l'on a

$$(54)\qquad Q=\sqrt{m_1f_1-n_2f_2},\quad Q_1=\sqrt{nf-m_2f_2},\quad Q_2=\sqrt{mf-n_1f_1}.$$

Faisant donc $i=\frac{1}{2}$, dans les équations (52), elles deviennent

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned} & mq\left[\frac{dF}{df}-\left(\frac{2m}{q_2}+\frac{n}{q_1}\right)F\right]-n_1q_1\left[\frac{dF_1}{df_1}+\left(\frac{2n_1}{q_2}-\frac{m_1}{q}\right)F_1\right]+m_2n_2\frac{q_2^2}{qq_1}F_2=0,\\ & nq\left[\frac{dF}{df}-\left(\frac{2n}{q_1}+\frac{m}{q_2}\right)F\right]-m_1n_1\frac{q_1^2}{q_2q}F_1-m_2q_2\left[\frac{dF_2}{df_2}+\left(\frac{2m_2}{q_1}+\frac{n_2}{q}\right)F_2\right]=0,\\ & mn\frac{q^2}{q_1q_2}F+m_1q_1\left[\frac{dF_1}{df_1}-\left(\frac{2m_1}{q}-\frac{n_1}{q_2}\right)F_1\right]-n_2q_2\left[\frac{dF_2}{df_2}+\left(\frac{2n_2}{q}+\frac{m_2}{q_1}\right)F_2\right]=0, \end{aligned}\right.$$

et l'équation (53) étant maintenant identique, l'une des équations (55) est une conséquence des deux autres.

Le problème se trouve actuellement ramené à l'intégration des équations (55), ou à la détermination des fonctions F de $\mathfrak{f}$, F_1 de $\mathfrak{f}_1$, F_2 de $\mathfrak{f}_2$, qui puissent vérifier ces équations (55), dans lesquelles q, q_1, q_2 ont, en $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$, les valeurs (49).

§ XII.

On peut admettre que F_2, fonction de $\mathfrak{f}_2$, s'annule pour une certaine valeur $\mathfrak{f}_2 = \varphi_2$, φ_2 étant constant. Par cette valeur φ_2 de $\mathfrak{f}_2$, q devient $(m_1\mathfrak{f}_1 - n_2\varphi_2)$ ou fonction de $\mathfrak{f}_1$ seul, q_1 devient $(n\mathfrak{f} - m_2\varphi_2)$ ou fonction de $\mathfrak{f}$ seul, et la première équation (55) donne

$$(56)\qquad (m\mathfrak{f} - n_1\mathfrak{f}_1)\left(m\,\frac{d\,\dfrac{F}{n\mathfrak{f} - m_2\varphi_2}}{d\mathfrak{f}} - n_1\,\frac{d\,\dfrac{F_1}{m_1\mathfrak{f}_1 - n_2\varphi_2}}{d\mathfrak{f}_1}\right) = 2m^2\,\frac{F}{n\mathfrak{f} - m_2\varphi_2} + 2n_1^2\,\frac{F_1}{m_1\mathfrak{f}_1 - n_2\varphi_2}$$

Or la première équation (55) doit être satisfaite pour toute valeur de $\mathfrak{f}_2$; les fonctions F et F_1, qui sont indépendantes de cette variable, doivent donc vérifier l'équation (56).

Soit posé, pour simplifier,

$$\frac{d\,\dfrac{F}{n\mathfrak{f} - m_2\varphi_2}}{d\mathfrak{f}} = \mathcal{F}, \qquad \frac{d\,\dfrac{F_1}{m_1\mathfrak{f}_1 - n_2\varphi_2}}{d\mathfrak{f}_1} = \mathcal{F}_1;$$

l'équation (56) peut s'écrire ainsi

$$(m\mathfrak{f} - n_1\mathfrak{f}_1)(m\mathcal{F} - n_1\mathcal{F}_1) = 2m^2\int\mathcal{F}d\mathfrak{f} + 2n_1^2\int\mathcal{F}_1\,d\mathfrak{f}_1.$$

et si on la différentie successivement par rapport à $\mathfrak{f}$ et à $\mathfrak{f}_1$, on trouve

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\mathfrak{f}} = -\frac{d\mathcal{F}_1}{d\mathfrak{f}_1} = \frac{m\mathcal{F} + n_1\mathcal{F}_1}{m\mathfrak{f} - n_1\mathfrak{f}_1};$$

or, la valeur commune de ces trois quantités ne peut être qu'une constante, puisque la première doit être indépendante de $\mathfrak{f}_1$, et la seconde de $\mathfrak{f}$; donc les deux coefficients différentiels

$$\frac{d^2\,\dfrac{F}{n\mathfrak{f} - m_2\varphi_2}}{d\mathfrak{f}^2}, \qquad \frac{d\,\dfrac{F_1}{m_1\mathfrak{f}_1 - n_2\varphi_2}}{d\mathfrak{f}_1^2},$$

sont constants et de signes contraires. D'où il suit que F et F_1 sont des polynômes du troisième degré. l'un en f. l'autre en f_1. respectivement divisibles par $(nf - m_2\varphi_2)$ et $(m_1 f_1 - n_2\varphi_2)$; F_2 l'étant par $(f_2 - \varphi_2)$.

On démontrerait de la même manière, à l'aide de la seconde équation (55), que F_1 étant divisible par $(f_1 - \varphi_1)$, F_2 et F sont respectivement divisibles par $(m_1\varphi_1 - n_2 f_2)$ et $(mf - n_1\varphi_1)$; et. à l'aide de la troisieme équation (55), que F étant divisible par $(f - \varphi)$, F_1 et F_2 sont respectivement divisibles par $(m\varphi - n_1 f_1)$ et $(n\varphi - m_2 f_2)$. De plus. les différentielles secondes des quotients obtenus par ces divisions sont constantes. et l'on doit avoir

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\dfrac{F}{nf - m_2\varphi_2}}{df^2} + \frac{d^2\dfrac{F_1}{m_1 f_1 - n_2\varphi_2}}{df_1^2} = 0.\\ &\frac{d^2\dfrac{F_2}{m_1\varphi_1 - n_2 f_2}}{df_2^2} + \frac{d^2\dfrac{F}{mf - n_1\varphi_1}}{df^2} = 0.\\ &\frac{d^2\dfrac{F_1}{m\varphi - n_1 f_1}}{df_1^2} + \frac{d^2\dfrac{F_2}{n\varphi - m_2 f_2}}{df_2^2} = 0.\end{aligned}\right.$$

Les fonctions F, F_1. F_2 sont donc nécessairement de la forme

$$\begin{aligned} F &= A\,(f - \varphi)(mf - n_1\varphi_1)(nf - m_2\varphi_2).\\ F_1 &= A_1(f_1 - \varphi_1)(m_1 f_1 - n_2\varphi_2)(m\varphi - n_1 f_1).\\ F_2 &= A_2(f_2 - \varphi_2)(n\varphi - m_2 f_2)(m_1\varphi_1 - n_2 f_2).\end{aligned}$$

et, pour que les relations (57) soient satisfaites, il faut que les constantes A, A_1, A_2 soient telles que

$$A m = A_1 n_1.\quad A_2 m_2 = A n.\quad A_1 m_1 = A_2 n_2,$$

conditions qui seront remplies en prenant

$$A = n_1 n_2\lambda,\quad A_1 = mn_2\lambda,\quad A_2 = mm_1\lambda;$$

la constante λ qui disparaîtrait comme facteur commun. lors de la vérification des équations (55), peut être prise égale à l'unité.

Ainsi les valeurs générales de F. F_1, F_2. ou les intégrales des équations (55), doivent être

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{F} &= n_1 n_2 (\mathrm{f} - \varphi)(m\mathrm{f} - n_1\varphi_1)(n\mathrm{f} - m_2\varphi_2),\\ \mathrm{F}_1 &= m n_2 (\mathrm{f}_1 - \varphi_1)(m_1\mathrm{f}_1 - n_2\varphi_2)(m\varphi - n_1\mathrm{f}_1),\\ \mathrm{F}_2 &= m m_1 (\mathrm{f}_2 - \varphi_2)(n\varphi - m_2\mathrm{f}_2)(m_1\varphi_1 - n_2\mathrm{f}_2);\end{aligned}\right.$$

φ, φ_1, φ_2 étant les trois constantes introduites par l'intégration. On peut supposer que ces constantes sont les limites inférieures des intégrales (51), en sorte qu'elles correspondent respectivement aux valeurs zéro des paramètres ρ, ρ_1, ρ_2.

§ XIII.

Mais il est nécessaire de vérifier que les fonctions (58) rendent identiques les équations (55). Pour faire plus commodément cette vérification, posons

$$\mathrm{f} - \varphi = p, \quad \mathrm{f}_1 - \varphi_1 = p_1, \quad \mathrm{f}_2 - \varphi_2 = p_2,$$

d'où

$$\begin{aligned} m\mathrm{f} - n_1\varphi_1 &= q_2 + n_1 p_1, & n\mathrm{f} - m_2\varphi_2 &= q_1 + m_2 p_2,\\ m_1\mathrm{f}_1 - n_2\varphi_2 &= q + n_2 p_2, & m\varphi - n_1\mathrm{f}_1 &= q_2 - m p,\\ n\varphi - m_2\mathrm{f}_2 &= q_1 - n p, & m_1\varphi_1 - n_2\mathrm{f}_2 &= q - m_1 p_1;\end{aligned}$$

les fonctions (58) pourront s'écrire ainsi

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{F} &= n_1 n_2 p (q_2 + n_1 p_1)(q_1 + m_2 p_2),\\ \mathrm{F}_1 &= m n_2 p_1 (q + n_2 p_2)(q_2 - m p),\\ \mathrm{F}_2 &= m m_1 p_2 (q_1 - n p)(q - m_1 p_1),\end{aligned}\right.$$

et l'on déduira aisément

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{f}} &= n_1 n_2 [(q_2 + n_1 p_1)(q_1 + m_2 p_2) + m p (q_1 + m_2 p_2) + n p (q_2 + n_1 p_1)],\\ \frac{d\mathrm{F}_1}{d\mathrm{f}} &= m n_2 [(q + n_2 p_2)(q_2 - m p) + m_1 p_1 (q_2 - m p) - n_1 p_1 (q + n_2 p_2)].\end{aligned}\right.$$

Les valeurs (59) et (60) étant substituées dans la première des équations (55), on trouve, après plusieurs réductions et la suppression du facteur commun mn_2p_2.

$$(61)\quad \left\{\begin{aligned} & m_2n_1q\left[q_2+n_1p_1-mp-\frac{2.mp.n_1p_1}{q_2}-\frac{np(q_2+n_1p_1)}{q}\right]\\ & -n_1n_2q_1\left[q_2+n_1p_1-mp-\frac{2.mp.n_1p_1}{q_2}-\frac{m_1p_1(q_2-mp)}{q}\right]\\ & \qquad\qquad +m_1m_2q_2^2\frac{(q_1-np)(q-m_1p_1)}{qq_1}=0. \end{aligned}\right.$$

On peut remplacer, dans le dernier terme, $m_1m_2q_2$ par sa valeur identique $(n_1n_2q_1-m_2n_1q)$, le produit $\frac{(q_1-np)(q-m_1p_1)}{qq_1}$ par son développement $\left(1-\frac{np}{q_1}-\frac{m_1p_1}{q}+\frac{np.m_1p_1}{qq_1}\right)$; puis, réduisant, s'aidant de la relation (47) et supprimant le facteur commun n_1pp_1, l'équation (61) devient

$$(62)\qquad 2m\left(\frac{n_1n_2q_1-m_2n_1q}{q_2}\right)=m_2\left(\frac{nn_1q+nm_1q_2}{q_1}\right)+n_2\left(\frac{mm_1q_1-nm_1q_2}{q}\right).$$

Mais l'on a identiquement, par les valeurs (49) de q, q_1, q_2,

$$\frac{n_1n_2q_1-m_2n_1q}{q_2}=m_1m_2,\qquad \frac{nn_1q+nm_1q_2}{q_1}=mm_1,\qquad \frac{mm_1q_1-nm_1q_2}{q}=nn_1,$$

ce qui réduit l'équation (62) à $2mm_1m_2=mm_1m_2+nn_1n_2$, ou a la relation (47). Ainsi les fonctions (58) vérifient la première des équations (55), et l'on s'assurerait de la même manière qu'elles vérifient les deux autres.

§ XIV.

En résumé, on a les intégrales complètes des équations (9) et (10) en prenant

$$\mathrm{Q}=\sqrt{m\mathrm{f}-n_2\mathrm{f}_2},\quad \mathrm{Q}_1=\sqrt{n\mathrm{f}-m_2\mathrm{f}_2}.\quad \mathrm{Q}_2=\sqrt{m\mathrm{f}-n_1\mathrm{f}_1},\quad (mm_1m_2=nn_1n_2),$$

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} \rho &=\int_{\varphi}^{\mathrm{f}}\frac{d\mathrm{f}}{\sqrt{n_1n_2(\mathrm{f}-\varphi)(m\mathrm{f}-n_1\varphi_1)(n\mathrm{f}-m_2\varphi_2)}},\\ \rho_1 &=\int_{\varphi_1}^{\mathrm{f}_1}\frac{d\mathrm{f}_1}{\sqrt{mn_2(\mathrm{f}_1-\varphi_1)(m_1\mathrm{f}_1-n_2\varphi_2)(m\varphi-n_1\mathrm{f}_1)}},\\ \rho_2 &=\int_{\varphi_2}^{\mathrm{f}_3}\frac{d\mathrm{f}_2}{\sqrt{mm_1(\mathrm{f}_2-\varphi_2)(n\varphi-m_1\mathrm{f}_2)(m_1\varphi_1-n_1\mathrm{f}_2)}}; \end{aligned}\right.$$

d'où l'on conclut, pour les paramètres différentiels du premier ordre des surfaces orthogonales toutes isothermes,

$$(64)\quad \begin{cases} h = \dfrac{d\rho}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{n\mathrm{f}-m_2\mathrm{f}_2}\,\sqrt{m\mathrm{f}-n_1\mathrm{f}_1}}, \\ h_1 = \dfrac{d\rho_1}{ds_1} = \dfrac{1}{\sqrt{m\mathrm{f}-n_1\mathrm{f}_1}\,\sqrt{m_1\mathrm{f}_1-n_2\mathrm{f}_2}}, \\ h_2 = \dfrac{d\rho_2}{ds_2} = \dfrac{1}{\sqrt{m_1\mathrm{f}_1-n_2\mathrm{f}_2}\,\sqrt{n\mathrm{f}-m_2\mathrm{f}_2}}, \end{cases}$$

ds, ds_1, ds_2 étant pris sur les intersections, ou sur les lignes de courbure des surfaces conjuguées.

D'après l'ordre de grandeur adopté, f_2 est numériquement moindre que f_1, qui est lui-même plus petit que f; la limite inférieure φ_2 peut donc être prise égale à zéro, et l'on aura

$$\rho = \int_{\varphi}^{\mathrm{f}} \frac{k\,d\mathrm{f}}{\sqrt{\frac{nn_1n_2m}{k}\,k\mathrm{f}(k\mathrm{f}-k\varphi)\left(k\mathrm{f}-k\frac{n_1}{m}\varphi_1\right)}},$$

$$\rho_1 = \int_{\varphi_1}^{\mathrm{f}_1} \frac{k_1\,d\mathrm{f}_1}{\sqrt{\frac{mm_1n_1n_2}{k}\,k_1\mathrm{f}_1(k_1\mathrm{f}_1-k_1\varphi_1)\left(k_1\frac{m}{n_1}\varphi-k_1\mathrm{f}_1\right)}},$$

$$\rho_2 = \int_{0}^{\mathrm{f}_2} \frac{k_2\,d\mathrm{f}_2}{\sqrt{\frac{mm_1m_2n_2}{k_2}\,k_2\mathrm{f}_2\left(k_2\frac{n}{m_2}\varphi-k_2\mathrm{f}_2\right)\left(k_2\frac{m_1}{n_2}\varphi_1-k_2\mathrm{f}_2\right)}},$$

k, k_1, k_2 étant des indéterminées, dont on peut disposer de telle sorte que les trois coefficients de φ soient égaux, ainsi que ceux de φ_1.

En effet, ces conditions sont

$$k = k_1\frac{m}{n_1} = k_2\frac{n}{m_2}, \qquad k\frac{n_1}{m} = k_1 = k_2\frac{m_1}{n_2};$$

le second groupe pouvant se mettre sous la forme $k = k_1\frac{m}{n_1} = k_2\frac{mm_1}{n_1n_2}$, ne diffère pas du premier, puisque, d'après la relation (47), on a

$$\frac{mm_1}{n_1n_2} = \frac{n}{m_2}.$$

et il suffira de prendre

$$k = mm_1, \quad k_1 = m_1 n_1, \quad k_2 = n_1 n_2,$$

pour vérifier à la fois les deux groupes. On aura, en adoptant ces valeurs des indéterminées k, k_1, k_2 :

$$\rho = \int_{\varphi}^{\mathrm{f}} \frac{m m_1 d\mathrm{f}}{\sqrt{m m_2 m m_1 \mathrm{f} (m m_1 \mathrm{f} - m m_1 \varphi) (m m_1 \mathrm{f} - m_1 n_1 \varphi_1)}},$$

$$\rho_1 = \int_{\varphi_1}^{\mathrm{f}_1} \frac{m_1 n_1 d\mathrm{f}_1}{\sqrt{m n_2 m_1 n_1 \mathrm{f}_1 (m_1 n_1 \mathrm{f}_1 - m_1 n_1 \varphi_1) (m m_1 \varphi - m_1 n_1 \mathrm{f}_1)}},$$

$$\rho_2 = \int_{0}^{\mathrm{f}_2} \frac{n_1 n_2 d\mathrm{f}_2}{\sqrt{n n_2 n_1 n_2 \mathrm{f}_2 (m m_1 \varphi - n_1 n_2 \mathrm{f}_2) (n_1 m_1 \varphi_1 - n_1 n_2 \mathrm{f}_2)}}.$$

Si l'on pose maintenant

$$(65) \quad \left\{ \begin{aligned} & m m_1 \mathrm{f} = \lambda^2 p^2, \quad m_1 n_1 \mathrm{f}_1 = \lambda^2 p_1^2, \quad n_1 n_2 \mathrm{f}_2 = \lambda^2 p_2^2, \\ & m m_1 \varphi = \lambda^2 c^2, \quad m_1 n_1 \varphi_1 = \lambda^2 b^2, \end{aligned} \right.$$

λ étant constant et indéterminé, il vient

$$(66) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\lambda \sqrt{m m_2}}{2} \rho &= \int_{c}^{p} \frac{dp}{\sqrt{p^2 - c^2} \sqrt{p^2 - b^2}}, \\ \frac{\lambda \sqrt{m n_2}}{2} \rho_1 &= \int_{b}^{p_1} \frac{dp_1}{\sqrt{c^2 - p_1^2} \sqrt{p_1^2 - b^2}}, \\ \frac{\lambda \sqrt{n n_2}}{2} \rho_2 &= \int_{0}^{p_2} \frac{dp_2}{\sqrt{c^2 - p_2^2} \sqrt{b^2 - p_2^2}}; \end{aligned} \right.$$

et les mêmes valeurs de f, f_1, f_2 (65), substituées dans les formules (64), donnent

$$(67) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda^2 \sqrt{\frac{m_2}{n_1 n_2 m_1}} \frac{d\rho}{ds} &= \frac{1}{\sqrt{p^2 - p_1^2} \sqrt{p^2 - p_2^2}}, \\ \lambda^2 \sqrt{\frac{1}{n_1 m_1}} \frac{d\rho_1}{ds_1} &= \frac{1}{\sqrt{p^2 - p_1^2} \sqrt{p_1^2 - p_2^2}}, \\ \lambda^2 \sqrt{\frac{n}{n_1 m m_1}} \frac{d\rho_2}{ds_2} &= \frac{1}{\sqrt{p^2 - p_2^2} \sqrt{p_1^2 - p_2^2}}. \end{aligned} \right.$$

Or il existe une valeur de la constante λ, telle que les coefficients de ρ et $d\rho$, de ρ_1 et $d\rho_1$, de ρ_2 et $d\rho_2$, sont respectivement égaux dans les équations (66) et (67); cette valeur est

$$(68)\qquad \lambda = \tfrac{1}{2}\sqrt{n_1 n_2 m m_1},$$

car elle donne identiquement

$$\lambda\sqrt{\frac{m_2}{n_1 n_2 m}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{m m_2},\quad \lambda\sqrt{\frac{1}{n_1 m_1}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{m n_2},\quad \lambda\sqrt{\frac{n}{m m_1 n_1}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{n n_2}\,;$$

si donc on prend pour nouveaux paramètres les anciens, respectivement multipliés par $\frac{\lambda\sqrt{m m_2}}{2}$, $\frac{\lambda\sqrt{m n_2}}{2}$, $\frac{\lambda\sqrt{n n_2}}{2}$, λ ayant la valeur (68), on aura définitivement

$$(69)\left\{\begin{array}{l}
\displaystyle\int_c^p \frac{dp}{\sqrt{p^2-b^2}\sqrt{p^2-c^2}} = \rho,\quad \int_b^{p_1} \frac{dp_1}{\sqrt{p^2-b^2}\sqrt{c^2-p_1^2}} = \rho_1,\quad \int_0^{p_2} \frac{dp_2}{\sqrt{b^2-p_2^2}\sqrt{c^2-p_2^2}} = \rho_2,\\[2ex]
\displaystyle\frac{d\rho}{ds} = h = \frac{1}{\sqrt{p^2-p_1^2}\sqrt{p^2-p_2^2}},\ \frac{d\rho_1}{ds_1} = h_1 = \frac{1}{\sqrt{p_1^2-p_2^2}\sqrt{p^2-p_1^2}},\ \frac{d\rho_2}{ds_2} = h_2 = \frac{1}{\sqrt{p^2-p_2^2}\sqrt{p_1^2-p_2^2}},
\end{array}\right.$$

pour représenter tous les systèmes de surfaces orthogonales et isothermes.

§ XV.

Il ne s'agit plus que d'obtenir les équations des mêmes surfaces en coordonnées rectilignes. Les valeurs (69) substituées dans les formules (3) donnent

$$(70)\left\{\begin{array}{l}
\displaystyle\frac{1}{c} = \frac{p_1\sqrt{p_1^2-b^2}\sqrt{c^2-p_1^2}}{\sqrt{p^2-p_2^2}\,(p^2-p_1^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{1}{c_1} = \frac{p_2\sqrt{b^2-p_2^2}\sqrt{c^2-p_2^2}}{\sqrt{p^2-p_1^2}\,(p_1^2-p_2^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{1}{c_2} = -\frac{p\sqrt{p^2-b^2}\sqrt{p^2-c^2}}{\sqrt{p_1^2-p_2^2}\,(p^2-p_2^2)^{\frac{3}{2}}},\\[2ex]
\displaystyle\frac{1}{\gamma} = \frac{p_2\sqrt{b^2-p_2^2}\sqrt{c^2-p_2^2}}{\sqrt{p^2-p_1^2}\,(p^2-p_2^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{1}{\gamma_1} = -\frac{p\sqrt{p^2-b^2}\sqrt{p^2-c^2}}{\sqrt{p_1^2-p_2^2}\,(p^2-p_1^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{1}{\gamma_2} = -\frac{p_1\sqrt{p_1^2-b^2}\sqrt{c^2-p_1^2}}{\sqrt{p^2-p_2^2}\,(p^2-p_1^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{array}\right.$$

Or les deux courbures $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{c_1}$ des surfaces ρ_2 sont nulles, quels que soient p et p_1, pour $p_2 = 0$: les deux courbures $\frac{1}{\gamma_2}$, $\frac{1}{c}$ des surfaces ρ_1 sont nulles, quels que soient p_2 et p, pour $p_1 = b$: les deux courbures $\frac{1}{\gamma_1}$, $\frac{1}{c_2}$ des surfaces ρ sont nulles, quels que soient p_1 et p_2, pour $p = c$. Les surfaces conjuguées isothermes comprennent donc trois plans, correspondant aux valeurs zéro des paramètres, ou à $p_2 = 0$, $p_1 = b$, $p = c$. Ces plans sont nécessairement orthogonaux, et on peut les prendre respectivement pour plans coordonnés des yz, zx, xy, dont les équations sont

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0;$$

c'est-à-dire que x devra être nul, quels que soient ρ et ρ_1, pour $\rho_2 = 0$ ou $p_2 = 0$; que y devra être nul, quels que soient ρ_2 et ρ, pour $\rho_1 = 0$, $p_1 = b$; enfin que z devra être nul, quels que soient ρ_1 et ρ_2, pour $\rho = 0$, ou $p = c$.

Cela posé, les trois premières équations (5), transformées en p, p_1 p_2, à l'aide des valeurs (69), deviennent

$$(71)\qquad \left\{\begin{aligned} &(p^2 - p_1^2)\frac{d^2\varphi}{dp\,dp_1} + p_1\frac{d\varphi}{dp} - p\frac{d\varphi}{dp_1} = 0,\\ &(p^2 - p_2^2)\frac{d^2\varphi}{dp_2\,dp} - p\frac{d\varphi}{dp_2} + p_2\frac{d\varphi}{dp} = 0,\\ &(p_1^2 - p_2^2)\frac{d^2\varphi}{dp_1\,dp_2} + p_2\frac{d\varphi}{dp_1} - p_1\frac{d\varphi}{dp_2} = 0. \end{aligned}\right.$$

Si l'on pose $\varphi = \mathrm{P}\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$, P, P_1, P_2 étant respectivement fonctions de p, p_1, p_2, les trois équations (71) exigent que

$$p^2 - \frac{p\mathrm{P}}{\left(\frac{d\mathrm{P}}{dp}\right)} = p_1^2 - \frac{p_1\mathrm{P}_1}{\left(\frac{d\mathrm{P}_1}{dp_1}\right)} = p_2^2 - \frac{p_2\mathrm{P}_2}{\left(\frac{d\mathrm{P}_2}{dp_2}\right)};$$

et comme la première de ces trois quantités ne pourrait contenir que p, la seconde que p_1, la troisième que p_2, leur valeur commune est nécessairement une constante A; on a donc séparément

$$\frac{d\mathrm{P}}{\mathrm{P}} = \frac{p\,dp}{p^2 - \mathrm{A}}, \qquad \frac{d\mathrm{P}_1}{\mathrm{P}_1} = \frac{p_1\,dp_1}{p_1^2 - \mathrm{A}}, \qquad \frac{d\mathrm{P}_2}{\mathrm{P}_2} = \frac{p_2\,dp_2}{p_2^2 - \mathrm{A}},$$

d'où

$$\mathrm{P} = \sqrt{p^2 - \mathrm{A}}, \quad \mathrm{P}_1 = \sqrt{p_1^2 - \mathrm{A}}, \quad \mathrm{P}_2 = \sqrt{p_2^2 - \mathrm{A}}.$$

Il suit de là que l'intégrale générale des équations (71) peut être mise sous la forme

$$\varphi = \Sigma\sqrt{\mathrm{B}(p^2 - \mathrm{A})(p_1^2 - \mathrm{A})(p_2^2 - \mathrm{A})}, \tag{72}$$

les deux constantes A et B variant d'un terme à l'autre de la série. Il faut maintenant déterminer ces constantes, de telle sorte que φ donne successivement les fonctions cherchées x, y, z, en p, p_1, p_2.

§ XVI.

Pour x, il faut que $p_2 = 0$ l'annule, quels que soient p et p_1; ce qui exige que, dans l'équation (72), toutes les constantes A soient nulles; tous les termes de la série se réunissent alors en un seul de la forme $pp_1p_2\Sigma\sqrt{\mathrm{B}}$: et l'on a, en représentant $\Sigma\sqrt{\mathrm{B}}$ par $\frac{1}{g_2}$,

$$x = \frac{1}{g_2} pp_1p_2;$$

or, si l'on substitue cette valeur de x à la place de φ dans la quatrième équation (5), qui, transformée en p, p_1, p_2, est

$$\left\{\begin{aligned} &\quad (p_1^2 - p_2^2)(p^2 - b^2)(p^2 - c^2)\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 \\ &+ (p^2 - p_2^2)(p_1^2 - b^2)(c^2 - p_1^2)\left(\frac{d\varphi}{dp_1}\right)^2 \\ &+ (p^2 - p_1^2)(b^2 - p_2^2)(c^2 - p_2^2)\left(\frac{d\varphi}{dp_2}\right)^2 \\ &= (p_1^2 - p_2^2)(p^2 - p_2^2)(p^2 - p_1^2): \end{aligned}\right. \tag{73}$$

sa vérification exige que $g_2 = bc$; on a donc

$$bcx = pp_1p_2. \tag{74}$$

Pour y, il faut que $p_1 = b$ l'annule, quels que soient p_2 et p; ce qui exige que, dans φ (72), toutes les constantes A soient égales à b^2; tous les termes de la série se réunissent alors en un seul; et l'on a, en représentant $\Sigma\sqrt{-\mathrm{B}}$ par $\frac{1}{g_1}$,

$$y = \frac{1}{g_1}\sqrt{p^2 - b^2}\sqrt{p_1^2 - b^2}\sqrt{b^2 - p_2^2};$$

or, cette valeur de φ ne vérifie l'équation (73) que si l'on prend

$$g_1 = b\sqrt{c^2 - b^2};$$

on a donc

$$(75)\qquad b\sqrt{c^2 - b^2}.y = \sqrt{p^2 - b^2}\sqrt{p_1^2 - b^2}\sqrt{b^2 - p_2^2}.$$

Enfin, pour z, il faut que $p = c$ l'annule, quels que soient p_1 et p_2, ce qui exige que, dans φ (72), toutes les constantes A soient égales à c^2; tous les termes de la série se réunissent alors en un seul; et l'on a, en représentant $\Sigma\sqrt{B}$ par $\frac{1}{g}$,

$$z = \frac{1}{g}\sqrt{p^2 - c^2}\sqrt{c^2 - p_1^2}\sqrt{c^2 - p_2^2};$$

or, cette valeur de φ ne vérifie l'équation (73) que si l'on prend

$$g = c\sqrt{c^2 - b^2};$$

on a donc

$$(76)\qquad c\sqrt{c^2 - b^2}.z = \sqrt{p^2 - c^2}\sqrt{c^2 - p_1^2}\sqrt{c^2 - p_2^2}.$$

Si entre les équations (74), (75), (76), on élimine successivement p_1 et p_2, p_2 et p, p et p_1, on obtient, en coordonnées rectilignes, pour les équations séparées des systèmes conjugués,

$$(77)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{p^2 - b^2} + \frac{z^2}{p^2 - c^2} = 1,\\ &\frac{x^2}{p_1^2} + \frac{y^2}{p^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - p_1^2} = 1,\\ &\frac{x^2}{p_2^2} - \frac{y^2}{b^2 - p_2^2} - \frac{z^2}{c^2 - p_2^2} = 1.\end{aligned}\right.$$

D'où il résulte, enfin, que les seules surfaces toutes isothermes, qui ne sont ni cylindriques, ni coniques, ni de révolution, sont des surfaces du second degré homofocales.

§ XVII.

Les propriétés du système de surfaces orthogonales représenté par les équations (69) ou (77) ont été suffisamment étudiées dans le Mémoire sur les surfaces isothermes, déjà cité. Les constantes ou les demi-distances focales b et c sont les seules indéterminées dont on puisse disposer. On peut, par exemple, faire en sorte qu'un ellipsoïde donné, ayant pour demi-axes A, B, C, fasse partie du système : il suffira de prendre

$$b^2 = A^2 - B^2, \qquad c^2 = A^2 - C^2,$$

et l'ellipsoïde proposé sera représenté par la première équation (77) quand le paramètre p atteindra la valeur particulière A. Si l'ellipsoïde donné a deux axes égaux, ou même s'il se réduit à une sphère, les équations (69) ou (77) peuvent pareillement le comprendre; c'est-à-dire que ces équations s'étendent aux deux systèmes de révolution représentés par les groupes (28) et (30), et même au système de surfaces coniques signalé au § III.

En effet, pour déduire des équations générales (69) et (77) le système de surfaces de révolution représenté par les équations (20) et (28), il faut d'abord poser

$$p_2 = b \sin c\theta.$$

puis, après cette transformation, faire $b = 0$. S'il s'agit de reproduire le système des surfaces de révolution (35) et (30), il faut poser

$$p_1 = \sqrt{b^2 + (c^2 - b^2) \sin^2 c\theta},$$

puis faire $b = c$, et à l'aide de quelques changements de notation, on retrouve les équations (35) et (30).

Enfin, pour passer au système de surfaces sphériques et coniques qui correspond aux équations (12) et (13), il faut poser d'abord

$$b = \varepsilon\beta, \quad c = \varepsilon\gamma, \quad p = -r, \quad p_1 = \varepsilon\varpi_1, \quad p_2 = \varepsilon\varpi_2.$$
$$\varepsilon\rho_1 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon\rho_2 = \varepsilon_2, \quad \varepsilon h_1 = \eta_1. \quad \varepsilon h_2 = \eta_2;$$

par cette transformation, les équations (69) et (77) deviennent

$$(78)\quad \left\{ \begin{aligned} &\rho = \int \frac{-dr}{\sqrt{r^2-\varepsilon^2\beta^2}\,\sqrt{r^2-\varepsilon^2\gamma^2}}, \qquad && h = \frac{1}{\sqrt{r^2-\varepsilon^2\varpi_1^2}\,\sqrt{r^2-\varepsilon^2\varpi_2^2}}, \\ &\varepsilon_1 = \int \frac{d\varpi_1}{\sqrt{\varpi_1^2-\beta^2}\,\sqrt{\gamma^2-\varpi_1^2}}, && \eta_1 = \frac{1}{\sqrt{r^2-\varepsilon^2\varpi_1^2}\,\sqrt{\varpi_1^2-\varpi_2^2}}, \\ &\varepsilon_2 = \int \frac{d\varpi_2}{\sqrt{\beta^2-\varpi_2^2}\,\sqrt{\gamma^2-\varpi_2^2}}, && \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{r^2-\varepsilon^2\varpi_2^2}\,\sqrt{\varpi_1^2-\varpi_2^2}}; \\ &\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2-\varepsilon^2\beta^2} + \frac{z^2}{r^2-\varepsilon^2\gamma^2} = 1, \\ &\frac{x^2}{\varpi_1^2} + \frac{y^2}{\varpi_1^2-\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2-\varpi_1^2} = \varepsilon^2, \\ &\frac{x^2}{\varpi_2^2} - \frac{y^2}{\beta^2-\varpi_2^2} - \frac{z^2}{\gamma^2-\varpi_2^2} = \varepsilon^2, \end{aligned} \right.$$

et si l'on fait $\varepsilon = 0$, on trouve

$$(79)\quad \left\{ \begin{aligned} &\rho = \frac{1}{r}, && h = \frac{1}{r^2}, && x^2 + y^2 - z^2 = r^2. \\ &\varepsilon_1 = \int_\beta^{\varpi_1} \frac{d\varpi_1}{\sqrt{\varpi_1^2-\beta^2}\sqrt{\gamma^2-\varpi_1^2}}, && \eta_1 = \frac{1}{r\sqrt{\varpi_1^2-\varpi_2^2}}, && \frac{x^2}{\varpi_1^2} + \frac{y^2}{\varpi_1^2-\beta^2} = \frac{z^2}{\gamma^2-\varpi_1^2}, \\ &\varepsilon_2 = \int_0^{\varpi_2} \frac{d\varpi_2}{\sqrt{\beta^2-\varpi_2^2}\sqrt{\gamma^2-\varpi_2^2}}, && \eta_2 = \eta_1, && \frac{x^2}{\varpi_2^2} = \frac{y^2}{\beta^2-\varpi_2^2} + \frac{z^2}{\gamma^2-\varpi_2^2}; \end{aligned} \right.$$

équations qui représentent des sphères concentriques, conjuguées à des cônes du second degré orthogonaux. Les constantes β et γ restent indéterminées, en sorte qu'une même famille de sphères concentriques peut être conjuguée à une infinité de doubles familles de cônes isothermes. En faisant

$$\beta = 0, \qquad \text{ou} \qquad \beta = \gamma,$$

on obtient particulièrement le système sphérique orthogonal, dont les paramètres sont le rayon, la latitude et la longitude.

§ XVIII.

Les lieux géométriques du second ordre, dont le centre est à l'infini, possèdent aussi leurs surfaces orthogonales toutes isothermes; pour déduire ce système des équations générales (69) et (77), il faut poser d'abord

$$(80)\quad\left\{\begin{array}{lll} p^2 - m^2 = m\lambda, & p_1^2 - m^2 = m\lambda_1, & p_2^2 - m^2 = m\lambda_2; \\ b^2 - m^2 = m\beta, & c^2 - m^2 = m\gamma, & x = m + x'; \\ m\rho = \varepsilon, & m\rho_1 = \varepsilon_1, & m\rho_2 = \varepsilon_2, \\ mh = \eta, & mh_1 = \eta_1, & mh_2 = \eta_2; \end{array}\right.$$

m étant une constante indéterminée. Par cette transformation les équations (69) et (77) deviennent

$$(81)\quad\left\{\begin{array}{l} \varepsilon = \frac{1}{2}\int_\gamma^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{1+\frac{\lambda}{m}}\sqrt{\lambda-\beta}\sqrt{\lambda-\gamma}}, \qquad \eta = \frac{1}{\sqrt{\lambda-\lambda_1}\sqrt{\lambda-\lambda_2}}; \\ \varepsilon_1 = \frac{1}{2}\int_\beta^{\lambda_1} \frac{d\lambda_1}{\sqrt{1+\frac{\lambda_1}{m}}\sqrt{\lambda_1-\beta}\sqrt{\gamma-\lambda_1}}, \qquad \eta_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}\sqrt{\lambda-\lambda_1}}, \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{\sqrt{1+\frac{\lambda_2}{m}}\sqrt{\beta-\lambda_2}\sqrt{\gamma-\lambda_2}}, \qquad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda-\lambda_2}\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}}; \\ \frac{2x'}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda(\lambda-\beta)} + \frac{z^2}{\lambda(\lambda-\gamma)} + \frac{1}{m}\left(\frac{x'^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda-\beta} + \frac{z^2}{\lambda-\gamma}\right) = 1, \\ \frac{2x'}{\lambda_1} + \frac{y^2}{\lambda_1(\lambda_1-\beta)} - \frac{z^2}{\lambda_1(\gamma-\lambda_1)} + \frac{1}{m}\left(\frac{x'^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda_1-\beta} - \frac{z^2}{\gamma-\lambda}\right) = 1, \\ \frac{2x'}{\lambda_2} - \frac{y^2}{\lambda_2(\beta-\lambda_2)} - \frac{z^2}{\lambda_2(\gamma-\lambda_2)} + \frac{1}{m}\left(\frac{x'^2}{\lambda_2} - \frac{y^2}{\beta-\lambda_2} - \frac{z^2}{\lambda_2-\gamma}\right) = 1; \end{array}\right.$$

et si l'on fait $\frac{1}{m} = 0$, on obtient

$$(82)\quad\left\{\begin{array}{l} \varepsilon = \frac{1}{2}\int_\gamma^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda-\beta}\sqrt{\lambda-\gamma}}, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{\lambda-\lambda_1}\sqrt{\lambda-\lambda_2}}, \quad \frac{2x}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda(\lambda-\beta)} + \frac{z^2}{\lambda(\lambda-\gamma)} = 1. \\ \varepsilon_1 = \frac{1}{2}\int_\beta^{\lambda_1} \frac{d\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1-\beta}\sqrt{\gamma-\lambda_1}}, \quad \eta_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}\sqrt{\lambda-\lambda_1}}, \quad \frac{2x'}{\lambda_1} + \frac{y^2}{\lambda_1(\lambda_1-\beta)} - \frac{z^2}{\lambda_1(\gamma-\lambda_1)} = 1. \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{\sqrt{\beta-\lambda_2}\sqrt{\gamma-\lambda_2}}, \quad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda-\lambda_2}\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}}, \quad \frac{2x'}{\lambda_2} - \frac{y^2}{\lambda_2(\beta-\lambda_2)} - \frac{z^2}{\lambda_2(\gamma-\lambda_2)} = 1. \end{array}\right.$$

Les surfaces conjuguées sont alors trois familles de paraboloïdes, ayant mêmes foyers, et leurs axes sur la même droite. Les paraboloïdes aux paramètres ε et ε_2 sont elliptiques, et dirigés en sens contraires; ceux au paramètre ε_1 sont hyperboliques.

Les fonctions λ, λ_1, λ_2, déterminées par les procédés ordinaires du calcul intégral, de telle sorte que $\lambda = \gamma$ pour $\varepsilon = 0$, $\lambda_1 = \beta$ pour $\varepsilon_1 = 0$, et $\lambda_2 = 0$ pour $\varepsilon_2 = 0$, sont

$$(83)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda &= \gamma\left(\frac{e^{\varepsilon}+e^{-\varepsilon}}{2}\right)^2 - \beta\left(\frac{e^{\varepsilon}-e^{-\varepsilon}}{2}\right)^2, \\ \lambda_1 &= \beta\cos^2\varepsilon_1 + \gamma\sin^2\varepsilon_1, \\ \lambda_2 &= 2\sqrt{\beta\gamma}\left(\frac{e^{\varepsilon_2}+e^{-\varepsilon_2}}{2}\right)\left(\frac{e^{\varepsilon_2}-e^{-\varepsilon_2}}{2}\right) - (\beta+\gamma)\left(\frac{e^{\varepsilon_2}-e^{-\varepsilon_2}}{2}\right)^2 \end{aligned}\right.$$

Les fonctions x', y, z, en λ, λ_1, λ_2, obtenues, soit par l'élimination, à l'aide des relations (82), troisième colonne, soit mieux en substituant les valeurs (80) dans les équations (74), (75) et (76), et faisant $\frac{1}{m} = 0$, sont

$$(84)\quad \left\{\begin{aligned} 2x' &= \lambda + \lambda_1 + \lambda_2 - \beta - \gamma, \\ y\sqrt{\gamma-\beta} &= \sqrt{\lambda-\beta}\sqrt{\lambda_1-\beta}\sqrt{\beta-\lambda_2}, \\ z\sqrt{\gamma-\beta} &= \sqrt{\lambda-\gamma}\sqrt{\gamma-\lambda_1}\sqrt{\gamma-\lambda_2}. \end{aligned}\right.$$

Le nouveau système de surfaces orthogonales du second ordre, toutes isothermes, qui vient d'être défini, se distingue de celui qui comprend les ellipsoïdes, en ce que les fonctions qui expriment les températures sont ici plus simples, ou d'une transcendance moins élevée : en effet, dans le système paraboloïdal, comme pour les ellipsoïdes de révolution, ces fonctions sont exponentielles et circulaires, tandis qu'elles sont elliptiques pour l'ellipsoïde à trois axes inégaux.

MÉMOIRE

SUR

LE MOUVEMENT PROPRE DU SYSTÈME SOLAIRE DANS L'ESPACE,

Par M. A. BRAVAIS.

La question du mouvement propre du Soleil a été longtemps un sujet de controverse pour les astronomes, et elle restait encore indécise, lorsque récemment le beau travail de M. Argelander est venu dissiper tous les doutes et prouver avec une complete évidence la realité de ce mouvement. Les astronomes avaient presque toujours pris pour base des considérations géométriques; ils avaient admis que toutes les directions de mouvement étant également possibles, celle du mouvement solaire devait être déterminée de maniere à compenser l'inégalite de tendance des étoiles vers telle ou telle région de l'espace, telle qu'elle résulte de l'observation des mouvements propres apparents. Mais est-il nécessaire que les mouvements des étoiles se fassent en tous sens avec une égale facilité? et si une plus grande facilité suivant une certaine direction est reconnue, le mouvement du Soleil en sens inverse en est-il la conséquence irrécusable? En toute rigueur, on peut dénier un pareil résultat: il est donc utile de rendre la question du mouvement solaire indépendante d'un semblable *postulatum*. D'ailleurs, le principe ci-dessus énoncé laisse de l'arbitraire dans son interprétation, c'est-à-dire dans la mise en équation des conditions du probleme, et celle-ci dépend, en grande partie, du point de vue particulier auquel se place le calculateur. C'est ainsi que W. Herschel a déterminé le point de la sphère céleste vers lequel se meut le Soleil d'apres la condition, que la somme des produits du mouvement propre de chaque étoile par le sinus de l'angle compris entre la direction observée et la direction *parallactique* soit un minimum. Burckardt a recherché si les étoiles situées à 90 degrés de ce point avaient des arcs de mouvement propre approchant du parallélisme. M. Bessel a cherché à fixer la position du plan normal au mouvement solaire, de telle sorte qu'il renfermât les pôles des arcs de grand cercle de chaque mouvement propre. Enfin M. Argelander s'est imposé la condition que la somme des carrés des angles compris entre les directions observées et les directions *parallactiques*, multipliés respectivement par le sinus de la distance angulaire de chaque étoile au point vers lequel tend le Soleil, fût la plus petite possible [*].

La méthode que je vais exposer diffère des méthodes antérieures en ce qu'elle se base sur des considérations *mécaniques;* elle donne les composantes de la vitesse solaire en fonction de quantités inconnues, il est vrai, telles que les masses des étoiles et leurs distances à la Terre; mais au point de vue théorique il est permis de les supposer connues, puisque notre ignorance à leur égard n'est que passagère et tend chaque jour à se dissiper. Dans cette méthode, les pétitions de principe, basées sur des probabilités, ne sont pas entièrement éliminées; mais elles y sont réduites, si je ne me trompe, aux termes les plus simples possible.

Commençons par grouper ensemble, par la pensée, un nombre considérable d'étoiles occupant l'intérieur d'une enceinte idéale qui contienne elle-même notre Soleil, et considérons le centre de gravité d'un pareil système. Si le nombre des étoiles est limité, si l'univers matériel a ses bornes, nous pourrons aussi considérer le centre de gravité de cet univers; nos démonstrations et nos formules s'appliqueront également à ces deux cas.

Le centre de gravité de cette agglomération d'étoiles peut être en repos ou en mouvement; je le supposerai en mouvement, le cas du repos n'étant lui-même qu'un cas particulier de ce dernier. Ce qu'il nous importe de déterminer, c'est le déplacement du Soleil *relativement à ce centre de gravité*. Une fois ce déplacement connu, il restera à déterminer le mouvement de ce centre par rapport au centre de gravité d'un second groupe beaucoup plus étendu, question distincte de la précédente et qui pourra se traiter entièrement à part. Quant à la dé-

---

[*] *Transactions philosophiques* pour 1805 et 1806. — *Connaissance des Temps* pour l'année 1809. — Le Journal *l'Institut*, 6e année.

termination de la translation du centre de gravité de tout l'univers, elle nous est évidemment inaccessible, attendu que les repères fixes propres à la faire connaître nous manquent complétement : peut-être cependant pourra-t-on quelque jour arriver, par induction, à opter entre l'état de repos et celui d'une translation rectiligne et uniforme.

Ces préliminaires posés, traitons d'abord la première partie du problème, et proposons-nous de déterminer le mouvement du Soleil par rapport au centre de gravité d'une réunion d'astres compris dans une vaste enceinte et formant un groupe naturel dont le Soleil est lui-même une des parties intégrantes. Puisqu'il ne s'agit que de mouvements relatifs, nous pouvons admettre que ce centre de gravité est immobile ; la considération de l'immobilité de ce point forme en quelque sorte le principe de la méthode que nous allons développer.

Prenons pour origine *fixe* des coordonnées le lieu de l'espace occupé par le centre du Soleil à l'époque invariable que nous prendrons pour origine du temps (par exemple, au 1^{er} janvier 1800). Menons par ce point les axes rectangulaires des x, des y et des z ; et soient x, y, z les coordonnées d'une étoile rapportées à ces plans fixes : l'étoile venant à se déplacer, par l'effet de son mouvement réel, au bout de l'unité de temps, les nouvelles coordonnées seront $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$.

Prenons le centre mobile du Soleil pour origine *mobile* de nouvelles coordonnées parallèles aux précédentes ; à l'origine du temps les coordonnées de l'étoile seront x, y, z dans ce système, ainsi que dans le précédent ; mais au bout de l'unité de temps, les coordonnées relatives aux plans mobiles seront $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$. La caractéristique Δ indiquera toujours désormais les variations relatives à l'origine et aux plans coordonnés *fixes ;* la caractéristique δ désignera les variations relatives à l'origine *mobile* et aux plans *mobiles*.

Soient ξ, η, ζ les trois coordonnées de l'origine mobile rapportée à l'origine fixe : ces quantités sont les composantes de la vitesse solaire suivant les axes fixes ; ρ sera la vitesse totale ou $\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$. Nous nommerons mouvements *parallactiques* les mouvements apparents produits par le déplacement solaire ; pôle *parallactique,* le point de la sphère céleste vers lequel le Soleil se dirige, et duquel divergent tous les mouvements précédents ; enfin *équateur parallactique* le grand cercle perpendiculaire au mouvement du Soleil.

Au bout de l'unité de temps, on aura

$$(x + \Delta x) = (x + \delta x) + \xi,$$

ou plus simplement

$$\Delta x = \delta x + \xi,$$

ce qui nous mène aux trois équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta x &= \delta x + \xi,\\ \Delta y &= \delta y + \eta,\\ \Delta z &= \delta z + \zeta. \end{aligned}\right.$$

Soit maintenant m la masse de l'étoile (x, y, z); soit m' la masse de l'étoile (x', y', z')...; il résulte de l'immobilité du centre de gravité de tout le système par rapport aux plans coordonnés fixes, que l'on aura

$$\begin{aligned} \Sigma(m\Delta x) &= 0,\\ \Sigma(m\Delta y) &= 0,\\ \Sigma(m\Delta z) &= 0. \end{aligned}$$

La somme Σ doit s'étendre à toutes les étoiles du groupe. Le Soleil faisant lui-même partie de ce groupe, et M étant sa masse, on aura, en faisant sortir la quantité de mouvement du Soleil de dessous le signe Σ,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \Sigma(m\Delta x) + \mathrm{M}\,\xi &= 0,\\ \Sigma(m\Delta y) + \mathrm{M}\,\eta &= 0,\\ \Sigma(m\Delta z) + \mathrm{M}\,\zeta &= 0. \end{aligned}\right.$$

Substituons dans ces équations les valeurs de Δx, Δy, Δz, tirées des équations (1), et nous aurons

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} (\Sigma m + \mathrm{M})\,\xi + \Sigma(m\delta x) &= 0,\\ (\Sigma m + \mathrm{M})\,\eta + \Sigma(m\delta y) &= 0,\\ (\Sigma m + \mathrm{M})\,\zeta + \Sigma(m\delta z) &= 0, \end{aligned}\right.$$

équations qui donnent les composantes de la vitesse solaire en fonction des masses et des déplacements relatifs δx, δy, δz; déplacements que nos mesures peuvent nous faire apprécier, tandis que ces mêmes mesures ne peuvent nous faire connaître les déplacements absolus Δx, Δy, Δz.

Prenons maintenant pour coordonnées de l'étoile son rayon vecteur R à l'origine du temps, et les angles α, β, γ de ce rayon vecteur avec les trois axes, de sorte que l'on ait

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \mathrm{R}\cos\alpha, \\ y &= \mathrm{R}\cos\beta, \\ z &= \mathrm{R}\cos\gamma. \end{aligned}\right.$$

Différentions ces équations pour avoir les déplacements, au bout de l'unité de temps, relativement à l'origine mobile; nous aurons

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \partial x &= -\mathrm{R}\sin\alpha\,\partial\alpha + \cos\alpha\,\partial\mathrm{R}, \\ \partial y &= -\mathrm{R}\sin\beta\,\partial\beta + \cos\beta\,\partial\mathrm{R}, \\ \partial z &= -\mathrm{R}\sin\gamma\,\partial\gamma + \cos\gamma\,\partial\mathrm{R}. \end{aligned}\right.$$

et, après la substitution de ces valeurs dans les équations (3), elles deviennent

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} (\mathrm{M} + \Sigma m)\,\xi &= \Sigma(m\mathrm{R}\sin\alpha\,\partial\alpha) - \Sigma(m\cos\alpha\,\partial\mathrm{R}), \\ (\mathrm{M} + \Sigma m)\,\eta &= \Sigma(m\mathrm{R}\sin\beta\,\partial\beta) - \Sigma(m\cos\beta\,\partial\mathrm{R}), \\ (\mathrm{M} + \Sigma m)\,\zeta &= \Sigma(m\mathrm{R}\sin\gamma\,\partial\gamma) - \Sigma(m\cos\gamma\,\partial\mathrm{R}). \end{aligned}\right.$$

Si nous pouvions déterminer les valeurs des quantités m, R, ∂R, avec la même facilité que nous éprouvons dans la mesure des angles α, β, γ, et de leurs variations, les équations (6) donneraient immédiatement et sans arbitraire, les composantes de la vitesse du Soleil. Pour citer un exemple à l'appui, je ferai remarquer qu'on pourrait s'en servir pour déterminer à un instant donné la vitesse et la direction du mouvement de la Terre au milieu de notre système planétaire, si l'on n'avait d'ailleurs des moyens infiniment préférables pour cette détermination. Il faut pour cela supposer connues les masses du Soleil et des planètes : α, β, γ seront les lieux géocentriques, et $\partial\alpha$, $\partial\beta$, $\partial\gamma$ les mouvements géocentriques diurnes; on conclura les R d'observations parallactiques, ou de l'observation des diamètres apparents, les ∂R des variations de ces mêmes diamètres; nos équations donneront aussitôt les trois composantes de la vitesse terrestre, le jour étant pris pour unité de temps. Dans la pratique, cette méthode n'est guere applicable au mouvement de translation de la Terre; mais pour le Soleil et les étoiles, nous sommes forcés de nous en contenter dans l'état actuel de nos connaissances.

Les difficultés qui s'opposent en ce moment à la détermination des quantités m, R, δR, ne sont pas égales pour les grandeurs de chacun de ces trois ordres. L'heureuse application des méthodes micrométriques à la détermination des *parallaxes relatives* nous permet de penser que, sous peu, nous connaîtrons les distances de la Terre à un assez grand nombre d'étoiles. La détermination des masses stellaires offre un avenir bien moins favorable; nous ne pouvons guère espérer connaître *prochainement* que les masses des étoiles binaires, lesquelles forment, il est vrai, une fraction importante parmi les étoiles les plus rapprochées de nous; pour les autres astres, nous serons longtemps encore obligés de nous en tenir à une vague appréciation de leur masse, fondée sur la comparaison de leur splendeur et de leur distance, appréciation que la connaissance des masses des étoiles doubles pourra peut-être rectifier à un haut degré. Quant aux δR, l'absence de tout diamètre apparent et l'incertitude des mesures parallactiques s'opposent à toute tentative de mesures à leur égard, et nous sommes forcés d'ajourner celle-ci à l'époque indéfiniment reculée où les lois qui règlent les mouvements propres des étoiles nous seront connues.

Il paraît plausible, au premier abord, d'admettre que, sur un grand nombre d'étoiles, les termes de la forme $m \cos \alpha \delta \mathrm{R}$ doivent se compenser et s'entre-détruire; mais il n'en est rien, et, pour le montrer, faisons coïncider un instant le pôle parallactique avec l'extrémité de l'axe des x, et avec le pôle boréal de l'équateur céleste : $\cos \alpha$ se change en $\sin \mathrm{D}$, D étant la déclinaison de l'étoile. Considérons une zone comprise entre deux cercles parallèles boréaux; pour toutes les étoiles de cette zone, $\sin \mathrm{D}$ peut être considéré comme positif et à peu près constant. Le signe des termes $m \sin \mathrm{D} \delta \mathrm{R}$, correspondants à cette zone, dépend donc du signe de δR. Mais, puisque le Soleil marche vers le pôle nord, δR sera *généralement* négatif. A l'équateur $\sin \mathrm{D}$ est nul, et δR peut y être indifféremment positif ou négatif. Enfin, dans l'hémisphère austral, $\sin \mathrm{D}$ devient négatif, et δR *généralement* positif : de sorte que les deux facteurs $\sin \mathrm{D}$ et δR changent de signe à la fois dans le passage d'un hémisphère à l'autre, et la somme $\Sigma m \sin D \delta R$, loin de tendre à devenir nulle, convergera vers une certaine valeur négative. Ces remarques prouvent qu'il n'est pas permis de supposer $\delta R = 0$ dans les formules (6).

Les astronomes qui ont traité la question actuelle ont admis *implicitement* que le mouvement propre des étoiles a lieu suivant le plan tangent à la surface de la sphère céleste héliocentrique. Cette erreur agit sur la quantité du mouvement solaire, en l'atténuant; mais elle n'influe pas sur la direction de ce mouvement. Car, en continuant à placer le pôle parallactique sur l'axe des x, il n'est pas permis, il est vrai, de supposer $\Sigma m \cos \alpha \delta R = 0$; mais les suppositions $\Sigma m \cos \beta \delta R = 0$, $\Sigma m \cos \gamma \delta R = 0$ sont légitimes, ce que l'on reconnaîtrait de même en plaçant le pôle parallactique sur l'équateur céleste. On aura donc $\eta = 0$, $\zeta = 0$ dans l'hypothèse $\delta R = 0$, aussi bien que dans le cas de la nature où δR est laissée à sa valeur: ainsi la direction du mouvement est la même dans les deux hypotheses; mais l'ordonnée ξ, qui représente alors la vitesse solaire, étant déterminée par la condition $\delta R = 0$, sera nécessairement inférieure à la même ordonnée déduite des valeurs réelles de δR, puisque le terme négligé $-\Sigma (m \cos \alpha \, \delta R)$ est nécessairement positif.

On peut éluder cette difficulté en remplaçant δR par sa valeur en ΔR; pour cela, différentions, par rapport à l'origine fixe, l'équation

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

nous aurons, après avoir divisé par $2R$,

$$\Delta R = \cos \alpha \Delta x + \cos \beta \Delta y + \cos \gamma \Delta z;$$

en différentiant par rapport à l'origine mobile, on aurait obtenu de même

$$\delta R = \cos \alpha \delta x + \cos \beta \delta y + \cos \gamma \delta z.$$

Retranchant ces équations l'une de l'autre, en ayant égard aux equations (1), on trouve

$$(7) \qquad \Delta R - \delta R = \xi \cos \alpha + \eta \cos \beta + \zeta \cos \gamma.$$

On pourrait arriver directement à cette derniere équation par des considérations géométriques; car son second membre n'est autre chose que la projection du chemin ρ parcouru par le Soleil sur le rayon vecteur R.

Si nous tirons de là la valeur de δR pour la substituer dans les équations (6), et si nous réunissons dans le premier membre tous les termes en ξ, η et ζ, celles-ci deviennent

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}
&[\mathrm{M}+\Sigma(m\sin^2\alpha)]\,\xi-\Sigma(m\cos\alpha\cos\beta)\,\eta-\Sigma(m\cos\alpha\cos\gamma)\,\zeta\\
&\qquad=\Sigma(m\mathrm{R}\sin\alpha\,\delta\alpha)-\Sigma(m\cos\alpha\Delta\mathrm{R}),\\
&[\mathrm{M}+\Sigma(m\sin^2\beta)]\,\eta-\Sigma(m\cos\alpha\cos\beta)\,\xi-\Sigma(m\cos\beta\cos\gamma)\,\zeta\\
&\qquad=\Sigma(m\mathrm{R}\sin\beta\,\delta\beta)-\Sigma(m\cos\beta\Delta\mathrm{R}),\\
&[\mathrm{M}+\Sigma(m\sin^2\gamma)]\,\zeta-\Sigma(m\cos\alpha\cos\gamma)\,\xi-\Sigma(m\cos\beta\cos\gamma)\,\eta\\
&\qquad=\Sigma(m\mathrm{R}\sin\gamma\,\delta\gamma)-\Sigma(m\cos\gamma\Delta\mathrm{R}).
\end{aligned}\right.$$

On trouve, introduite dans ces formules, la quantité ΔR, c'est-à-dire la variation de la distance de l'étoile à l'origine fixe : cette quantité est tout aussi difficile à déterminer directement que l'était la quantité δR. Mais nous pouvons admettre comme très-probable que les augmentations et diminutions des divers rayons vecteurs se compensent, et que les termes des sommes $\Sigma(m\cos\alpha\Delta\mathrm{R})$, $\Sigma(m\cos\beta\Delta\mathrm{R})$, $\Sigma(m\cos\gamma\Delta\mathrm{R})$, tendent à s'entre-détruire. L'opinion de W. Herschel, qui admettait dans la matière un pouvoir permanent de concentration, peut être objectée à cette manière de voir; mais dans le cas même où tous les ΔR seraient négatifs, le changement de signe du cosinus dans le passage d'un hémisphère à l'hémisphère opposé n'entraînerait pas moins la compensation demandée, pourvu que le pouvoir de concentration agisse avec une égale énergie dans les deux hémisphères, ce qui ne paraît pas pouvoir être refusé, *si le Soleil occupe la partie centrale du système stellaire que l'on envisage.*

Si l'on projette chaque étoile sur son rayon vecteur initial, les trois sommes $\Sigma(m\cos\alpha\Delta\mathrm{R})$, $\Sigma(m\cos\beta\Delta\mathrm{R})$, $\Sigma(m\cos\gamma\Delta\mathrm{R})$ représenteront les quantités de mouvement du centre de gravité des étoiles ainsi projetées par rapport aux trois axes coordonnés. L'hypothèse $\Delta\mathrm{R}=0$ revient donc à supposer que le centre de gravité de l'ensemble des étoiles projetées participe à l'immobilité du centre de gravité de l'ensemble des étoiles projetantes, supposition qui doit être très-peu écartée de la vérité.

Le Soleil a aussi son mouvement $\Delta R = \rho$, lequel, projeté sur les trois axes, donne les quantités de mouvement $M\xi$, $M\eta$, $M\zeta$. Nous les comprendrons dans les sommes des termes destinés à se compenser, et nous écrirons

$$M\xi + \Sigma(m\cos\alpha\Delta R) = 0,\quad M\eta + \Sigma(m\cos\beta\Delta R) = 0,\quad M\zeta + \Sigma(m\cos\gamma\Delta R) = 0.$$

Posons maintenant, pour simplifier,

$$(9)\quad \begin{cases} \Sigma(m\sin^2\alpha) = A, & \Sigma(m\sin^2\beta) = B, & \Sigma(m\sin^2\gamma) = C, \\ \Sigma(m\cos\beta\cos\gamma) = a, & \Sigma(m\cos\alpha\cos\gamma) = b, & \Sigma(m\cos\alpha\cos\beta) = c. \end{cases}$$

Les formules (8) se changent en

$$(10)\quad \begin{cases} A\xi - b\eta - c\zeta = \Sigma(mR\sin\alpha\,\partial\alpha), \\ B\eta - c\xi - a\zeta = \Sigma(mR\sin\beta\,\partial\beta), \\ C\zeta - b\xi - a\eta = \Sigma(mR\sin\gamma\,\partial\gamma). \end{cases}$$

Ces trois équations linéaires déterminent complétement les trois inconnues ξ, η, ζ, du moins dès que l'on suppose connues les masses et les distances des étoiles.

Si nous projetons chaque étoile sur une sphère dont le centre est à l'origine mobile, et qui a pour rayon le rayon vecteur de cette étoile, ∂R sera nul pour l'étoile projetée, considérée comme mobile elle-même. Faisons donc $\partial R = 0$ dans les équations (5), et remplaçons y ∂x, ∂y, ∂z par (∂x), (∂y), (∂z), les parenthèses indiquant que les variations se rapportent aux étoiles projetées; on aura

$$(\partial x) = -R\sin\alpha\,\partial\alpha,\quad (\partial y) = -R\sin\beta\,\partial\beta,\quad (\partial z) = -R\sin\gamma\,\partial\gamma.$$

On peut trouver encore un autre équivalent des quantités $R\sin\alpha\,\partial\alpha$, $R\sin\beta\,\partial\beta$, $R\sin\gamma\,\partial\gamma$. En effet, soit ∂s l'angle correspondant au mouvement propre, tel qu'il est observé de la Terre; $R\partial s$ sera l'arc parcouru par la projection de l'étoile sur la sphère héliocentrique de rayon R. Soient u, v, w, les angles formés par la tangente à cet arc avec les demi-axes des x, des y et des z positives: on aura évidemment

$$(\partial x) = R\cos u\,\partial s,$$
$$(\partial y) = R\cos v\,\partial s,$$
$$(\partial z) = R\cos w\,\partial s.$$

On a donc, pour exprimer les derniers membres des équations (10), les doubles égalités

$$(11)\quad \begin{cases} \Sigma(m\mathrm{R}\sin\alpha\,\partial\alpha) = -\Sigma[m(\partial x)] = -\Sigma(m\mathrm{R}\cos u\,\partial s), \\ \Sigma(m\mathrm{R}\sin\beta\,\partial\beta) = -\Sigma[m(\partial y)] = -\Sigma(m\mathrm{R}\cos v\,\partial s), \\ \Sigma(m\mathrm{R}\sin\gamma\,\partial\gamma) = -\Sigma[m(\partial z)] = -\Sigma(m\mathrm{R}\cos w\,\partial s). \end{cases}$$

Ainsi ces derniers membres sont, aux signes près, les *quantités de mouvement* obtenues dans la supposition $\partial\mathrm{R} = 0$, et projetées sur chacun des trois axes fixes.

D'un autre côté, considérons la sphère de rayon 1, et dont le centre est au Soleil; rapportons par la pensée chaque étoile au point où son rayon vecteur héliocentrique vient percer cette surface. Soient x', y', z' ce que deviennent alors les coordonnées x, y, z de l'étoile; on aura évidemment

$$\begin{array}{lll} \cos\alpha = x', & \cos\beta = y', & \cos\gamma = z', \\ \sin^2\alpha = y'^2 + z'^2, & \sin^2\beta = x'^2 + z'^2, & \sin^2\gamma = x'^2 + y'^2. \end{array}$$

La quantité A [voir les équations (9)] prendra la forme $\Sigma m(y'^2 + z'^2)$, et représentera le *moment d'inertie* de la sphère à surface étoilée et de rayon 1, par rapport à l'axe des x; B sera le moment d'inertie des mêmes étoiles par rapport à l'axe des y, et C par rapport à l'axe des z. Les termes a, b, c correspondront aux sommes de rectangles $\Sigma my'z'$, $\Sigma mx'z'$, $\Sigma mx'y'$, sommes qui, comme on le sait, jouent un grand rôle dans la théorie des moments d'inertie. Concevons donc que l'on ait déterminé les trois axes principaux de cette surface sphérique étoilée, et prenons ces axes pour axes coordonnés; remplaçons en conséquence ξ, η, ζ par ξ', η', ζ'; les moments A, B, C par les trois moments principaux A', B', C', et α, β, γ par α', β', γ'; les sommes de rectangles s'évanouiront dans ce nouveau système d'axes, et l'on aura simplement

$$(12)\quad \begin{cases} \mathrm{A}'\xi' = \Sigma(m\mathrm{R}\sin\alpha'\partial\alpha'), \\ \mathrm{B}'\eta' = \Sigma(m\mathrm{R}\sin\beta'\partial\beta'), \\ \mathrm{C}'\zeta' = \Sigma(m\mathrm{R}\sin\gamma'\partial\gamma'). \end{cases}$$

On arrive à une équation semblable, si l'on fait coïncider l'axe des x

avec la droite suivant laquelle se meut le Soleil ; car, en faisant

$$\eta = 0,\quad \zeta = 0,\quad \xi = \rho,$$

dans la première des équations (10), on trouve

$$(13)\qquad A\rho = \Sigma\,(m\mathrm{R}\sin\alpha\,\delta\alpha).$$

On peut maintenant, en tenant compte des équations (11), (12) et (13), énoncer ces derniers résultats sous la forme du théorème suivant :

« Si, d'une part, on rapporte les étoiles sur une surface sphérique » de rayon 1, en leur conservant leurs masses et leurs positions relatives angulaires; et, si d'autre part, on projette sur un axe passant par le Soleil leurs quantités de mouvement normales aux » rayons vecteurs héliocentriques, la somme de ces quantités, divisée » par le moment d'inertie que possède autour du même axe la surface » sphérique étoilée de rayon 1, donnera, après avoir changé son signe, la composante de la vitesse du Soleil suivant ce même axe, si » celui-ci est d'ailleurs, ou l'un des trois axes principaux de la surface » sphérique, ou la droite suivant laquelle se meut le Soleil. »

Il est cependant plus simple, dans la pratique, de ne point effectuer de changement d'axe, et de prendre pour plans coordonnés l'équateur et les deux colures, les axes des x, des y et des z positives venant percer la sphère céleste au premier point du Bélier, au point équatorial de 6 heures, et au pôle nord.

Nommons D et Æ la déclinaison et l'ascension droite de l'étoile (x, y, z); nous aurons

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos\alpha &= \cos \mathrm{D} \cos Æ,\\ \cos\beta &= \cos \mathrm{D} \sin Æ,\\ \cos\gamma &= \sin \mathrm{D}.\end{aligned}\right.$$

Prenons l'année pour unité de temps; les variations $\delta\mathrm{D}$, $\delta Æ$ représenteront les mouvements propres annuels de l'étoile en déclinaison et en ascension droite, et l'on aura

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \sin\alpha\,\delta\alpha &= \cos \mathrm{D} \sin Æ\,\delta Æ + \sin \mathrm{D} \cos Æ\,\delta\mathrm{D},\\ \sin\beta\,\delta\beta &= -\cos \mathrm{D} \cos Æ\,\delta Æ + \sin \mathrm{D} \sin Æ\,\delta\mathrm{D},\\ \sin\gamma\,\delta\gamma &= -\cos \mathrm{D}\,\delta\mathrm{D}.\end{aligned}\right.$$

Les equations (14) et (15) suffisent pour éliminer complétement les angles α, β, γ des équations (10).

Pour pouvoir les appliquer, malgré notre ignorance des distances et des masses des étoiles, j'ai supposé les masses constantes, ce qui fait disparaître le facteur commun m des équations (10). J'ai supposé en outre la distance R constante et égale à la distance moyenne des étoiles qui composent le groupe. On trouve alors

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma(1-\cos^2 \mathrm{D}\cos^2 \text{Æ})\xi - \Sigma(\cos^2 \mathrm{D}\sin \text{Æ}\cos \text{Æ})\eta - \Sigma(\cos \mathrm{D}\sin \mathrm{D}\cos \text{Æ})\zeta \\ &\qquad\qquad = \mathrm{R}\Sigma(\cos \mathrm{D}\sin \text{Æ}\,\delta\text{Æ} + \sin \mathrm{D}\cos \text{Æ}\,\delta \mathrm{D}),\\ &\Sigma(1-\cos^2 \mathrm{D}\sin^2 \text{Æ})\eta - \Sigma(\cos^2 \mathrm{D}\sin \text{Æ}\cos \text{Æ})\xi - \Sigma(\cos \mathrm{D}\sin \mathrm{D}\sin \text{Æ})\zeta \\ &\qquad\qquad = \mathrm{R}\Sigma(-\cos \mathrm{D}\cos \text{Æ}\,\delta\text{Æ} + \sin \mathrm{D}\sin \text{Æ}\,\delta \mathrm{D}),\\ &\Sigma(\cos^2 \mathrm{D})\zeta - \Sigma(\cos \mathrm{D}\sin \mathrm{D}\cos \text{Æ})\xi - \Sigma(\cos \mathrm{D}\sin \mathrm{D}\sin \text{Æ})\eta \\ &\qquad\qquad = \mathrm{R}\Sigma(-\cos \mathrm{D}\,\delta \mathrm{D}). \end{aligned}\right.$$

En appliquant ces formules aux soixante et onze étoiles à mouvement propre supérieur à 0″,5, dont M. Bessel a donné le catalogue dans ses *Fundamenta Astronomiæ*, p. 310, j'ai obtenu

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &41,949\,\xi - 3,376\,\eta + 1,200\,\zeta = -\ 6'',140.\mathrm{R},\\ &45,149\,\eta - 3.376\,\xi + 4,299\,\zeta = -\ 20'',928.\mathrm{R},\\ &54,901\,\zeta + 1,200\,\xi + 4,299\,\eta = +\ 15'',807.\mathrm{R}. \end{aligned}\right.$$

Il est visible qu'en opérant ainsi, chaque étoile intervient dans le résultat définitif proportionnellement à la grandeur de son mouvement propre. La plupart des astronomes, et notamment M. Argelander, ont opéré différemment, et ont assigné à chaque étoile une part d'influence égale dans la formation des moyennes et des sommes, quel que soit d'ailleurs son mouvement propre. Soit toujours δs le mouvement propre annuel, abstraction faite de tout signe : l'hypothèse de ces auteurs revient a supposer que la distance R est en raison inverse de δs, que l'on a $\mathrm{R} = \frac{r}{\delta s}$, r étant la distance moyenne des étoiles, dont le mouvement propre est 1. Or, s'il est certain, d'un côté, que R croît *généralement* à mesure que δs diminue, il est pareillement certain que R croît *généralement* avec une rapidité moindre que celle de $\frac{1}{\delta s}$: car les causes qui déterminent un mouvement propre lent ou rapide sont au nombre de trois: *distance à la Terre, valeur absolue du mouvement*, et *obliquité du mouvement sur le rayon visuel de l'étoile*. Admettre l'exacte proportionnalité de R à $\frac{1}{\delta s}$, ou de δs à $\frac{1}{R}$, serait donc nier l'existence des deux dernières de ces trois causes. La vérité est donc entre les deux hypothèses de R constant et de R inverse du mouvement propre. Les résultats de cette deuxième hypothèse sont déjà connus par l'important travail de M. Argelander. J'ai dû adopter ici la première hypothèse, afin de parvenir à renfermer les inconnues de la question entre deux limites dont les erreurs soient forcément de signes contraires.

La résolution des équations (17) donne

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= -\,0'',1969.R.\\ \eta &= -\,0'',5099.R,\\ \zeta &= +\,0'',3322.R. \end{aligned}\right.$$

Prenons maintenant pour coordonnées du mouvement solaire sa vitesse $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$, et les coordonnées astronomiques D_0, $Æ_0$ du pôle parallactique; ces coordonnées se déduiront facilement des valeurs de ξ, η, ζ, et l'on aura

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} D_0 &= +31^\circ\,17'.\\ Æ_0 &= 248^\circ\,53'.\\ \rho &= 0''.6397.R. \end{aligned}\right.$$

Si l'on ramène les valeurs de D_0, $Æ_0$ à l'époque 1792,5 adoptée par M. Argelander, elles se changent en $+\,31^\circ\,12'$ et $249^\circ\,14'$.

Les soixante et onze étoiles que j'ai considérées correspondent aux classes I et II de M. Argelander. En prenant la moyenne entre les résultats que chacune de ces deux classes a fournis, et tenant compte du nombre différent d'étoiles dans chacune de ces classes, je trouve que pour ces soixante et onze étoiles fondamentales les résultats des calculs de M. Argelander sont les suivants :

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} D_0 &= +38^\circ\,50'.\\ Æ_0 &= 257^\circ\,34'. \end{aligned}\right.$$

La position du pôle parallactique de M. Argelander diffère donc de 10°,2 de celle que lui assignent nos calculs. Cette différence paraîtra sans doute peu importante, si l'on songe à la dissemblance des hypothèses faites par les deux calculateurs sur les valeurs des distances R. Il n'est pas inutile de rappeler à ce sujet que l'inexactitude de l'hypothèse $\delta R = 0$ n'influe pas sur la position du pôle parallactique.

Nous n'avons considéré jusqu'ici que le groupe formé par soixante et onze étoiles et le Soleil; or il est certain qu'à des distances moindres que la plus éloignée de ces étoiles, il en existe un assez grand nombre d'autres, disséminées dans l'espace, et dont le mouvement propre est inférieur à 0″.5. Il est naturel de les faire entrer en ligne de compte; car il est médiocrement utile de connaître le mouvement du Soleil par rapport au centre de gravité du système de soixante et onze étoiles prises çà et là dans l'espace; mais il importe de déterminer le mouvement de ce centre par rapport au centre d'un groupe naturel stellaire compris dans l'intérieur d'une enceinte sphérique dont le Soleil occupe la partie centrale. Si les distances des étoiles nous étaient connues, il serait facile de combler cette lacune, et d'adjoindre au groupe étudié toutes celles dont la distance à la Terre est inférieure à une limite donnée. Ne pouvant opérer ainsi, tâchons du moins d'apprécier le sens dans lequel sera modifiée la vitesse du Soleil.

Pour cela, différentions les équations (4), en considérant les variations relatives à l'origine fixe; nous aurons

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta x &= -\,R\sin\alpha\,\Delta\alpha + \cos\alpha\,\Delta R.\\ \Delta y &= -\,R\sin\beta\,\Delta\beta + \cos\beta\,\Delta R,\\ \Delta z &= -\,R\sin\gamma\,\Delta\gamma + \cos\gamma\,\Delta R.\end{aligned}\right.$$

Retranchons des équations (21) les équations (5), en ayant égard aux équations (1) et à l'équation (7); il viendra

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \xi &= R\sin\alpha\,\delta\alpha - R\sin\alpha\,\Delta\alpha + \cos\alpha(\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma),\\ \eta &= R\sin\beta\,\delta\beta - R\sin\beta\,\Delta\beta + \cos\beta(\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma),\\ \zeta &= R\sin\gamma\,\delta\gamma - R\sin\gamma\,\Delta\gamma + \cos\gamma(\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma).\end{aligned}\right.$$

Multiplions ces équations par m, et étendons-les à toutes les étoiles du groupe, nous aurons, après avoir formé la somme Σ,

$$(23)\quad\left\{\begin{aligned}&\Sigma(m\sin^2\alpha)\xi - \Sigma(m\cos\alpha\cos\beta)\eta - \Sigma(m\cos\alpha\cos\gamma)\zeta\\&\qquad = \Sigma(m\mathrm{R}\sin\alpha\,\partial\alpha) - \Sigma(m\mathrm{R}\sin\alpha\,\Delta\alpha),\\&\Sigma(m\sin^2\beta)\eta - \Sigma(m\cos\alpha\cos\beta)\xi - \Sigma(m\cos\beta\cos\gamma)\zeta\\&\qquad = \Sigma(m\mathrm{R}\sin\beta\,\partial\beta) - \Sigma(m\mathrm{R}\sin\beta\,\Delta\beta),\\&\Sigma(m\sin^2\gamma)\zeta - \Sigma(m\cos\alpha\cos\gamma)\xi - \Sigma(m\cos\beta\cos\gamma)\eta\\&\qquad = \Sigma(m\mathrm{R}\sin\gamma\,\partial\gamma) - \Sigma(m\mathrm{R}\sin\gamma\,\Delta\gamma).\end{aligned}\right.$$

Si l'on nomme U, V, W les angles formés par la tangente à l'arc de mouvement propre sur la sphère à centre fixe, avec les trois axes coordonnés, on aura

$$\Sigma m\mathrm{R}\sin\alpha\,\Delta\alpha = -\Sigma(m\mathrm{R}\cos\mathrm{U}\,\Delta s).$$

L'angle U pouvant avoir indifféremment toutes sortes de valeurs, de 0 à 180 degrés, on est conduit à supposer $\Sigma m\mathrm{R}\cos\mathrm{U}\,\Delta s = 0$. On arriverait au même résultat en admettant que les projections des quantités de mouvement perpendiculaires au rayon vecteur s'entre-détruisent sur un axe fixe. On retombe alors sur les équations (10) par une voie bien différente de la première.

L'hypothèse qui conduit à $\Sigma m\mathrm{R}\sin\alpha\,\Delta\alpha = 0$ n'est applicable que dans le cas où la somme Σ comprend en effet toutes les étoiles du groupe, ou du moins un certain nombre d'étoiles *prises entièrement au hasard*. Or, la condition $\partial s > 0'',5$, d'après laquelle ont été choisies nos soixante et onze étoiles, empêchera généralement les divers termes des sommes $\Sigma m\mathrm{R}\sin\alpha\,\Delta\alpha$, $\Sigma m\mathrm{R}\sin\beta\,\Delta\beta$, $\Sigma m\mathrm{R}\sin\gamma\,\Delta\gamma$, de s'entre-détruire.

Pour le démontrer, prenons pour axe des x la droite suivant laquelle se meut le Soleil, et supposons, pour simplifier, que cet axe soit un des axes principaux du système. Les équations (23) deviendront

$$(24)\quad\left\{\begin{aligned}&\Sigma(m\sin^2\alpha)\xi = \Sigma m\mathrm{R}\sin\alpha\,\partial\alpha - \Sigma m\mathrm{R}\sin\alpha\,\Delta\alpha,\\&\Sigma(m\sin^2\beta)\eta = \Sigma m\mathrm{R}\sin\beta\,\partial\beta - \Sigma m\mathrm{R}\sin\beta\,\Delta\beta = 0\\&\Sigma(m\sin^2\gamma)\zeta = \Sigma m\mathrm{R}\sin\gamma\,\partial\gamma - \Sigma m\mathrm{R}\sin\gamma\,\Delta\gamma = 0,\end{aligned}\right.$$

et la première des équations (22) donne, en y faisant $\eta = 0$, $\zeta = 0$, $\xi = \rho$,

$$\partial\alpha - \Delta\alpha = \rho\,\frac{\sin\alpha}{\mathrm{R}}$$

La quantité $\partial\alpha - \Delta\alpha$ est le *déplacement parallactique* de l'étoile, lequel a lieu suivant un méridien parallactique, c'est-à-dire dans un plan passant par l'axe des x et par l'étoile. Soit σ le déplacement angulaire de l'étoile normalement à ce méridien. Il est clair que l'on aura

$$\partial s^2 = \sigma^2 + \partial\alpha^2 = \sigma^2 + \left(\rho\frac{\sin\alpha}{R} + \Delta\alpha\right)^2.$$

La condition $\partial s > 0'',5$ suppose donc que l'on ait

$$\sigma^2 + \rho^2\frac{\sin^2\alpha}{R^2} + \Delta\alpha^2 + 2\rho\frac{\sin\alpha}{R}\Delta\alpha > (0'',5)^2.$$

Deux valeurs égales de $\Delta\alpha$, mais de signes contraires, ne satisferont pas également bien à cette inégalité; si $\Delta\alpha = -\sqrt{\Delta\alpha^2}$ satisfait à l'inégalité, à plus forte raison y sera-t-il satisfait par $\Delta\alpha = +\sqrt{\Delta\alpha^2}$; mais il se peut très-bien que la valeur $+\sqrt{\Delta\alpha^2}$ y satisfasse, et que $-\sqrt{\Delta\alpha^2}$ n'y satisfasse pas. Concluons de là que pour les soixante et onze étoiles déterminées d'après la condition $\partial s > 0'',5$, la valeur de $\Delta\alpha$ est le plus ordinairement positive. Donc le terme $\Sigma m \sin\alpha\Delta\alpha$ est positif, α étant nécessairement compris entre 0° et 180°. Donc la valeur $\xi = \rho$, déterminée d'après la supposition $\Delta\alpha = 0$ est trop forte. Ainsi l'introduction des étoiles à mouvement propre $< 0'',5$ devra diminuer la valeur de la vitesse solaire conclue seulement des étoiles à grand mouvement propre. Si la supposition $\Sigma m R \sin\alpha\Delta\alpha = 0$ est illégitime, il est légitime toutefois de supposer

$$\Sigma(mR\sin\beta\Delta\beta) = 0,\quad \Sigma(mR\sin\gamma\Delta\gamma) = 0.$$

En effet, l'inégalité conclue de $\partial s > 0'',5$ devient, relativement à l'axe des y,

$$\sigma'^2 + \rho^2\frac{\cos^2\alpha\cot^2\beta}{R^2} + \Delta\beta^2 - 2\rho\frac{\cos\alpha\cot\beta}{R}\Delta\beta > (0'',5)^2,$$

et cette dernière inégalité est aussi bien satisfaite par des valeurs positives que par des valeurs négatives de $\Delta\beta$, à cause des changements de signe du facteur $\cos\alpha\cot\beta$. Ainsi, que l'on ait égard ou non à ces termes dans les équations (24), que l'on tienne compte ou non des étoiles pour lesquelles $\partial s < 0'',5$, on aura également $\eta = 0$, $\zeta = 0$; et la position du pôle parallactique restera la même. Toutefois, ce dernier résultat n'est rigoureux que dans le cas où le Soleil parcourt l'un des trois axes principaux du système. Dans le cas général, la position de ce pôle pourra être un peu modifiée.

Convenons maintenant de réserver la notation Σ pour les étoiles à mouvement propre $> 0'',5$ et la notation Σ' pour les étoiles à mouvement moindre. Nous pourrons mettre la première des équations (24) sous la forme

$$\begin{aligned}(\Sigma m \sin^2\alpha + \Sigma' m \sin^2\alpha)\rho = \Sigma\, m\mathrm{R} \sin\alpha\,\delta\alpha + \Sigma'\, m\mathrm{R}\sin\alpha\,\delta\alpha \\ -(\Sigma m\mathrm{R}\sin\alpha\,\Delta\alpha + \Sigma' m\mathrm{R}\sin\alpha\,\Delta\alpha).\end{aligned}$$

La quantité fonction de $\Delta\alpha$ est nulle, puisqu'elle représente la projection sur l'axe des x des quantités de mouvement de tout le groupe; ainsi, en changeant $\sin\alpha\,\delta\alpha$ en $-\cos u\,\delta s$, nous aurons

$$\rho = -\frac{\Sigma m\mathrm{R}\cos u\,\delta s + \Sigma' m\mathrm{R}\cos u\,\delta s}{\Sigma m\sin^2\alpha + \Sigma' m\sin^2\alpha}.$$

Soient N le nombre des étoiles à mouvement propre $> 0'',5$, et N' le nombre inconnu des étoiles à mouvement propre $< 0'',5$; soit $\mathrm{S} = \Sigma\delta s$ la somme des mouvements propres des N premières; soit $\mathrm{S}' = \Sigma'\delta s$ la somme des mouvements propres des N' secondes, le mouvement moyen $\frac{\mathrm{S}'}{\mathrm{N}'}$, de ces N' étoiles étant nécessairement bien inférieur au mouvement moyen $\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N}}$ des N autres. On pourra écrire

$$\mathrm{N}' = i\mathrm{N}, \quad \mathrm{S}' = ei\mathrm{S}, \tag{25}$$

e étant un nombre plus petit que 1, et i un autre nombre plus grand ou plus petit que 1. Ceci posé, remarquons qu'avant l'introduction des N' étoiles, on avait

$$\rho = -\frac{\Sigma m\mathrm{R}\cos u\,\delta s}{\Sigma m\sin^2\alpha}$$

L'introduction des étoiles N' augmentera le dénominateur dans le rapport de N à N + N'. Mais dans quel rapport variera le numérateur? Ce rapport dépend évidemment de la loi de possibilité qu'offrent des valeurs de plus en plus grandes de $\Delta\alpha$; si les probabilités diverses des valeurs $\Delta\alpha = \pm 0'',1$, $\Delta\alpha = \pm 0'',2$, $\Delta\alpha = \pm 0'',3$,... étaient connues, il serait possible de traiter les équations (24) sous ce point de vue.

Mais cette loi est inconnue; en conséquence, je me suis borné à admettre que le numérateur augmente dans le rapport de $S + S'$ à S, ce qui revient à dire que la valeur moyenne du facteur $\cos u$ dans la somme $\Sigma m R \cos u\, \delta s$ reste la même dans la seconde somme Σ', hypothèse qui pourrait à la rigueur ne pas être entièrement conforme à la vérité [*]. D'après cette manière de voir, l'introduction des N' étoiles dans nos calculs introduit dans la valeur de ρ le facteur

$$\frac{1+\frac{S'}{S}}{1+\frac{N}{N'}} = \frac{1+ei}{1+i}.$$

On aura donc

$$\rho = 0'',6397 . R \, \frac{1+ei}{1+i}. \tag{26}$$

La quantité $\frac{S}{N}$ est connue et a pour valeur $0'',940$. On aura donc aussi

$$\rho = 0,6805 . R \, \frac{S+S'}{N+N'}. \tag{27}$$

Ces équations montrent qu'il n'est pas possible de déterminer la vitesse solaire ρ dans l'état actuel de nos connaissances; mais l'on peut cependant comparer cette vitesse inconnue avec la vitesse moyenne pareillement inconnue des étoiles qui nous avoisinent, et déterminer assez exactement le rapport de ces deux vitesses.

---

[*] Voilà la seule objection sérieuse qui me paraisse pouvoir être faite à la détermination du rapport existant entre la vitesse du Soleil et la vitesse moyenne des étoiles. Le seul moyen possible d'éluder cette difficulté sera sans doute de grouper les etoiles, non plus d'après l'intensité de leurs mouvements propres, comme l'ont fait MM. Bessel et Argelander, et comme je l'ai fait pareillement dans ce Mémoire, mais bien d'après l'ordre de leurs grandeurs optiques, indépendamment de la considération de la grandeur du mouvement propre; de réunir dans un premier groupe les étoiles de première et de deuxième grandeur, celles de troisième dans un second groupe, et ainsi de suite. On aura alors

$$e = 1, \quad \frac{S+S'}{N+N'} = \frac{S}{N};$$

et la restitution idéale des étoiles comparativement obscures ne tendra plus alors à modifier la vitesse de translation du Soleil.

Dans ce but, je représenterai par $\Delta\odot$ la moyenne des mouvements propres que paraîtra avoir le Soleil successivement envisagé des divers points de la sphère des étoiles, ou plus simplement de la distance moyenne R à laquelle ces étoiles sont situées. Je représenterai de même par $\delta\bigstar$ le mouvement moyen des étoiles vues du Soleil, et par $\Delta\bigstar$ le même moyen mouvement lorsqu'on considère les étoiles non plus du Soleil mobile, mais de notre origine fixe des coordonnées

Rapportons le point d'où nous regardons le Soleil à l'équateur parallactique et au pôle parallactique; soit ε la distance de ce point a l'équateur parallactique, mesurée sur un arc de grand cercle normal à cet équateur, et soit E la distance du pied de ce grand cercle à un point fixe de l'équateur parallactique. Le mouvement propre du Soleil vu du point (ε, E) sera égal à $0{,}6805 \cos\varepsilon \dfrac{S+S'}{N+N'}$.

Le facteur $\cos\varepsilon$ variant avec la position de l'observateur, il faut obtenir sa valeur moyenne; or l'élément différentiel de la surface sphérique est

$$\cos\varepsilon\, d\varepsilon\, dE.$$

On l'obtiendra donc par la formule

$$\frac{\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\varepsilon . \cos\varepsilon\, d\varepsilon\right) dE}{\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\varepsilon\, d\varepsilon\right) dE},$$

et l'on trouve

$$\textit{valeur moyenne de } \cos\varepsilon = \tfrac{1}{4}\pi.$$

On aura donc

$$(28) \qquad \Delta\odot = 0{,}5345 \frac{S+S'}{N+N'} = 0{,}5345\, \delta\bigstar.$$

S'il était permis de supposer $\delta\bigstar = \Delta\bigstar$, cette formule résoudrait immédiatement la question proposée.

Pour déterminer le rapport $\dfrac{\Delta\bigstar}{\delta\bigstar}$, reprenons les équations (22), et nommons λ l'angle formé par la route du Soleil avec le rayon vecteur de l'étoile. En observant que l'on a

$$(29)\qquad \rho\cos\lambda = \xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma,$$

nous trouverons

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{R}\sin\alpha\,\Delta\alpha &= \mathrm{R}\sin\alpha\,\partial\alpha + \rho\cos\alpha\cos\lambda - \xi,\\ \mathrm{R}\sin\beta\,\Delta\beta &= \mathrm{R}\sin\beta\,\partial\beta + \rho\cos\beta\cos\lambda - \eta,\\ \mathrm{R}\sin\gamma\,\Delta\gamma &= \mathrm{R}\sin\gamma\,\partial\gamma + \rho\cos\gamma\cos\lambda - \zeta. \end{aligned}\right.$$

Formons la somme des carrés de ces trois équations: en tenant compte de la suivante

$$\sin\alpha\cos\alpha\,\partial\alpha + \sin\beta\cos\beta\,\partial\beta + \sin\gamma\cos\gamma\,\partial\gamma = 0,$$

nous trouverons

$$\begin{aligned} \mathrm{R}^2\Delta s^2 = \mathrm{R}^2\partial s^2 &+ \rho^2\cos^2\lambda + \rho^2\\ &- 2\mathrm{R}(\xi\sin\alpha\,\partial\alpha + \eta\sin\beta\,\partial\beta + \zeta\sin\gamma\,\partial\gamma) - 2\rho^2\cos^2\lambda. \end{aligned}$$

Multiplions par m, et étendons cette équation à toutes les étoiles du système; nous trouverons

$$(31)\left\{\begin{aligned} &\Sigma\, m\mathrm{R}^2\Delta s^2 = \Sigma\, m\mathrm{R}^2\partial s^2 + \rho^2\,\Sigma\, m\sin^2\lambda\\ &- 2\left[\xi\,\Sigma(m\mathrm{R}\sin\alpha\,\partial\alpha) + \eta\,\Sigma(m\mathrm{R}\sin\beta\,\partial\beta) + \zeta\,\Sigma(m\mathrm{R}\sin\gamma\,\partial\gamma)\right]. \end{aligned}\right.$$

Soit maintenant G le moment d'inertie des étoiles rapportées à la sphère de rayon 1, et relatif à l'axe qui coïncide avec la route du Soleil; on aura, en ayant égard aux équations (10) et à la théorie connue des moments d'inertie,

$$\begin{gathered} \xi\,\Sigma(m\mathrm{R}\sin\alpha\,\partial\alpha) + \eta\,\Sigma(m\mathrm{R}\sin\beta\,\partial\beta) + \zeta\,\Sigma(m\mathrm{R}\sin\gamma\,\partial\gamma)\\ = \mathrm{A}\xi^2 + \mathrm{B}\eta^2 + \mathrm{C}\zeta^2 - 2a\eta\zeta - 2b\xi\zeta - 2c\xi\eta = \mathrm{G}\rho^2,\\ \Sigma\, m\sin^2\lambda = \mathrm{G}. \end{gathered}$$

Donc on a

$$(32)\qquad \Sigma(m\mathrm{R}^2\Delta s^2) = \Sigma(m\mathrm{R}^2\partial s^2) - \mathrm{G}\rho^2;$$

$m\mathrm{R}^2\Delta s^2$ est la force vive de l'étoile parallèlement à la sphère fixe, et $m\mathrm{R}^2\partial s^2$ est sa force vive parallèle à la sphère mobile. L'excès de la seconde somme sur la première est donc absolument indépendant de la grandeur et de la direction des mouvements propres; il ne dépend que du mouvement du Soleil et du mode de distribution des étoiles sur la sphère. On est ainsi conduit à ce théorème :

« L'excès de la somme des forces vives des étoiles dues à leurs mou-
» vements propres apparents sur la somme des forces vives des mou-
» vements propres absolus, est une quantité qui reste constante, quelle
» que soit la direction et l'intensité de ces mouvements; cet excès a pour
» mesure le moment d'inertie des étoiles projetées sur la sphère qui a
» pour rayon la vitesse du Soleil, l'axe de ce moment d'inertie étant
» la droite suivant laquelle se meut ce dernier astre. »

Si maintenant dans l'équation (31) on remplace $\rho^2 \sin^2\lambda$ par sa valeur tirée de l'équation (29), c'est-à-dire par

$$\begin{gathered}\xi^2 \sin^2\alpha + \eta^2 \sin^2\beta + \zeta^2 \sin^2\gamma \\ - 2\xi\eta \cos\alpha \cos\beta - 2\xi\zeta \cos\alpha \cos\gamma - 2\eta\zeta \cos\beta \cos\gamma,\end{gathered}$$

si l'on différentie cette équation (31), en y considérant les Δs ou les mouvements propres sur la sphère à centre fixe, comme étant fonction des quantités ξ, η, ζ que l'on supposera variables et indépendantes entre elles, et si de plus l'on pose

$$d[\Sigma(m\mathrm{R}^2\Delta s^2)] = 0,$$

l'on devra égaler séparément à zéro les coefficients différentiels par rapport à ξ, η, ζ, et l'on trouvera

$$\begin{gathered}\Sigma m(2\xi \sin^2\alpha - 2\eta \cos\alpha \cos\beta - 2\zeta \cos\alpha \cos\gamma) - 2\Sigma m\mathrm{R} \sin\alpha\,\partial\alpha = 0, \\ \Sigma m(2\eta \sin^2\beta - 2\xi \cos\alpha \cos\beta - 2\zeta \cos\beta \cos\gamma) - 2\Sigma m\mathrm{R} \sin\beta\,\partial\beta = 0, \\ \Sigma m(2\zeta \sin^2\gamma - 2\xi \cos\alpha \cos\gamma - 2\eta \cos\beta \cos\gamma) - 2\Sigma m\mathrm{R} \sin\gamma\,\partial\gamma = 0,\end{gathered}$$

équations qui coïncident parfaitement avec les équations (10). Pour s'assurer si ces équations correspondent à un maximum ou à un minimum de la fonction $\Sigma(m\mathrm{R}^2\Delta s^2)$, formons la différentielle seconde qui aura pour expression

$$2\mathrm{A}(d\xi)^2 + 2\mathrm{B}(d\eta)^2 + 2\mathrm{C}(d\zeta)^2 - 4a\,d\zeta\,d\eta - 4b\,d\xi\,d\zeta - 4c\,d\xi\,d\eta.$$

Cette quantité représente le double produit de $(d\xi)^2 + (d\eta)^2 + (d\zeta)^2$ par le moment d'inertie de la sphère étoilée de rayon 1 autour d'un axe faisant avec les trois axes coordonnés trois angles dont les cosinus respectifs sont

$$\frac{d\xi}{\sqrt{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}},\qquad \frac{d\eta}{\sqrt{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}},\qquad \frac{d\zeta}{\sqrt{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}}.$$

Cette quantité sera donc toujours positive; ainsi « les composantes » ξ, η, ζ jouissent de la propriété remarquable de rendre un *minimum* » la somme des forces vives des étoiles parallèlement à la sphère fixe »: et, réciproquement, on peut déterminer le mouvement du Soleil d'après la condition d'atténuer autant que possible la somme des forces vives apparentes qui s'exercent parallèlement à la surface de la sphère.

Revenons maintenant aux quantités moyennes $\Delta\star$, $\partial\star$; on a d'abord

$$\Delta\star : \partial\star :: \Sigma\Delta s : \Sigma\partial s;$$

d'un autre côté, on doit avoir, à fort peu près,

$$(\Sigma\Delta s)^2 : (\Sigma\partial s)^2 :: \Sigma(m\mathrm{R}^2\Delta s^2) : \Sigma(m\mathrm{R}^2\partial s^2),$$

d'où nous conclurons, en ayant égard à l'équation (32),

$$(33)\qquad \Delta\star = \partial\star\sqrt{1-\frac{\mathrm{G}\rho^2}{\Sigma(m\mathrm{R}^2\partial s^2)}}.$$

Dans le cas particulier qui nous occupe, changeons G en G + G', le moment G se rapportant au groupe Σ, et le moment G' au groupe Σ'. Changeons de même $\Sigma m\mathrm{R}^2\partial s^2$ en $\Sigma m\mathrm{R}^2\partial s^2 + \Sigma' m\mathrm{R}^2\partial s^2$. Supposons R constant, m constant et égal à 1; nous trouverons

$$\mathrm{G} = 41{,}875,\qquad \Sigma m\mathrm{R}^2\partial s^2 = 110{,}058\,\mathrm{R}^2\sin^2 1''.$$

Mais puisque l'on a, d'après l'équation (25),

$$\frac{\mathrm{S}'}{\mathrm{N}'} = e\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N}}.\qquad \text{ou}\qquad \frac{\Sigma\partial s'}{\mathrm{N}'} = e\,\frac{\Sigma\partial s}{\mathrm{N}},$$

les mouvements moyens dans les deux groupes sont entre eux dans le rapport de 1 à e, et les moyennes de leurs carrés seront entre elles à fort peu près :: 1 : e^2. On aura donc

$$\frac{\Sigma'\partial s^2}{\mathrm{N}'} = e^2\,\frac{\Sigma\partial s^2}{\mathrm{N}},$$

$$\Sigma m\mathrm{R}^2\partial s^2 + \Sigma' m\mathrm{R}^2\partial s^2 = (1 + e^2 i)\,110.058\,\mathrm{R}^2\sin^2 1'',$$

et l'on aura aussi, à très-peu près,

$$G + G' = (1 + i)\,41,875.$$

L'équation (26) donne ensuite

$$\rho^2 = (0,6397)^2 \left(\frac{1+ei}{1+i}\right)^2 R^2 \sin^2 1''.$$

Si maintenant nous substituons ces trois valeurs dans le second membre de l'équation (33), la quantité sous le radical deviendra

$$1 - 0,1557\,\frac{(1+ei)^2}{(1+i)(1+e^2 i)}.$$

Le facteur $\frac{(1+ei)^2}{(1+i)(1+e^2 i)}$ a un minimum égal à $\frac{4e}{(1+e)^2}$, et correspondant à $i = \frac{1}{e}$; de sorte qu'il est nécessairement compris entre 1 et $\frac{4e}{(1+e)^2}$. Je le supposerai égal à $\frac{1}{2} + \frac{2e}{(1+e)^2}$.

Faisons successivement

$$e = \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{5} \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{6}:$$

nous aurons, à cause de $\frac{S}{N} = 0'',940$,

$$\frac{S'}{N'} = 0'',31,\quad 0'',23,\quad 0'',19,\quad 0'',16.$$

Il n'est guère permis de supposer $\frac{S'}{N'} < 0'',16$; car $\frac{S'}{N'}$ est la moyenne des mouvements propres inférieurs à 0'',5, et, d'un autre côté, à cause du mouvement propre du Soleil, et des déplacements parallactiques qu'il occasionne, $\delta s = 0$ n'est pas la valeur la plus probable d'un mouvement propre isolé. Notre facteur devient alors égal à 0,87, 0,82, 0,78, 0,74, à un cinquième près de sa valeur, et le radical de l'équation (33) devient lui-même égal à l'un des nombres 0,930, 0,934, 0,937 et 0,940. Si l'on fait abstraction du groupe Σ' des étoiles à mouvements propres inconnus et plus petits que 0'',5, on supposera $i = 0$, et le même radical est alors égal à 0,919. Ainsi l'introduction de ces étoiles modifie peu ce radical, et l'on peut adopter

$$\Delta\star = 0,93\,\delta\star. \tag{34}$$

Le rapport $\frac{\Delta\star}{\delta\star}$ pourra donc être considéré comme exact à $\frac{1}{50}$ pres de sa valeur. Ainsi, « le mouvement propre du Soleil augmente en » apparence les mouvements propres des étoiles d'un quartorzième de » leur grandeur. »

Si l'on transporte dans l'équation (28) la valeur de $\delta\star$, tirée de l'équation (34), on aura enfin

$$(35)\qquad \Delta\odot = 0,56\,\Delta\star.$$

Le même rapport 0,56 : 1 doit pareillement exister entre la vitesse du Soleil et la vitesse moyenne des étoiles qui l'entourent. Concluons donc que le Soleil est une étoile à faible mouvement propre, et que sa vitesse égale à peine les $\frac{6}{10}$ de la vitesse moyenne des étoiles qui l'environnent.

S'il existe, dans les espaces interstellaires, des astres dépourvus de lumière, et dont la distance à la Terre soit inférieure à celle de quelques-unes de nos étoiles N ou N', nous devons les mentionner théoriquement dans nos formules. Toutefois, si dans les équations (23) on applique l'indice Σ aux seules étoiles lumineuses, ξ, η, ζ continuant à représenter les vraies composantes solaires, on voit qu'il est permis de supposer

$$\Sigma m\mathrm{R}\sin\alpha\,\Delta\alpha = 0,\quad \Sigma m\mathrm{R}\sin\beta\,\Delta\beta = 0,\quad \Sigma m\mathrm{R}\sin\gamma\Delta\gamma = 0,$$

dans ces équations, pourvu que l'on admette que l'égale facilité de mouvement en tous sens et la compensation des signes qui en est le résultat se retrouvent et dans le système des astres lumineux et dans le système des astres obscurs considérés chacun isolément, hypothese qui est d'une haute probabilité. Les équations desquelles se déduisent la vitesse et la direction solaires restent donc les mêmes; ainsi les astres obscurs ne peuvent pas modifier sensiblement les résultats auxquels conduisent les mouvements propres des seuls astres lumineux.

Le résultat obtenu ci-dessus pour la vitesse du Soleil est contraire à celui qu'a obtenu M. Argelander. Je pense toutefois que cette diffférence peut être expliquée, du moins en grande partie.

M. Argelander partage en trois classes les étoiles à mouvement propre bien avéré. Ses classes I et II correspondent à nos soixante et onze étoiles fondamentales. Il assimile la différence de direction entre le mouvement propre et le mouvement parallactique à une erreur d'observation, et trouve pour la valeur *probable* de cette différence (celle dont la probabilité est $\frac{1}{2}$) un angle d'environ 32° 10′. Il réduit cet angle à 30°, dans la pensée que les erreurs commises sur la mesure des mouvements propres ont dû tendre à l'augmenter; mais, si je ne me trompe, ces erreurs peuvent agir indifféremment dans les deux sens, et je crois devoir, en conséquence, conserver cet angle de 32° 10′. Le calcul des probabilités donne entre l'erreur *probable* et l'erreur *moyenne* le rapport connu 0,8453 : 1. La valeur *moyenne* de l'angle compris entre le mouvement observé et le mouvement parallactique sera donc

$$\frac{32^\circ\,10'}{0,8453} = 38^\circ\,4'.$$

D'un autre côté, M. Argelander pense que pour les étoiles situées sur l'équateur parallactique, et dont le mouvement de translation égale celui du Soleil, la valeur moyenne de cet angle doit égaler la moitié de l'angle droit ou 45 degrés: sans doute il en sera ainsi si nous ne considérons que la vitesse de translation des étoiles, parallèlement à la surface de la sphère céleste; mais une partie du mouvement total se fait suivant le rayon vecteur. Pour déduire du mouvement moyen de translation des étoiles perpendiculairement au rayon vecteur, leur mouvement moyen dans l'espace, il faut multiplier le premier par la valeur moyenne de la sécante de l'angle formé par la surface de la sphère et par la direction du mouvement absolu. On déterminera ce nombre par un procédé analogue à celui déjà employé pour obtenir la valeur moyenne des cosinus de l'angle ε (page 453), et l'on trouvera pour la valeur moyenne de cette sécante

$$\frac{1}{2}\pi = 1,5708.$$

C'est la vitesse moyenne de translation des étoiles auxquelles correspond la moyenne différence angulaire de 45 degrés entre le mouvement observé et le mouvement parallactique, la vitesse du Soleil étant prise pour unité. Si la vitesse absolue de translation est égale à 1, la différence angulaire sera réduite dans le même rapport, et deviendra égale à 32°29′. Cet angle est donc inférieur à l'angle 38°4′ donné par l'observation. La comparaison des tangentes trigonométriques de ces angles donne le rapport 0,81 : 1 pour la vitesse du Soleil comparée à celle des étoiles. Ce rapport surpasse encore considérablement le rapport 0,56 : 1 que j'ai obtenu : il reste à savoir si cette différence peut s'expliquer complétement par la différence des deux hypothèses adoptées par les deux calculateurs sur la valeur des distances R, M. Argelander ayant supposé $R = \frac{r}{\delta s}$, tandis que j'ai considéré R comme constant. En attendant un nouvel examen de la question, on peut adopter comme probable le rapport simple $\Delta\odot = \frac{6}{10}\,\Delta\star$.

Les mouvements propres des étoiles du ciel austral, au delà du trentième degré de déclinaison australe, nous sont presque tous inconnus. Cette zone représente le quart du ciel étoilé : c'est une lacune importante à combler; mais il est impossible de prévoir dans quel sens les nouvelles étoiles modifieront l'ancien résultat, à moins que l'on n'admette le pouvoir de concentration d'Herschel, ou une tendance générale de toutes les étoiles du groupe vers le centre de gravité de l'ensemble, c'est-à-dire à peu près vers le Soleil. Pour apprécier l'effet de cette cause, reprenons les équations (16), lesquelles dérivent des équations rigoureuses (8) par la suppression des termes en ΔR. Rétablissons ces termes dans les équations (16), en remplaçant $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ par leurs valeurs tirées des équations (14), les derniers membres des équations (16) se changeront en

$$R\,\Sigma(\quad \cos D \sin \text{Æ}\,\partial\text{Æ} + \sin D \cos \text{Æ}\,\partial D) - \Sigma(\cos D \cos \text{Æ}\,\Delta R),$$

$$R\,\Sigma(-\cos D \cos \text{Æ}\,\partial\text{Æ} + \sin D \sin \text{Æ}\,\partial D) - \Sigma(\cos D \sin \text{Æ}\,\Delta R).$$

$$R\,\Sigma(-\cos D\,\partial D) - \Sigma(\sin D\,\Delta R),$$

et supposons-y tous les ΔR négatifs. Les termes $\Sigma(\cos D \cos \text{Æ}\,\Delta R)$ et $\Sigma(\cos D \sin \text{Æ}\,\Delta R)$ doivent continuer à s'entre-détruire malgré la suppression des étoiles australes, à cause de l'égale possibilité des valeurs positives et des valeurs négatives des facteurs $\cos \text{Æ}$ et $\sin \text{Æ}$; ainsi ξ et η ne varient pas. Mais le terme $\Sigma \sin D\,\Delta R$ sera généralement négatif, $\sin D$ étant généralement positif, à cause de la prédominance des étoiles boréales. La restitution des étoiles australes permet seule de supposer

$$\Sigma \sin D \Delta R = 0.$$

Ainsi, en continuant à admettre l'hypothèse de W. Herschel, la troisième des équations (16) ne peut être considérée comme vraie qu'à la condition de comprendre, par la pensée, les étoiles australes dans le groupe général d'étoiles dont le centre de gravité sert de repère fixe pour la détermination de la translation du Soleil. Si l'on excluait ces étoiles australes, et généralement si le Soleil était placé excentriquement dans le système dont il fait partie, la concentration produirait un mouvement du Soleil vers le centre de gravité de l'ensemble, mouvement que l'observation des mouvements apparents serait tout à fait insuffisante pour dévoiler.

J'ai dit ci-dessus d'après quelles hypothèses sur les valeurs de m et de R mes calculs avaient été effectués; je suis loin de regarder ces suppositions comme étant les plus plausibles que l'on puisse faire sur ces quantités. Il est certainement moins invraisemblable d'admettre l'égale densité des corps célestes et leur égalité de pouvoir éclairant sur l'unité de surface, que de supposer m et R constants. En substituant ces nouvelles hypothèses aux anciennes, et nommant l l'intensité lumineuse d'une étoile vue de la Terre, on aura entre les quantités inconnues m, R et la quantité l, que des mesures directes permettent de connaître, la relation

$$m = \mathrm{K}\, l^{\frac{3}{2}}\, \mathrm{R}^3,$$

K étant un coefficient constant que les masses des étoiles doubles permettraient de mesurer, mais qui, du reste, s'éliminera de lui-même dans les équations (10), de sorte que l'on peut se borner à écrire

$$m = l^{\frac{3}{2}}\, \mathrm{R}^3. \tag{36}$$

Nous avons vu que la valeur de R était comprise entre R constant ou $\mathrm{R} = r\partial s^0$ et R inverse de ∂s ou $\mathrm{R} = r\partial s^{-1}$. Posons donc

$$\mathrm{R} = r\,\partial s^{-n}; \tag{37}$$

l'exposant $n < 1$ devra se conclure de la comparaison d'un certain nombre de quantités R avec les ∂s correspondants, et le coefficient r continuera à représenter la distance moyenne des étoiles dont le mouvement propre ∂s égale 1″. On aura alors

$$(38) \qquad m = l^{\frac{3}{2}} r^3 \partial s^{-3n}, \quad m\mathrm{R} = l^{\frac{5}{2}} r^4 \partial s^{-4n}.$$

Cette dernière formule prouve que l'on ne doit pas supposer n supérieur à $\frac{1}{4}$; sans cela les termes des sommes $\Sigma(m\mathrm{R}\cos u\partial s)$, équations (11), deviendraient infinis pour $\partial s = 0$, et les quantités de mouvement des étoiles sans mouvement propre seraient infinies, résultat tout à fait impossible. Provisoirement, on peut admettre comme probable la valeur $n = \frac{1}{5}$. Substituons-la dans les formules (38), et divisons les seconds membres de ces formules par le facteur r^3, qui, conservant la même valeur, disparaîtra de lui-même des équations (10): nous trouverons

$$(39) \qquad m = l^{\frac{3}{2}} \partial s^{-\frac{3}{5}}, \quad m\mathrm{R} = r.l^{\frac{5}{2}} \partial s^{-\frac{4}{5}}.$$

En introduisant ces valeurs dans les équations (10), leur résolution conduira aux équations

$$(40) \qquad \xi = \mathrm{H}.r, \quad \eta = \mathrm{J}.r, \quad \zeta = \mathrm{L}.r,$$

H, J et L étant trois nombres fort petits.

On en conclura la position du pôle parallactique, sans avoir besoin de déterminer r, et la vitesse du Soleil sera donnée par la formule

$$(41) \qquad \rho = \sqrt{\mathrm{H}^2 + \mathrm{J}^2 + \mathrm{L}^2}.r,$$

et pourra être calculée en myriamètres dès que la distance moyenne r des étoiles, dont le mouvement propre égale 1″ (b Aigle, η Cassiopée, etc.), sera connue de nous; mais, à cause des remarques faites ci-dessus, remarques que résume l'équation (26), nous n'obtiendrons ainsi qu'une limite supérieure de cette vitesse, à cause du facteur inconnu $\frac{1+ei}{1+i} < 1$, lequel entre dans la valeur définitive de la vitesse ρ.

Dans les étoiles doubles, soit θ le temps de la révolution de la petite étoile autour de la grande, conclu de l'observation et exprimé en années sidérales; soit ω le demi-grand axe en secondes de l'ellipse relative que la petite étoile décrit autour de la grande supposée fixe; m étant la somme des masses des deux étoiles partielles, M la masse du Soleil, on aura

$$m = \frac{M \sin^3 \omega}{\theta^2} R^3. \tag{42}$$

Cette équation donne la masse m si R est connu, et peut dans tous les cas servir à l'élimination de m. Je ferai remarquer que la détermination des valeurs de $\frac{M \sin^3 \omega}{\theta^2}$ peut nous donner, sur la valeur relative de la distance R, des présomptions qui peuvent guider les astronomes dans leurs recherches sur la parallaxe des étoiles. Puisque l'on a

$$\frac{\theta^2}{\omega^3} = \left(M \sin^3 1'' \frac{R^3}{m}\right), \tag{43}$$

une grande valeur du terme $\frac{\theta^2}{\omega^3}$ indiquera *généralement* une grande valeur de la distance R; je dis généralement, à cause du diviseur variable m qui altère la régularité du rapport $\frac{\theta^2}{\omega^3}$: R^3. Voici la valeur de $\frac{\theta^2}{\omega}$ pour quelques étoiles doubles :

p Ophiuchus ...... $\frac{\theta^2}{\omega^3} = 81$
α Gemeaux.......... $= 154$
γ Vierge... .. .. $= 162$
ξ grande Ourse....... $= 305$
η Couronne.......... $= 1113$
σ Couronne.......... $= 1589$

α Gémeaux et p Ophiuchus, étoiles douées d'ailleurs d'un fort mouvement propre, sont donc des étoiles probablement peu éloignées de la Terre. Quoi qu'il en soit, l'équation (42) donnera le moyen d'éliminer la masse m des termes relatifs à ces étoiles doubles.

Étudions maintenant le mouvement du centre de gravité de notre groupe stellaire, par rapport à un système beaucoup plus étendu dont le groupe précédent occuperait la partie centrale, et ferait lui-même partie. Nous pouvons admettre que le centre de gravité du groupe total est immobile, et chercher quel est, par rapport à ce dernier, le mouvement propre du Soleil.

Nous agrandirons alors le rayon de l'enceinte sphérique qui servait de limite à nos soixante et onze étoiles à mouvement propre $> 0'',5$, et nous embrasserons dans la nouvelle enceinte toutes les étoiles dont le mouvement propre surpasse $0'',1$.

Nous pourrions de même reculer encore les bornes de l'enceinte stellaire, et considérer toute la catégorie des étoiles pour lesquelles $\delta s > 0'',05$. Il est difficile, il est vrai, de répondre avec certitude de mouvements propres plus petits que $0'',1$; mais les erreurs commises pourront néanmoins se compenser, à cause du grand nombre d'étoiles qui interviendront, et le mouvement propre du Soleil devra encore en ressortir avec évidence. Enfin, on pourrait considérer toutes les étoiles du catalogue de Bradley, et je regarde comme très-probable que le mouvement du Soleil, que l'on obtiendrait en supposant exactes les différences des catalogues même les plus minimes, serait peu éloigné de la vérité, à cause de la compensation des erreurs et de la tendance qu'ont les causes constantes à ressortir des moyennes d'un très-grand nombre d'observations même médiocrement exactes.

Soient ξ, ξ', ξ'',... les composantes successives du mouvement solaire, parallèlement à l'axe des x, et relativement aux centres de gravité du premier, du deuxième, du troisième, etc., de ces systèmes; soient η, η', η'',..., ζ, ζ', ζ'',... les composantes du même mouvement parallèlement aux deux autres axes. Les quantités ξ, $\xi'-\xi$, $\xi''-\xi'$,... représenteront donc, la première, la composante de la vitesse du Soleil relativement à la sphère des étoiles $\delta s > 0'',5$; la deuxième, la composante de la vitesse du centre de gravité de cette sphère par rapport à la sphère des étoiles $\delta s > 0'',1$; la troisième, la composante de la vitesse du centre de cette dernière par rapport au groupe $\delta s > 0'',05$, et ainsi de suite jusqu'aux dernières limites des mouvements observables.

Il est fort à croire que les quantités ξ, $\xi'-\xi$, $\xi''-\xi'$,..., η, $\eta'-\eta$, $\eta''-\eta'$,..., ζ, $\zeta'-\zeta$, $\zeta''-\zeta'$,..., qui représentent cette suite de mouvements relatifs, vont en diminuant rapidement de grandeur à mesure que nous nous élevons d'une sphère à une autre sphère stellaire plus étendue, et que la rapidité de ce décroissement est au moins aussi grande que celle du décroissement des mouvements propres des étoiles les plus reculées de chaque groupe. Cette décroissance rapide est, en effet, indiquée par les calculs de M. Argelander, et par la comparaison qu'il a établie entre les trois classes d'étoiles pour lesquelles on a successivement

$$\partial s > 1'', \quad \partial s \begin{array}{l} > 0'',5 \\ < 1'',0 \end{array}, \quad \partial s \begin{array}{l} > 0'',1 \\ < 0'',5 \end{array}.$$

Il résulte en effet de ces calculs, que les quantités $\frac{\xi}{\rho}, \frac{\xi'}{\rho'}, \frac{\xi''}{\rho''}, \ldots$ ont à peu pres la même valeur; qu'il en est de même des quantités $\frac{\eta}{\rho}, \frac{\eta'}{\rho'}, \frac{\eta''}{\rho''}, \ldots$ comparées entre elles, ainsi que des quantités $\frac{\zeta}{\rho}, \frac{\zeta'}{\rho'}, \frac{\zeta''}{\rho''}, \ldots, \rho, \rho', \rho''$ étant les vitesses solaires correspondantes; d'où il est naturel d'inférer que l'on a à peu pres $\xi = \xi' = \xi'', \ldots, \eta = \eta' = \eta'', \ldots, \zeta = \zeta' = \zeta'', \ldots, \rho = \rho' = \rho'', \ldots$, et que les quantités $\sqrt{(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2}$, $\sqrt{(\xi'' - \xi')^2 + (\eta'' - \eta')^2 + (\zeta'' - \zeta')^2}$ sont d'un ordre de grandeur fort inférieur à la quantité $\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$.

On pouvait s'attendre à priori à ce résultat : les forces accélératrices qui peuvent déplacer le centre de gravité d'un système de corps libres sont nécessairement extérieures à ce système, en vertu du principe général de la *réaction*. Le centre de gravité reçoit ici l'action de ces forces dans une multitude de directions variées, de sorte qu'elles tendent en grande partie à s'entre-détruire, tandis que la masse à mouvoir s'accroît sans cesse à mesure que le nombre des composantes du systeme devient plus grand. Mais, outre les forces accélératrices, il existe généralement en Mécanique d'autres causes de vitesse : ce sont les impulsions initiales dont l'intensité ne saurait être calculée d'avance. Ces impulsions auraient pu, dès l'origine des temps, donner au groupe des étoiles les plus rapprochées de nous un mouvement commun de translation. Or, c'est là précisément ce que les recherches de M. Argelander semblent tout à fait infirmer, et ce résultat est certainement l'un des plus curieux parmi ceux auxquels il a été conduit.

S'il devient possible un jour de constater par les observations la loi suivant laquelle décroissent les composantes ξ, $\xi'-\xi$, $\xi''-\xi'$,..., η, $\eta'-\eta$, $\eta''-\eta'$,...; ζ, $\zeta'-\zeta$, $\zeta''-\zeta'$,... à mesure que l'enceinte stellaire augmente de diamètre, on pourra supposer ces séries prolongées à l'infini, en faire la somme, et les résultats de ces sommations représenteront les composantes de la vitesse du Soleil par rapport au centre de gravité du monde sidéral. Alors seulement nous connaîtrons le véritable mouvement de translation du Soleil par rapport à l'univers matériel.

Si un groupe restreint d'étoiles, groupe dont le Soleil ferait lui-même partie, se mouvait d'un mouvement commun par rapport au reste de l'univers, on pourrait le reconnaître dans la loi de succession des quantités ξ, $\xi'-\xi$,..., η, $\eta'-\eta$,..., ζ, $\zeta'-\zeta$,..., qui cesserait d'offrir une série décroissante et régulière. Toutes ces recherches se feraient d'ailleurs bien plus sûrement si, au lieu de classer les étoiles d'après la rapidité de leurs mouvements propres apparents, nous parvenions à pouvoir les distribuer d'après le véritable ordre de leur éloignement de la Terre.

Note sur la distribution des étoiles à mouvement propre dans l'espace.

Le résultat de nos calculs assigne aux moments d'inertie A, B, C. et aux sommes de rectangles a, b, c, les valeurs suivantes [voir les équations (10) et (17)],

$$(A)\quad \left\{\begin{array}{ll} A = 41{,}949, & a = -\,4{,}299, \\ B = 45{,}149, & b = -\,1{,}210, \\ C = 54{,}901, & c = +\,3{,}376. \end{array}\right.$$

Si les étoiles à grand mouvement propre étaient uniformément distribuées sur la surface de la sphère céleste, en tenant compte de l'absence des étoiles voisines du pôle austral qui tend à rendre le moment C plus grand que A et que B, on devrait avoir

$$(B)\qquad a = b = c = A - B = 0.$$

L'uniformité de distribution n'existe donc pas, et se manifeste surtout dans la valeur $-\,4{,}299$ de la quantité a. Sur les soixante et onze termes qui composent la somme

$$\Sigma(\cos D \sin D \sin Ꜳ) = a,$$

quarante-sept sont négatifs, et seulement vingt-quatre ont une valeur positive; ce qui indique une tendance marquée des facteurs sin D et sin Ꜳ à être de signe contraire; ainsi les étoiles à grand mouvement propre sont *généralement* boréales entre 180 et 360 degrés d'ascension droite, et sont *plus volontiers* australes dans l'autre hémisphère.

Le défaut d'uniformité est-il assez marqué pour faire admettre l'existence d'une cause spéciale qui l'ait produit? Cette question pourrait être complétement résolue, si la lacune que nous offre encore l'hémisphère austral était comblée. Néanmoins l'existence de cette cause est assez probable. L'explication la plus simple qui se présente consiste à admettre que les étoiles à fort mouvement propre sont distribuées de préférence suivant un grand cercle de la sphère. Il reste alors à déterminer les nœuds et l'inclinaison de ce grand cercle.

Pour pouvoir exprimer algébriquement la tendance que peuvent avoir eue nos soixante et onze étoiles à se ranger sur un grand cercle de la sphère, je supposerai que ces étoiles sont distribuées de la manière suivante : une partie représentée par la fraction $\frac{1}{q+1}$ sera distribuée uniformément le long de ce grand cercle, de sorte que la masse de ces étoiles pourra être considérée comme formant un anneau solide de même centre que la sphère, et d'une section transversale infiniment petite; la deuxième partie, représentée par la fraction $\frac{q}{q+1}$, sera répartie à son tour sur la surface de la sphère, et sa masse sera censée y former une couche sphérique infiniment mince. La sphère sera tronquée par le parallèle austral dont la déclinaison, abstraction faite du signe, sera désignée par A. L'anneau pourra être tronqué lui-même, si son inclinaison sur le plan de l'équateur surpasse l'angle A. Il s'agit d'obtenir les moments d'inertie et les sommes de rectangles d'un système ainsi constitué, de les comparer avec les nombres des équations (A), et d'établir, s'il est possible, l'identité entre les nombres calculés et les nombres observés, dont les équations (A) offrent les valeurs, en disposant convenablement des trois parametres arbitraires, l'inclinaison, le nœud de l'anneau, et le nombre q.

Je ferai remarquer d'abord que, dans un pareil système, la ligne des nœuds de l'anneau doit être l'un des axes principaux, l'axe du plus petit moment d'inertie, puisqu'elle jouit de cette propriété et pour la couche sphérique tronquée et pour l'anneau, que ce dernier soit ou non tronqué lui-même. Ainsi, parmi les trois axes principaux du système fourni par les équations (A), celui du moment minimum doit être couché sur le plan de l'équateur.

Ceci posé, menons par le centre de la sphère un axe qui vienne la couper en un point arbitraire, et soient D′, Æ′, les coordonnées astronomiques de ce point. Les cosinus des angles formés par cet axe avec les trois axes qui correspondent au point équatorial 0^h, au point équatorial de 6^h, et au pôle nord, seront

$$\cos D' \cos Æ', \quad \cos D' \sin Æ', \quad \text{et} \quad \sin D';$$

et, en nommant P le moment d'inertie relatif à cet axe, on aura, par une formule connue,

$$\begin{aligned}P = {} & A\cos^2 D' \cos^2 Æ' + B\cos^2 D' \sin^2 Æ' + C\sin^2 D' \\ & - 2a\cos D' \sin D' \sin Æ' - 2b\cos D' \sin D' \cos Æ' - 2c\cos^2 D' \sin Æ' \cos Æ'.\end{aligned}$$

Cette expression peut être simplifiée par l'introduction des quantités auxiliaires f, g, φ, ψ. Posons, en effet,

$$(C)\quad \left\{\begin{aligned} a &= f\cos\varphi, \\ b &= f\sin\varphi, \\ \frac{B-A}{2} &= g\cos\psi, \\ c &= g\sin\psi; \end{aligned}\right.$$

les quantités f, g sont essentiellement positives : φ et ψ peuvent varier de 0 à 360 degrés. Nous trouvons maintenant

$$(D)\quad \left\{\begin{aligned} P = C + \cos^2 D' \left[\frac{A+B-2C}{2} - g\cos(2Æ' - \psi)\right] \\ - 2f\sin D' \cos D' \sin(Æ' + \varphi). \end{aligned}\right.$$

Pour obtenir les axes principaux, différentions successivement cette équation par rapport à D′ et par rapport à Æ′, et faisons

$$\frac{dP}{dD'} = 0, \qquad \frac{dP}{d\text{Æ}'} = 0;$$

nous aurons

$$\text{(E)} \qquad \cot D' - \operatorname{tang} D' = \frac{-\frac{A + B - 2C}{2} + g\cos(2\text{Æ}' - \psi)}{f\sin(\text{Æ}' + \varphi)},$$

$$\text{(F)} \qquad \operatorname{tang} D' = \frac{g\sin(2\text{Æ}' - \psi)}{f\cos(\text{Æ}' + \varphi)}.$$

En ajoutant ces équations, et posant, pour abréger,

$$\text{(G)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{-A + B - 2C}{2} + g\cos(2\varphi + \psi) = h\cos\chi, \\ &g\sin(2\varphi + \psi) = h\sin\chi, \end{aligned} \right.$$

h et χ étant deux nouvelles auxiliaires, on trouvera, toute réduction faite,

$$\cot D' = \frac{h\cos(\text{Æ}' + \varphi - \chi)}{f\sin(\text{Æ}' + \varphi)\cos(\text{Æ}' + \varphi)}.$$

Cette équation étant multipliée par l'équation (F), nous aurons enfin

$$\text{(H)} \qquad \frac{\sin(2\text{Æ}' - \psi)\cos(\text{Æ}' + \varphi - \chi)}{\sin(\text{Æ}' + \varphi)\cos^2(\text{Æ}' + \varphi)} = \frac{f^2}{gh}.$$

Si dans cette équation développée en Æ′, on change sin Æ′ en cos Æ′ tang Æ′, on obtient une équation qui ne renferme plus que tang Æ′, et qui est du troisième degré. Ce résultat est connu depuis longtemps des géomètres; mais l'équation (H) me paraît préférable dans la pratique à l'équation algébrique du troisième degré, à cause de la facilité avec laquelle elle se prête au calcul logarithmique.

Une fois Æ′ connu, on déterminera D′ et P par les équations (F) et (D). Au moyen des équations (H), (F) et (D), j'ai trouvé pour l'axe du moment minimum, les éléments suivants :

$$\begin{aligned} D' &= +\ 12°56', \\ \text{Æ}' &= \ 216°56', \\ P &= \ 39{,}069. \end{aligned}$$

Cet axe n'étant pas situé dans le plan de l'équateur, notre hypothèse ne saurait représenter parfaitement le cas de la nature. J'ai alors altéré les valeurs de A, B, C, a, b, c, de manière à ramener cet axe dans ce plan. Pour cela, j'observe que la supposition $D' = 0$ dans les équations (E) et (F) exige que l'on ait

$$\text{Æ}' = -\varphi + t\,180^\circ,$$

$$\text{Æ}' = \frac{\psi}{2} + t'\,180^\circ,$$

t et t' étant des nombres entiers. Or, le calcul des angles φ et ψ prouve que l'on a

$$\frac{\psi}{2} + \varphi = 227^\circ 55' = 180^\circ + 47^\circ 55'.$$

En conséquence, j'ai diminué l'angle φ de $31^\circ 56',7$, et j'ai effectué la même diminution sur ψ; les quantités f, g, $\frac{B+A}{2}$ et C n'éprouvent aucun changement. Je trouve ainsi le nouveau système de valeurs

$$\begin{array}{ll} A = 40,405, & a = -4,28, \\ B = 46,69, & b = +1,26, \\ C = 54,90, & c = +3,05. \end{array}$$

Avec ces éléments, je trouve pour la position de l'axe du moment minimum,

$$D' = 0, \qquad \text{Æ}' = 106^\circ 21' \pm 90^\circ.$$

Sans changer l'axe des z, faisons coïncider l'axe des x avec l'axe du moment minimum que nous venons d'obtenir. Les quantités A, B, C, a, b, c deviennent

$$\left\{\begin{array}{ll} A = 39,81, & a = +4,46, \\ B = 47,285, & b = 0, \\ C = 54,90, & c = 0. \end{array}\right. \tag{I}$$

Le demi-axe des x positives vient alors aboutir au point $\text{Æ}' = 196^\circ 21'$, et le demi-axe des x négatives au point pour lequel $\text{Æ}' = 16^\circ 21'$.

Ces deux derniers points donnent donc la position de la ligne des nœuds de l'anneau étoilé sur le plan de l'équateur.

Cherchons maintenant les moments d'inertie

$$\Sigma(y^2 + z^2), \quad \Sigma(x^2 + z^2), \quad \Sigma(x^2 + y^2),$$

et la somme des rectangles Σyz du système mixte formé par l'anneau et la couche sphérique supposés tous les deux tronqués à la hauteur du parallèle austral dont la déclinaison est Λ, et comparons-les aux valeurs A, B, C, a, déduites des équations (I). Dans ce but, je nommerai I l'inclinaison de l'anneau sur l'équateur, $2p$ l'arc tronqué de l'anneau, son rayon étant supposé égal à 1; cet angle $2p$ sera déterminé par la formule

$$\text{(K)} \qquad \cos p = \frac{\sin \Lambda}{\sin \mathrm{I}}.$$

Si I est plus petit que Λ, on devra supposer $p = 0$, et l'anneau n'éprouvera aucune troncature. Faisons maintenant, pour simplifier,

$$\text{(L)} \qquad \begin{cases} \pi - p - \sin p \cos p = \varpi, \\ \pi - p + \sin p \cos p = \Pi. \end{cases}$$

Posons ensuite $\Lambda = 30$ degrés, ce qui diffère peu de la vérité; nous trouverons que le résultat de la comparaison entre les moments calculés et les moments observés peut se résumer par les formules

$$\text{(M)} \qquad \frac{\varpi + \frac{15}{16}\pi q}{\mathrm{A}} = \frac{\Pi + \varpi \sin^2 \mathrm{I} + \frac{15}{16}\pi q}{\mathrm{B}} = \frac{\Pi + \varpi \cos^2 \mathrm{I} + \frac{9}{8}\pi q}{\mathrm{C}} = \frac{\varpi \sin \mathrm{I} \cos \mathrm{I}}{a}.$$

Dans ces équations, les termes contenant le facteur q proviennent de la couche sphérique tronquée; les termes qui ne contiennent pas ce facteur proviennent, au contraire, de l'intégration des moments de l'anneau. Si l'on voulait conserver à la quantité Λ une valeur indéterminée, il faudrait dans ces formules remplacer

$$\tfrac{15}{16}\pi q \quad \text{par} \quad \tfrac{1}{6}(4 + 3 \sin \Lambda + \sin^3 \Lambda) q,$$

et

$$\tfrac{9}{8}\pi q \quad \text{par} \quad \tfrac{1}{6}(4 + 6 \sin \Lambda - 2 \sin^3 \Lambda) q.$$

Le dernier membre des équations (M) prouve que I est plus petit que 90 degrés, a étant une quantité positive. Ainsi, l'anneau étant censé parcouru par un astre à mouvement *direct*, on aurait pour ses nœuds

$$☊ = 196^{\circ}\, 21', \quad ☋ = 16^{\circ}\, 21'.$$

L'élimination de q entre les équations (M) les change en

$$\frac{2\Pi - \varpi - \varpi \cos 2\,\mathrm{I}}{\mathrm{B} - \mathrm{A}} = \frac{2\Pi + \varpi - 11\,\varpi \cos 2\mathrm{I}}{6\mathrm{B} - 5\mathrm{C}} = \frac{\varpi \sin 2\mathrm{I}}{a} > \frac{2\,\varpi}{\mathrm{A}},$$

l'inégalité qui termine ces équations étant destinée à exprimer que la quantité éliminée est nécessairement positive.

La valeur $\mathrm{I} = 39$ degrés satisfait à fort peu près à ces équations, et les représente sans erreur, si l'on applique à A, B, C, a les corrections $-0{,}12$, $+0{,}12$, $-0{,}09$ et $-0{,}10$: on trouve ensuite facilement $q = 2{,}35$.

Ainsi on parviendra à représenter la distribution des étoiles à mouvement propre supérieur à 0″,5, et à reproduire approximativement la position des axes principaux et la valeur des moments principaux du système, en prenant un nombre arbitraire d'étoiles, mille par exemple, en en répartissant sept cent une uniformément sur l'intégralité de la surface de la sphère, et les deux cent quatre-vingt-dix-neuf autres sur la circonférence d'un grand cercle, dont le pôle boréal sera situé par 51 degrés de déclinaison et 106 degrés d'ascension droite, enfin en tronquant la sphère étoilée, ainsi que l'anneau à la hauteur du 30ème degré de déclinaison australe.

Le grand cercle auprès duquel paraissent prédominer les forts mouvements propres offre cela de remarquable, qu'il n'est incliné que de 20 degrés sur cet autre grand cercle que M. Mædler a nommé l'*équateur stellaire* (*), et qui représente la position dominante des plans des orbites elliptiques des étoiles doubles; en outre, il passe fort près du point de la sphère vers lequel s'avance le système solaire ; des rapprochements de ce genre pourront un jour ne pas être sans importance dans l'étude cosmogonique de notre univers.

(*) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome VI, page 920.

S'il reste encore des doutes sur l'existence d'une cause spéciale qui ait présidé à l'arrangement dans l'espace des étoiles à mouvements rapides, la connaissance complète des mouvements propres du ciel austral pourra seule les dissiper. La détermination du grand cercle près duquel les mouvements rapides prédominent, et celle de ses pôles que l'on pourrait, par contraste, désigner sous le nom de *points de repos*, se feront sans difficulté, la ligne qui joint ces deux points devant coïncider avec l'axe d'inertie auquel correspond le moment maximum de la sphère des étoiles à mouvements propres. Si l'on mesure alors la distance moyenne angulaire des étoiles aux pôles de ce grand cercle, en la comparant avec la distance moyenne 57° 18' qui correspond au cas de la distribution uniforme, on aura, par des méthodes connues, la probabilité de l'existence d'une cause spéciale qui ait produit l'arrangement observé, et il sera convenable alors de rechercher quelle a pu être la nature de cette cause.

Le tableau suivant contient, pour chacune de nos soixante et onze étoiles rangées par ordre d'ascension droite, la valeur des trois composantes du mouvement propre parallèles aux trois axes coordonnés, ou, ce qui revient au même, perpendiculaires aux trois plans du colure des solstices, du colure des équinoxes, et de l'équateur. Ces mouvements sont relatifs à l'année 1755, époque du catalogue de Bradley, donné par Bessel dans ses *Fundamenta Astronomiæ*. La première colonne contient les termes $\sin\alpha\,\delta\alpha = -\cos u\,\delta s$; la deuxième colonne renferme les termes $\sin\beta\,\delta\beta = -\cos v\,\delta s$, et dans la troisième sont inscrits les termes $\sin\gamma\,\delta\gamma = -\cos w\,\delta s$.

NOMS DES ÉTOILES.	MOUVEMENT PROPRE ANNUEL, PERPENDICULAIRE AU PLAN			NOMS DES ÉTOILES.	MOUVEMENT PROPRE ANNUEL, PERPENDICULAIRE AU PLAN		
	du colure des solstices.	du colure des équinoxes.	de l'équateur.		du colure des solstices.	du colure des équinoxes.	de l'équateur.
54 Poissons...	−0″,150	+0″,449	+0″,267	42 Bérénice...	+0″,073	−0″,463	−0″,132
η Cassiopée. .	−0,237	−1,056	+0,260	43 Bérénice...	−0,208	−1,013	−0,835
μ Cassiopée...	−0,421	−3,568	+0,891	61 Vierge.....	+0,020	−1,117	+0,971
29 Baleine.. .	+0,027	−0,135	+0,469	70 Vierge	+0,197	−0,157	+0,500
107 Poissons..	−0,299	+0,225	+0,554	τ Bouvier.....	+0,189	−0,494	−0,082
τ Baleine.....	−0,930	+1,483	−0,876	θ Centaure....	−0,164	−0,500	+0,540
66 Baleine...	+0,370	−0,545	+0,040	Arcturus......	+1,167	−0,623	+1,813
δ Triangle....	+0,428	−0,981	+0,201	θ Bouvier.....	+0,476	−0,076	+0,265
12 Éridan.....	+0,051	−0,541	−0,606	44 Bouvier....	+0,371	−0,404	−0,012
ε Éridan......	−0,738	+0,624	+0,055	5 Serpent.....	+0,032	+0,005	+0,533
10 Taureau ..	−0,129	+0,109	+0.473	χ Hercule	−0,496	−0,190	−0,464
δ Éridan	−0,117	−0.104	−0,773	γ Serpent.....	−0,106	+0,486	+1,166
27 Éridan.....	+0,040	+0,242	+0,493	ζ Hercule.....	+0,325	−0,432	−0,444
d Éridan	−1,692	+1,481	+3,360	ε Scorpion....	+0,471	−0,371	+0,258
1 Orion	+0,583	−0,225	+0,022	A Ophiuchus..	+0,250	−0,558	+0,965
m Taureau....	+0,828	−0.217	−0,065	u Hercule.....	+0,030	+0,523	+0,803
λ Cocher......	+0,331	−0,514	+0,496	μ Hercule	+0,481	+0,289	+0,634
γ Lièvre......	−0,331	+0,184	+0,351	p Ophiuchus..	−0,233	+0,058	+1,121
δ Lièvre.. ...	+0,235	+0,216	+0,614	η Serpent.....	+0,604	−0,008	+0,601
Sirius........	−0.531	+0,262	+1,149	χ Dragon......	−0,516	+0,271	+0,102
Procyon	−0,576	−0,335	+0,977	b Aigle.......	−0,620	−0,365	−0,730
β Gémeaux...	−0,596	−0,278	+0,051	3 Cygne......	+0,125	+0,310	+0,554
i grande Ourse.	−0,208	−0,470	+0,192	σ Dragon	−1,062	+1,401	+0,646
π Cancer......	−0,423	−0,277	−0,352	α Aigle.......	−0,482	−0,294	−0,451
θ grande Ourse.	−0,272	−1,067	+0,368	α Flèche......	+0,476	+0,225	+0,217
11 petit Lion..	−0,378	−0,673	+0,187	1 b Cygne.....	+0,260	+0,355	+0,258
20 petit Lion..	−0,138	−0,631	+0,354	ε Cygne......	−0,110	−0,393	−0,361
20 Sextant....	−0,292	−0,538	−0,112	η Céphée.....	+0,463	−0,541	−0,397
α Coupe......	−0,118	−0,509	−0,147	61 Cygne.....	−1,528	−4,180	−2,531
ξ grande Ourse.	+0,208	−0,569	+0,520	τ Cygne......	+0,182	−0,327	−0,474
83 Lion	−0,184	−0,817	−0,250	σ Pégase......	−0,160	−0,496	−0,128
β Vierge......	+0,086	+0,727	+0,277	γ Poissons....	−0,176	−0,714	−0,027
8 Lévriers .. .	−0,159	−0,734	−0,248	i Poissons	−0,093	−0,430	+0,414
γ Vierge......	+0,066	−0,511	+0,018	85 Pégase.....	−0,506	−0,748	+0,974
10 Lévriers....	−0,040	−0,573	−0,143	β Cassiopée...	−0,188	−0,452	+0,011
33 Vierge.....	+0,038	+0 345	+0,458				

Le signe + indique une direction du point équatorial 0 heure au point équatorial 12 heures..... Premieres colonnes.
du point équatorial 6 heures au point equatorial 18 heures.... Deuxiemes colonnes.
du nord au sud....... .... Troisièmes colonnes.

Tableau général des notations employées dans le Mémoire précédent.

a, b, c, sommes de rectangles de cosinus [*voir* équations (9)].

e, nombre plus petit que 1 [*voir* équation (25)].

f, g, h, quantités auxiliaires de l'ordre des moments d'inertie [*voir* équations (C) et (G)].

i, rapport numérique [*voir* équation (25)].

l, intensité de la lumière d'une étoile.

m, m', masses des étoiles.

p, moitié de l'angle de troncature d'un anneau.

q, rapport numérique dépendant de la distribution des étoiles doubles.

r, distance moyenne à la Terre des étoiles dont le mouvement propre est égal à 1.

s, δs, Δs, arcs de mouvements propres.

δs, mouvement propre angulaire *apparent*.

Δs, mouvement propre angulaire *absolu*.

t, t', nombres entiers arbitraires, positifs ou négatifs.

u, v, w, angles formés par l'arc de mouvement propre apparent avec les trois demi-axes des coordonnées positives.

x, y, z, coordonnées d'une étoile.

A, B, C, sommes de carrés de sinus, moments d'inertie [*voir* équations (9)].

Æ, ascension droite d'une étoile.

D, déclinaison d'une étoile.

Æ$_0$, D_0, ascension droite et déclinaison du pôle parallactique.

E, longitude, ou ascension droite, comptée sur l'équateur parallactique.

G, moment d'inertie autour de l'axe suivant lequel se meut le Soleil.

H, J, L, petits nombres servant à mesurer les composantes de la vitesse solaire [*voir* équations (40)].

I, inclinaison du plan d'un anneau sur l'équateur.

K, coefficient constant de l'ordre des masses.

M, masse du Soleil.

N, N', nombres indiquant le nombre d'étoiles d'un groupe stellaire.

P, moment d'inertie autour d'un axe quelconque.

R, distance d'une étoile à la Terre.

S, S', sommes de mouvements propres.

U, V, W, angles formés par l'arc de mouvement propre absolu avec les trois demi-axes des coordonnées positives.

α, β, γ, angles formés par le rayon vecteur d'une étoile avec les trois demi-axes des coordonnées positives.

ε, latitude ou déclinaison comptée par rapport au pôle parallactique et à l'équateur parallactique.

θ, temps de la révolution de deux étoiles d'un système binaire, l'une autour de l'autre.

λ, angle d'un rayon visuel stellaire avec la route du Soleil.

ϖ, Π, auxiliaires [*voir* les équations (L)].

ρ, vitesse du Soleil.

σ, composante du mouvement propre, perpendiculairement au plan passant par l'axe des x et par l'étoile.

σ', composante perpendiculaire au plan passant par l'axe des y et par l'étoile.

ξ, η, ζ, composantes de la vitesse solaire.

φ, χ, ψ, angles auxiliaires [*voir* les équations (C) et (G)].

ω, demi-grand axe en secondes de l'orbite relative de deux étoiles d'un système binaire.

Λ, déclinaison du parallèle austral qui limite les étoiles à mouvements propres connus.

δ indique les variations par rapport à la sphère héliocentrique mobile.

Δ indique les variations par rapport à la sphère héliocentrique fixe.

Σ, Σ' indiquent les sommes des termes fournis par chaque étoile du groupe.

SUPPLÉMENT.

Après avoir donné, dans le précédent Mémoire, les formules fondamentales qui doivent servir à déterminer le mouvement de translation du Soleil, j'ai ajouté que le problème restait encore indéterminé, au moins dans de certaines limites, à cause de l'ignorance où nous sommes au sujet des masses et des distances des étoiles qui nous environnent. Le seul moyen que nous possédions, en cet état, pour arriver à une solution au moins approchée de la question, est de faire différentes hypothèses sur ces éléments, et de combiner de diverses manières les étoiles auxquelles nous devrons comparer le mouvement du Soleil.

Une première méthode consiste à grouper ensemble les étoiles à grand mouvement propre sans tenir compte de l'éclat de leur lumière : c'est celle qui en général a été suivie jusqu'ici, et notamment par M. Argelander, qui a traité avec beaucoup de soin cette question. On peut alors, ou bien supposer que toutes les distances des étoiles à la Terre sont égales, ou bien faire varier cet élément en raison même de la grandeur du mouvement propre observé, et suivant une certaine loi conventionnelle fondée sur des considérations à priori. On obtient ainsi pour les éléments de la translation solaire, selon que l'on adopte l'une ou l'autre de ces deux hypothèses, deux systèmes divers de valeurs qui, comme je l'ai montré dans le Mémoire précédent, diffèrent assez peu l'un de l'autre.

Dans la seconde méthode, au contraire, la considération de la grandeur du mouvement propre de l'étoile est sacrifiée à celle de son éclat :

on associe les étoiles d'après l'ordre de leur grandeur optique, et l'on conçoit que celles de la première grandeur soient les plus proches de nous, que celles de seconde viennent après dans l'ordre des distances, et ainsi de suite. En comparant le Soleil au groupe artificiel ainsi formé, on en déduit pareillement les circonstances de son mouvement propre, et il importe beaucoup de savoir si les résultats ainsi obtenus coïncident, au moins approximativement, avec ceux que fournit la méthode précédente. Si cette coïncidence existe, la chance de vérité de la solution en est singulièrement augmentée. On pourrait concevoir en effet que l'apparence de mouvement du Soleil vers la constellation d'Hercule, qui ressort de l'examen des étoiles à grand mouvement propre, est due principalement à quelques étoiles de faible éclat, peut-être peu importantes dans le système du monde, et qui ne se distinguent que par cette singularité curieuse d'un déplacement rapide sur le ciel. On sait en effet que ce ne sont pas les étoiles les plus brillantes qui occupent le premier rang sous ce dernier point de vue : 61 du Cygne, μ Cassiopée, *d* Éridan, etc., dont le mouvement est si rapide, sont seulement de quatrième à cinquième grandeur, et l'on peut s'attendre d'avance à ce que leur introduction dans le groupe circumsolaire, ou leur élimination de ce groupe, altérera puissamment le résultat du calcul.

Or, l'expérience faite prouve le contraire, et la considération du système des étoiles brillantes mène aux mêmes conséquences que celle du système des étoiles à mouvements rapides, quoique les deux groupes artificiels ainsi formés soient composés d'étoiles fort différentes, à tel point que, si l'on compare la liste des soixante et onze étoiles du précédent Mémoire avec celle des soixante-deux étoiles les plus brillantes, que l'on trouvera à la fin de ce Supplément, on trouve que sept seulement figurent à la fois sur l'une et sur l'autre de ces deux listes.

Dans le travail actuel, j'ai pris seulement en considération les étoiles de première et de seconde grandeur situées au nord du vingt-sixième parallèle de déclinaison australe : elles sont au nombre de soixante-deux. Je me suis servi, pour la détermination des mouvements propres, du catalogue Bradley-Bessel (*Fundamenta Astronomiæ*) pour l'année 1755, et du catalogue récent de cinq cent soixante étoiles pour l'année 1830, publié par M. le professeur Argelander. Lorsque ce catalogue m'a fait défaut, j'y ai suppléé par le second catalogue de Piazzi : j'ai alors introduit dans les catalogues de Bradley et de Piazzi les corrections constantes des ascensions droites qui ont été ultérieurement reconnues nécessaires, c'est-à-dire que j'ai ajouté 1″ à celles de Piazzi, retranché 0″,5 de celles de Bradley, et adopté les nouveaux coefficients de précession que M. Bessel a fait connaître dans le n° 92 des *Nouvelles astronomiques*. J'ai pu ainsi calculer les mouvements propres qui ne m'étaient pas fournis directement par le catalogue de M. Argelander.

Ceci posé, je pars des équations démontrées dans mon précédent Mémoire,

$$\begin{aligned} A\xi - c\eta - b\zeta &= M,\\ B\eta - c\xi - a\zeta &= N,\\ C\zeta - b\xi - a\eta &= P. \end{aligned}$$

dans lesquelles ξ, η, ζ représentent les trois composantes de la vitesse annuelle du Soleil, parallèlement aux trois demi-axes coordonnés menés du centre de la sphere au premier point du Bélier, au premier point de l'heure III sur l'équateur, et au pòle boréal de ce dernier. Les coefficients A, B, C, a, b, c sont donnés par les formules

$$\begin{aligned} A &= \Sigma m(1 - \cos^2 D \cos^2 \text{Æ}), & a &= \Sigma m \cos D \sin D \sin \text{Æ},\\ B &= \Sigma m(1 - \cos^2 D \sin^2 \text{Æ}), & b &= \Sigma m \cos D \sin D \cos \text{Æ},\\ C &= \Sigma m \cos^2 D. & c &= \Sigma m \cos^2 D \sin \text{Æ} \cos \text{Æ}, \end{aligned}$$

ou m, D et Æ représentent pour chaque étoile sa masse, sa déclinaison et son ascension droite, la somme Σ s'étendant à toutes les étoiles du groupe considéré. Les seconds membres M, N, P se déterminent par les équations

$$\begin{aligned} M &= \Sigma m R(\cos D \sin \text{Æ} \partial \text{Æ} + \sin D \cos \text{Æ} \partial D),\\ N &= \Sigma m R(- \cos D \cos \text{Æ} \partial \text{Æ} + \sin D \sin \text{Æ} \partial D),\\ P &= \Sigma m R(- \cos D \partial D); \end{aligned}$$

R est la distance de l'étoile au Soleil, ∂Æ son changement propre annuel en ascension droite, ∂D son changement propre annuel en déclinaison.

J'ai considéré la masse m et la distance R comme constantes pour toutes les étoiles du groupe que j'ai embrassé, et supposant de plus m égal à 1, j'ai été conduit aux trois équations

$$\begin{aligned} 41,299\,\xi - 3,858\,\eta + 0,155\,\zeta &= - 1'',506\,R,\\ 36.393\,\eta - 3,858\,\xi - 0,539\,\zeta &= - 4'',630\,R,\\ 46.307\,\zeta + 0,155\,\xi - 0,539\,\eta &= + 5''.042\,R. \end{aligned}$$

La résolution de ces équations donne

$$\xi = -\ 0'',0491\,\mathrm{R},$$
$$\eta = -\ 0'',1308\,\mathrm{R},$$
$$\zeta = +\ 0'',1102\,\mathrm{R}.$$

Nommons maintenant D_0 et $Æ_0$ la déclinaison et l'ascension droite du pôle parallactique, c'est-à-dire du point de la sphère vers lequel tend la marche du Soleil; nommons ρ la vitesse linéaire de cet astre; on trouve facilement, pour l'année 1792,5,

$$D_0 = +38^\circ\,16',5,$$
$$Æ_0 = \ \ 249^\circ\,25',5,$$
$$\rho = \ \ 0'',1780\,\mathrm{R}.$$

La position de ce point diffère peu des anciennes positions obtenues: c'est toujours dans la constellation d'Hercule qu'il se trouve renfermé : cette fois il tombe à petite distance de η Hercule. Le coefficient 0″,178 prouve qu'à la moyenne distance des étoiles de première et de seconde grandeurs, le Soleil, vu normalement à la trajectoire qu'il décrit, doit paraître se mouvoir annuellement d'une quantité angulaire égale à 0″,178.

Ce résultat s'accorde avec celui que M. Othon Struve, le fils du célèbre astronome de ce nom, vient d'obtenir dans un travail récent et fort étendu sur cette même question. Au lieu de se borner comme moi aux étoiles des deux premières grandeurs, M. Struve en a pris, il est vrai, un nombre beaucoup plus considérable (quatre cents), de sorte que ses résultats et les miens ne sont pas rigoureusement comparables; mais nous savons déjà, par les recherches de M. Argelander, que, passé une certaine limite numérique, par exemple trente à quarante, le nombre plus ou moins grand des étoiles qui composent le système circumsolaire auquel on s'arrête influe peu sur la direction obtenue pour le mouvement cherché. M. Struve et moi avons donc dû arriver, à peu de chose près, à des résultats identiques.

Nommons R_1 la distance moyenne des étoiles de première grandeur, R_2 celle des étoiles de seconde grandeur, et admettons, avec M. Struve, que l'on ait

$$R_2 = 1,71\,R_1\,;$$

soit toujours R la distance moyenne pour le groupe des soixante-deux étoiles que j'ai considérées, et qui se compose de treize étoiles de première et de quarante-neuf étoiles de seconde grandeur, on aura

$$\mathrm{R} = \frac{49\,\mathrm{R}_2 + 13\,\mathrm{R}_1}{62};$$

cette valeur et celle de R_2, substituées dans l'équation en ρ, donneront

$$\rho = 0'',278\,\mathrm{R}_1.$$

M. Struve trouve

$$\rho = 0'',339\,\mathrm{R}_1.$$

La différence est de l'ordre de celles auxquelles on pouvait s'attendre, et si l'on adopte pour ρ la valeur

$$\rho = 0'',31\,\mathrm{R}_1,$$

intermédiaire entre les deux précédentes, l'erreur $0'',029$ surpassera à peine l'erreur probable $0'',025$, que M. Struve assigne lui-même à sa détermination.

Je passe à l'examen du rapport de grandeur entre le mouvement propre du Soleil et le mouvement propre moyen des principales étoiles qui l'entourent. Pour cela, je nomme δs le mouvement propre observé, et Δs le mouvement propre réel, c'est-à-dire tel qu'il serait vu du Soleil fixe : j'ai démontré, dans mon précédent Mémoire, que l'on avait

$$\Sigma m\,\mathrm{R}^2\,\Delta s^2 = \Sigma m\,\mathrm{R}^2\,\delta s^2 - \mathrm{G}\rho^2,$$

G représentant le moment d'inertie des étoiles supposées placées à la distance 1, et pris autour de l'axe qui se confond avec la trajectoire solaire. Ce nombre G est lié aux quantités A, B, C, a, b, c, D_0, Æ_0, par la relation suivante,

$$\mathrm{G} = \mathrm{C} + \cos^2\mathrm{D}_0\left[\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}-2\mathrm{C}}{2} - g\cos(2\,\text{Æ}_0 - \psi)\right]$$
$$- 2f\sin\mathrm{D}_0\cos\mathrm{D}_0\sin(\text{Æ}_0 + \varphi).$$

Dans cette équation, f, g, φ, ψ sont des auxiliaires qui se déduisent préalablement des équations

$$f\cos\varphi = a, \quad g\cos\psi = \frac{B-A}{2},$$
$$f\sin\varphi = b, \quad g\sin\psi = c.$$

On trouve, tout calcul fait, dans le cas présent,

$$G = 39{,}444.$$

Le calcul de $\Sigma m R^2 \delta s^2$ n'offre aucune difficulté, et donne

$$\Sigma m R^2 \delta s^2 = 11{,}2238\, R^2 \sin^2 1'',$$

et l'on trouve enfin

$$\Sigma m R^2 \Delta s^2 = 9{,}9746\, R^2 \sin^2 1'';$$

de telle sorte que le mouvement propre du Soleil augmente, mais en apparence seulement, la somme des forces vives stellaires dans le rapport de 8 à 9.

Ceci nous permettra de déterminer avec un degré suffisant d'exactitude le rapport $\frac{\Sigma \Delta s}{\Sigma \delta s}$. Lorsque l'on a deux séries parallèles de termes positifs,

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots, \qquad \alpha',\ \beta',\ \gamma,\ldots$$

termes que l'on peut concevoir rangés entre eux par ordre de valeur décroissante, on a aussi, à fort peu près,

$$\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\ldots}{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2\ldots} = \left(\frac{\alpha+\beta+\gamma\ldots}{\alpha'+\beta'+\gamma'\ldots}\right),$$

si le nombre de ces termes est considérable, et si les rapports binaires $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$,... ne s'éloignent pas beaucoup d'être égaux entre eux; cette proposition n'est d'ailleurs vraie d'une manière générale que dans le cas où l'on aurait rigoureusement

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'},\ldots.$$

Nous aurons donc, dans le cas présent,

$$\frac{\Sigma\Delta s}{\Sigma\delta s} = \sqrt{\frac{9,9746}{11,2238}} = 0,9427.$$

Or, le calcul direct de $\Sigma\delta s$ donne

$$\Sigma\delta s = 14'',515;$$

donc aussi,

$$\Sigma\Delta s = 13'',683;$$

d'où l'on déduit enfin

$$\Delta☆ = \frac{13'',683}{62} = 0'',2207,$$

en représentant par $\Delta☆$ le mouvement propre *moyen* des étoiles, vu du Soleil en repos. Il s'agit ici du seul mouvement parallèle à la surface héliocentrique; l'autre composante du mouvement absolu d'une étoile, celle dirigée suivant le rayon vecteur héliocentrique, échappe totalement à nos observations. Il faut donc, pour obtenir le mouvement total, multiplier $\Delta☆$ par un facteur k plus grand que l'unité. Mais quelle est la valeur de ce facteur? Pour la déterminer, on peut employer les considérations suivantes. Décomposons l'un quelconque des mouvements propres Δs en deux composantes perpendiculaires au rayon visuel et égales entre elles; chacune d'elles aura pour valeur $\frac{\Delta s}{\sqrt{2}}$: la troisieme, normale aux deux autres, peut être indifféremment plus grande ou plus petite; nous la supposerons égale à $\frac{\Delta s}{\sqrt{2}}$, et la résultante générale devient alors

$$\frac{\Delta s}{\sqrt{2}}\sqrt{3} = \Delta s\sqrt{1,5}.$$

Le facteur cherché sera donc $k = 1,225$. Par d'autres considérations, on trouverait $k = 1,27$. On voit qu'il reste de l'arbitraire dans cette détermination; mais en adoptant $k = 1,25$, on s'écartera peu de la vérité. Donc, pour la moyenne vitesse angulaire des étoiles observées suivant les normales à leurs trajectoires, et à une distance moyenne R, on aura, en nommant $\overline{\Delta☆}$ cette vitesse moyenne,

$$\overline{\Delta☆} = 0'',276.$$

Nommons de même $\overline{\Delta\odot}$ la vitesse angulaire du Soleil observé à une distance R et suivant un rayon visuel normal à sa route ; nous aurons

$$\overline{\Delta\odot} = \frac{\rho}{R} = 0'',178;$$

donc enfin,

$$\overline{\Delta\star} : \overline{\Delta\odot} :: 0'',276 : 0'',178 :: 1,55 : 1.$$

Il est digne de remarque que ce rapport diffère à peine du nombre que j'avais obtenu dans le Mémoire précédent, en introduisant les seules étoiles à grands mouvements propres dans le calcul de la marche du Soleil.

M. O. Struve a trouvé pour le rapport $\Delta\star : \Delta\odot$ un nombre plus grand encore, puisque, selon lui, ce rapport égalerait 2,4. Ne connaissant de son Mémoire que la courte analyse donnée dans le n° 485 des *Nouvelles astronomiques*, il m'est difficile de pouvoir dire d'où peut provenir une telle différence, si elle résulte de la diversité de nos modes de groupement des étoiles, ou si elle ne dériverait pas plutôt, soit de quelque erreur de calcul commise par l'un de nous, soit des méthodes ou hypothèses différentes que nous avons adoptées. On doit aussi se rappeler que M. Argelander avait conclu de ses recherches que ce rapport était au contraire plus faible que l'unité. Ces divergences dans la détermination de cet élément prouvent combien cette partie de la question est délicate ; elles doivent, ce me semble, attirer sur ce point l'attention des calculateurs.

Quant aux résultats relatifs à *la direction* du mouvement solaire, ils peuvent être considérés comme concordants. Je réunis ici les cinq systèmes de valeurs que l'on a déduits, pour l'an 1800, de la considération d'un nombre un peu grand d'étoiles circumsolaires

	ARGELANDER, par 71 ★ à mouvement propre > 0'',5.	ARGELANDER, par 390 ★ à mouvement propre > 0'',1.	BRAVAIS, par 71 ★ à mouvement propre > 0',5.	O. STRUVE, par 400 ★ principales	BRAVAIS, par 62 ★ de 1re et de 2e gr.
D_0	+ 38° 49′	+ 28° 49′	+ 31° 11′	+ 37° 35′	+ 38° 16′
$Æ_0$	257° 28′	257° 54′	249° 18′	261° 27′	249° 29′

M. O. Struve a supposé dans ses calculs que les distances des étoiles étaient précisément celles nécessaires pour qu'à *égalité d'éclat absolu,* elles brillent dans le ciel avec l'éclat relatif que nous leur connaissons. Dans les miens, au contraire, m'étant borné aux étoiles de première et de seconde grandeurs, j'ai supposé toutes les distances égales entre elles; comme les différences en éclat absolu diminuent un peu la constance de la loi qui lie la distance à l'éclat relatif, la vérité doit se trouver entre les résultats de ces deux méthodes. Pour le prouver, en prenant un cas très-simple, concevons que les étoiles se partagent en deux séries de même force numérique : l'une à éclat absolu égal à 1, l'autre à éclat absolu égal à $\frac{1}{4}$, et qu'elles soient réparties autour du Soleil sur des surfaces de sphères concentriquement emboîtées, et dont les rayons soient successivement égaux à 1, 2, 3, 4,..., de telle sorte que le nombre des étoiles réparties sur la première surface soit $2n$, celui des étoiles de la seconde $4.2n = 8n$; celui de la troisième $9.2n = 18n$, et ainsi de suite. Nous obtiendrons le mode suivant de groupement des étoiles disposées suivant l'ordre de leur éclat relatif, savoir :

Éclat relatif $= 1$ .... n étoiles à la distance 1.
$= \frac{1}{4}$ .... n étoiles à la distance 1 et $4n$ à la distance 2.
$= \frac{1}{9}$ .... $9n$ étoiles à la distance 3.
$= \frac{1}{16}$ .... $4n$ étoiles à la distance 2 et $16n$ à la distance 4.
$= \frac{1}{25}$ .... $25n$ étoiles à la distance 5.
$= \frac{1}{36}$ .... $9n$ étoiles à la distance 3 et $36n$ à la distance 6,
etc.

Les distances moyennes des étoiles appartenant à ces six classes seront respectivement 1, (1,8), 3, (3,6), 5, (5,4), au lieu d'être égales à 1, 2, 3, 4, 5, 6, comme le veut la loi du carré des distances rigoureusement interprétée. On peut faire une multitude d'hypothèses différentes sur l'amplitude des variations de l'éclat absolu, et sur le mode de distribution des étoiles suivant les diverses valeurs de cet éclat; quel que soit le mode qui représente la nature, les carrés des distances moyennes réelles des étoiles classées par ordre de grandeur optique décroissante devront toujours suivre une progression ascendante moins rapide que la raison inverse de cette grandeur optique; de la sorte, si l'on nomme R la distance moyenne des étoiles à éclat apparent égal à l, la formule qui lie R à l dans le système du monde, doit se trouver comprise entre les deux formules $R = \frac{\text{const.}}{\sqrt{l}}$ et $R = \text{const.}$ Mais probablement le véritable mode de la nature se rapproche beaucoup plus de celui qu'indique la premiere de ces deux formules. M. O. Struve a basé ses calculs sur la première de ces deux hypothèses; j'ai au contraire adopté la seconde, et l'on remarquera que les résultats déduits de ces hypothèses extrêmes s'accordent assez exactement entre eux : les vrais éléments de la translation solaire devront donc être compris entre les limites ainsi obtenues, mais plus rapprochés cependant des nombres auxquels M. O. Struve est arrivé.

La faible incertitude qui règne encore à l'heure actuelle sur le coefficient de la précession des équinoxes peut aussi influer sur l'exacte détermination du mouvement solaire. Je nommerai ϖ la valeur admise pour ce coefficient, savoir, 50",2235 pour l'an 1800, et $d\varpi$, l'erreur dont il reste affecté. En introduisant dans le calcul des mouvements propres le nouveau coefficient $\varpi + d\varpi$, les ascensions droites des étoiles, calculées pour l'époque du second catalogue d'après les nombres du premier que je supposerai précéder celui-ci de n années, augmenteront de

$$n\,d\varpi\,(\cos\omega + \sin\omega \sin \text{Æ} \operatorname{tang} D),$$

et les déclinaisons augmenteront de

$$n\,d\varpi \sin\omega \cos \text{Æ},$$

ω étant l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur.

Les mouvements propres annuels $\partial\text{Æ}$ et ∂D de l'étoile que l'on considère se changeront donc, par suite de l'introduction du petit terme $d\varpi$, en

$$\partial\text{Æ} + d\partial\text{Æ} = \partial\text{Æ} - d\varpi\,(\cos\omega + \sin\omega \sin \text{Æ} \operatorname{tang} D),$$

et

$$\partial D + d\partial D = \partial D - d\varpi \sin\omega \cos \text{Æ}.$$

Ces changements altéreront les termes connus M, N, P de nos équations fondamentales, et les corrections dM, dN, dP seront données par les formules

$$\begin{aligned}
dM &= -\cos\omega\, d\varpi\, \Sigma m \mathrm{R} \sin Æ \cos \mathrm{D} - \sin\omega\, d\varpi\, \Sigma m \mathrm{R} \sin \mathrm{D},\\
dN &= +\cos\omega\, d\varpi\, \Sigma m \mathrm{R} \cos Æ \cos \mathrm{D},\\
dP &= +\sin\omega\, d\varpi\, \Sigma m \mathrm{R} \cos Æ \cos \mathrm{D}.
\end{aligned}$$

Sans effectuer les calculs indiqués par ces équations, il est facile de voir que les facteurs $\Sigma m\mathrm{R} \sin Æ \cos \mathrm{D}$, $\Sigma m \mathrm{R} \sin Æ \sin \mathrm{D}$ ne sauraient être des nombres considérables, à cause du passage successif de Æ par toutes les valeurs possibles de 0 à 360 degrés, et des alternances de signe qui en résultent; mais il n'en est pas de même de la somme $\Sigma m \mathrm{R} \sin \mathrm{D}$, parce que l'angle D, à cause de l'omission d'une partie des étoiles australes, varie seulement entre -30 degrés et $+90$ degrés. Pour un nombre K d'étoiles également réparties sur la zone céleste que nous observons, ce terme doit converger à peu de chose près vers la valeur $\frac{1}{4}\mathrm{K}\, m\mathrm{R}$, m et R étant supposés constants. Les coefficients a, b, c de nos équations fondamentales étant petits comparativement à A, B, C, lesquels convergent (A du moins) vers la valeur $0{,}61\ \mathrm{K}m$, les corrections $d\eta$, $d\zeta$ seront presque nulles, et l'on aura assez exactement

$$d\xi = \frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{A}} = \frac{-\sin\omega . d\varpi . \frac{1}{4}\mathrm{K}\, m\, \mathrm{R}}{0{,}61\ \mathrm{K}m} = -\ 0{,}164\ \mathrm{R}\, d\varpi.$$

Ainsi, pour $d\varpi = 0'',02$, on aurait

$$d\xi = -\ 0'',0033\ \mathrm{R},$$

et, par suite,

$$\xi = -\ 0'',0491\,\mathrm{R} - 0'',0033\ \mathrm{R} = -\ 0'',0524\ \mathrm{R}.$$

L'augmentation du coefficient de la précession tend donc surtout à augmenter la composante solaire dirigée vers le point équinoxial d'automne, et l'on peut calculer qu'à chaque centième de seconde d'augmentation, l'ascension droite du pôle parallactique diminuera d'environ 38', et sa déclinaison de 7'; ainsi, nous pouvons affirmer que cette cause produit au plus un degré et demi d'erreur dans la position de ce point.

Je terminerai en rappelant que, pour déterminer exactement le coefficient de la précession, il faut, comme l'a prouvé M. O. Struve, tenir compte de la translation du Soleil. En effet, cette translation occasionne dans les étoiles un mouvement relatif inverse dont les composantes sont $-\xi$, $-\eta$, $-\zeta$. De ce mouvement relatif peut naître une précession apparente, qui se manifesterait lors même que l'équateur et l'écliptique seraient parfaitement fixes. Il faut, pour la détruire, ramener les étoiles en arrière précisément de cette même quantité; de ce déplacement dans l'espace il résultera un changement $d'\text{Æ}$ dans l'ascension droite, et un changement $d'\mathrm{D}$ dans la déclinaison; on les obtiendra par les formules

$$d'\text{Æ} = -\sin \text{Æ}\,\frac{\xi}{\mathrm{R}} + \cos \text{Æ}\,\frac{\eta}{\mathrm{R}},$$

$$d'\mathrm{D} = -\sin \mathrm{D} \cos \text{Æ}\,\frac{\xi}{\mathrm{R}} - \sin \mathrm{D} \sin \text{Æ}\,\frac{\eta}{\mathrm{R}} + \cos \mathrm{D}\,\frac{\zeta}{\mathrm{R}}.$$

On devra ajouter ces quantités aux variations annuelles observées de l'ascension droite et de la déclinaison. Ce sont ces variations *ainsi corrigées* que l'on devra introduire dans les équations de condition desquelles se déduit le coefficient de la précession : il en résulte, d'après M. O. Struve, une correction positive de ce coefficient, laquelle augmente sa valeur de 0″,013; cette fraction est très-appréciable dans l'état actuel de précision des déterminations astronomiques.

Le tableau suivant offre, pour chacune des soixante-deux étoiles de notre groupe circumsolaire, les trois composantes de leur mouvement propre annuel. Ce tableau est d'ailleurs entièrement semblable à celui de la page 474 de ce volume.

NOMS DES ÉTOILES	MOUVEMENT PROPRE ANNUEL, PERPENDICULAIRE AU PLAN			NOMS DES ÉTOILES.	MOUVEMENT PROPRE ANNUEL, PERPENDICULAIRE AU PLAN		
	du colure des solstices.	du colure des equinoxes	de l'equateur.		du colure des solstices.	du colure des equinoxes.	de l'équateur.
β Cassiopee .	−0″,166	−0″,514	+0″,102	δ Lion	+0″,099	+0″,075	+0″,127
γ Pégase... ..	−0.002	−0,043	+0,011	β Lion... ...	−0,021	−0,498	+0,090
β Baleine.....	+0,019	−0,193	−0,027	γ grande Ourse.	+0,014	+0,110	+0,004
Polaire.......	+0,031	−0,037	−0,001	β Corbeau...	−0,009	−0,181	+0,068
β Andromède .	+0.009	−0,201	+0,061	ε grande Ourse.	+0,080	+0,083	+0,061
γ Andromède .	−0,020	−0,039	+0,041	12 Lévriers...	+0,012	−0,231	−0,042
α Bélier......	+0,050	−0,199	+0,127	α Vierge......	+0,008	−0,375	+0,028
α Baleine.....	−0,010	+0,001	+0,107	ζ grande Ourse.	−0,024	+0,157	+0,019
β Persee......	−0.028	+0,067	−0,031	η grande Ourse.	+0,058	−0,067	+0,020
α Persée......	+0,008	−0,057	+0,032	Arcturus......	+0,637	−0,584	+1,840
γ Éridan	+0,049	−0,009	+0, 75	α Balance.....	+0,034	−0,056	+0,032
γ Taureau....	+0,051	−0,074	+0,161	β petite Ourse.	+0,052	+0,007	+0,011
α Cocher	+0,020	−0,321	+0,298	β Balance. ...	+0,078	−0,068	−0,031
β Orion......	+0,018	−0,003	+0,010	α Couronne...	−0,087	+0,104	+0,052
β Taureau....	+0.052	−0,106	+0,174	α Serpent	−0,146	+0,097	−0,067
γ Orion	+0,063	−0,016	+0,031	β Scorpion ...	+0,025	+0,036	−0,036
δ Orion	+0,044	−0,007	+0,046	α Scorpion ...	−0,025	+0,002	+0,007
ε Orion..	−0,004	+0,001	0,000	β Hercule	+0,097	−0,045	−0,003
ζ Orion	+0,088	−0.011	+0,011	η Ophiuchus..	−0,022	+0,041	−0,123
β Cocher. ...	−0,001	−0,022	+0,022	α Hercule	−0,003	−0,015	−0,059
α Orion......	+0,050	−0,003	−0,001	α Ophiuchus .	−0,088	+0,056	+0,186
β grand Chien.	−0,021	+0,025	+0,080	β Dragon.....	+0,014	−0,008	−0,005
Sirius	−0,556	+0,263	+1,177	γ Dragon.....	−0,024	−0,027	+0,022
Castor.	− ,152	−0,100	+0,064	Véga.........	−0,198	−0,211	−0,231
Procyon	−0,590	−0,353	+1,043	α Aigle..	−0,476	−0,287	−0,385
Pollux...... .	−0,558	−0,285	+0,076	α Cygne......	+0,001	−0,003	−0,004
α Hydre.	−0,011	−0,023	−0,044	ε Pégase	−0,030	−0,062	−0,078
α Lion... ...	−0,134	−0,220	−0,015	α Verseau	+0,002	+0,003	−0,007
γ Lion	+0,173	+0,224	+0,127	β Pegase	+0,010	−0,211	−0,135
β grande Ourse.	−0.004	+0,131	−0,023	α Pégase.....	−0,023	−0,074	+0,004
α grande Ourse.	+0,042	−0,134	+0,041	α Andromède.	−0,069	−0,140	+0,128

* * *

SUR QUELQUES FORMULES
RELATIVES
A LA THÉORIE DES INTÉGRALES EULÉRIENNES;

PAR J.-A. SERRET.

1. Je me propose de donner une démonstration simple de quelques formules fréquemment employées dans l'Analyse, en les rattachant autant que possible à la théorie si féconde des intégrales eulériennes.

Soit

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-\theta} \theta^{p-1} d\theta;$$

on aura identiquement

$$\int_0^\infty e^{-mx} x^{p-1} dx = \frac{\Gamma(p)}{m^p},$$

m étant une quantité positive, ou au moins de la forme $\alpha + \mathcal{E}\sqrt{-1}$, α étant positif.

Si l'on fait

$$m = a + y\sqrt{-1},$$

l'équation précédente donne lieu aux deux équations distinctes

$$(1) \qquad \int_0^\infty e^{-ax} \cos yx\, x^{p-1}\, dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \cos^p \varphi \, \cos p\varphi,$$

$$(2) \qquad \int_0^\infty e^{-ax} \sin yx\, x^{p-1} dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \cos^p \varphi \, \sin p\varphi;$$

formules dans lesquelles on suppose

$$y = a \operatorname{tang} \varphi.$$

2. Si l'on multiplie l'équation (1) par

$$\frac{dy}{(1+y^2)^n} = a\, \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi(1+a^2 \operatorname{tang}^2\varphi)^n},$$

et qu'on intègre ensuite depuis $y = 0$ jusqu'à $y = \infty$, ou de $\varphi = 0$ à $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on aura

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{p-1} dx \int_0^\infty \frac{\cos xy}{(1+y^2)^n} dy = \frac{\Gamma(p)}{a^{p-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{p-2}\varphi \cos p\varphi}{(1+a^2 \operatorname{tang}^2\varphi)^n} d\varphi.$$

Or, j'ai démontré (page 20 de ce volume) que l'on a, quel que soit n,

$$\int_0^\infty \frac{\cos xy}{(1+y^2)^n} dy = \frac{\pi}{[\Gamma(n)]^2} \int_0^\infty e^{-(x+2z)} (x+z)^{n-1} z^{n-1} dz;$$

l'équation précédente deviendra donc

$$\frac{\pi}{[\Gamma(n)]^2} \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-1} dx \int_0^\infty e^{-(x+2z)} (x+z)^{n-1} z^{n-1} dz$$

$$= \frac{\Gamma(p)}{a^{p-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{p-2}\varphi \cos p\varphi}{(1+a^2 \operatorname{tang}^2\varphi)^n} d\varphi;$$

d'où l'on tire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{p-2}\varphi \cos p\varphi}{(1+a^2 \operatorname{tang}^2\varphi)^n} d\varphi = \frac{\pi a^{p-1}}{\Gamma(p)[\Gamma(n)]^2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(a+1)x-2z} x^{p-1} (x+z)^{n-1} z^{n-1} dx\, dz.$$

Soit

$$z = xt, \quad \text{d'où} \quad dz = xdt;$$

l'équation précédente deviendra

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{p-2}\varphi \cos p\varphi}{(1+a^2 \operatorname{tang}^2\varphi)^n} d\varphi = \frac{\pi a^{p-1}}{\Gamma(p)[\Gamma(n)]^2} \int_0^\infty t^{n-1} (1+t)^{n-1} dt \int_0^\infty e^{-(a+1+2t)x} x^{2n+p-2} dx.$$

L'intégrale du second membre relative à x a pour valeur

$$\frac{\Gamma(2n+p-1)}{(a+1+2t)^{2n+p-1}};$$

donc

$$(3) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{p-2}\varphi \cos p\varphi}{(1+a^2 \operatorname{tang}^2\varphi)^n} d\varphi = \pi a^{p-1} \frac{\Gamma(2n+p-1)}{\Gamma(p)[\Gamma(n)]^2} \int_0^\infty \frac{t^{n-1}(1+t)^{n-1}}{(a+1+2t)^{2n+p-1}} dt.$$

Si l'on fait $a = 1$, cette formule devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+2n-2}\varphi . \cos p\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2^{2n+p-1}} \frac{\Gamma(2n+p-1)}{\Gamma(p)[\Gamma(n)]^2} \int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{(1+t)^{n+p}} dt.$$

D'ailleurs

$$\int_0^\infty \frac{t^{n-1}dt}{(1+t)^{n+p}} = \frac{\Gamma(n)\,\Gamma(p)}{\Gamma(n+p)};$$

donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+2n-2}\varphi . \cos p\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2^{2n+p-1}} \frac{\Gamma(2n+p-1)}{\Gamma(n)\,\Gamma(n+p)}.$$

Si l'on fait $p + 2n - 2 = q$, cette équation devient

$$(4) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^q\varphi \cos p\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2^{q+1}} \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma\left(\frac{q+p}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{q-p}{2}+1\right)}$$

C'est la même que j'ai donnée page 6 de ce volume, et qui avait été démontrée différemment par MM. Cauchy et Binet [*].

Si l'on fait $q = p$, on a la formule donnée par Poisson.

$$(5) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \cos p\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2^{p+1}}.$$

3. Si $n = 1$, l'équation (3) devient

$$(6) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^p\varphi \cos p\varphi}{\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{a^{p-1}}{(a+1)^p},$$

qui comprend comme cas particulier la précédente.

L'équation (6) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\cos\varphi \, e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)^p + \left(\cos\varphi \, e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)^p}{\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi} d\varphi = \frac{\pi}{a}\left(\frac{a}{a+1}\right)^p.$$

---

[*] Mémoire de M. Cauchy sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires, et Mémoire de M. Binet sur les integrales eulériennes. (*Journal de l'École Polytechnique*, XXVI^e cahier.)

Si donc $F(z)$ représente une fonction développable en série convergente suivant les puissances positives de z, on aura

$$(7)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F\left(\cos\varphi e^{\varphi\sqrt{-1}}\right) + F\left(\cos\varphi\, e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)}{\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{a} F\left(\frac{a}{a+1}\right),$$

et si $a = 1$,

$$(8)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[F\left(\cos\varphi\, e^{\varphi\sqrt{-1}}\right) + F\left(\cos\varphi\, e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)\right] d\varphi = \pi F\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

Les deux formules (7) et (8) feront connaître un grand nombre d'intégrales définies.

Si, par exemple, on pose

$$F(z) = e^{2mz} \quad \text{et} \quad 2\varphi = \theta,$$

les équations (7) et (8) donneront

$$(9)\qquad \int_0^{\pi} \frac{e^{m\cos\theta}\cos(m\sin\theta)\, d\theta}{\cos^2\frac{1}{2}\theta + a^2\sin^2\frac{1}{2}\theta} = \frac{\pi}{a} e^{m\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}.$$

$$(10)\qquad \int_0^{\pi} e^{m\cos\theta}\cos(m\sin\theta)\, d\theta = \pi.$$

Cette dernière formule a été donnée par Poisson, au XIX^e^ cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 493.

4. Si l'on multiplie les équations (1) et (2) par

$$y^{q-1}\, dy = a^q \operatorname{tang}^{q-1}\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

et qu'on intègre ensuite de $y = 0$ à $y = \infty$, il vient

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} x^{p-1}\, dx \int_0^{\infty} \cos xy\, y^{q-1}\, dy = \frac{\Gamma(p)}{a^{p-q}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-q-1}\varphi \sin^{q-1}\varphi \cos p\varphi\, d\varphi,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} x^{p-1}\, dx \int_0^{\infty} \sin xy\, y^{q-1}\, dy = \frac{\Gamma(p)}{a^{p-q}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-q-1}\varphi \sin^{q-1}\varphi \sin p\varphi\, d\varphi;$$

et, en ayant égard à la formule connue

$$\int_0^{\infty} e^{-xy\sqrt{-1}}\, y^{q-1}\, dy = \frac{\Gamma(q)}{x^q} e^{-\frac{q\pi}{2}\sqrt{-1}},$$

on en tire aisément

$$(11)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-q-1}\varphi \sin^{q-1}\varphi \cos p\varphi \, d\varphi = \frac{\Gamma(q)\Gamma(p-q)}{\Gamma(p)} \cos\frac{q\pi}{2},$$

$$(12)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-q-1}\varphi \sin^{q-1}\varphi \sin p\varphi \, d\varphi = \frac{\Gamma(q)\Gamma(p-q)}{\Gamma(p)} \sin\frac{q\pi}{2}.$$

Si dans les équations (11) et (12) on fait successivement $q = 1$ et $q = p - 1$, on a les quatre formules suivantes, que j'ai déjà données par différents moyens :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-2}\varphi \cos\varphi \, d\varphi = 0,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-2}\varphi \sin p\varphi \, d\varphi = \frac{1}{p-1},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-2}\varphi \cos p\varphi \, d\varphi = \frac{\sin\frac{p\pi}{2}}{p-1},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-2}\varphi \sin p\varphi \, d\varphi = \frac{-\cos\frac{p\pi}{2}}{p-1}.$$

Si dans l'équation (12) on fait $q = 0$, il vient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-1}\varphi \frac{\sin p\varphi}{\sin\varphi} \, d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

5. Cette dernière peut être bien simplement déduite de l'équation (2); si l'on multiplie l'équation (2) par

$$\frac{dy}{y} = \frac{d\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi},$$

et qu'on intègre de $y = 0$ à $y = \infty$ ou de $\varphi = 0$ à $\varphi = \frac{\pi}{2}$, il viendra

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} x^{p-1} \, dx \int_0^{\infty} \frac{\sin xy}{y} \, dy = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-1}\varphi \frac{\sin p\varphi}{\sin\varphi} \, d\varphi.$$

Or,

$$\int_0^\infty \frac{\sin xy}{y}\,dy = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\infty e^{-ax}\,x^{p-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p};$$

donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-1}\varphi\,\frac{\sin p\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

5. On peut déduire immédiatement de l'équation (2) la valeur de $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx$. Multiplions en effet l'équation (2) par

$$\frac{\cos y\;dy}{y} = \frac{\cos(a\operatorname{tang}\varphi)\,d\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi},$$

et intégrons de $y=0$ à $y=\infty$ ou de $\varphi=0$ à $\varphi=\frac{\pi}{2}$, on aura

$$\int_0^\infty e^{-ax}x^{p-1}\,dx\int_0^\infty \frac{\sin xy\cos y}{y}\,dy = \frac{\Gamma(p)}{a^p}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{p-1}\varphi\,\frac{\sin p\varphi}{\sin\varphi}\cos(a\operatorname{tang}\varphi)\,d\varphi.$$

Or, $\int_0^\infty \frac{\sin xy\cos y}{y}\,dy$ est égal à $\frac{\pi}{2}$ ou à 0, suivant que x est plus grand ou plus petit que 1 ; donc on aura

$$\frac{\pi}{2}\int_1^\infty e^{-ax}\,x^{p-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{p-1}\varphi\,\frac{\sin p\varphi}{\sin\varphi}\cos(a\operatorname{tang}\varphi)\,d\varphi;$$

d'ou, en faisant $p=1$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(a\operatorname{tang}\varphi)\,d\varphi = \int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,e^{-a}.$$

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES
RELATIVES
A LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

Par J.-A. SERRET.

I.

On sait quelle importance Legendre attachait à la représentation géométrique des fonctions elliptiques; cet illustre géomètre, après avoir remarqué que les arcs de la lemniscate représentent exactement les fonctions de la première espèce dans le cas particulier où l'angle du module est $\frac{\pi}{4}$, détermina l'équation d'une courbe algébrique du sixième degré dont la forme diffère peu de celle de l'ellipse et dont les arcs peuvent représenter les fonctions de première espèce de module et d'amplitude quelconques. Il est très-probable que Legendre ne s'était pas borné à cette recherche et qu'il avait fait d'autres tentatives; c'est du moins ce qui me semble résulter de la phrase suivante du savant géomètre : « Il est très-remarquable que notre nouvelle formule conduise » si facilement à la solution d'un problème que nous avons regardé » comme fort difficile, *et qui paraît n'admettre aucune autre solution;* » celui de trouver une courbe algébrique dont les arcs représentent » généralement la fonction elliptique de première espèce [*]. » Toutefois, la propriété connue de la lemniscate devait nécessairement faire présumer l'existence d'autres courbes planes plus générales, jouissant de propriétés géométriques analogues, et susceptibles de servir à la représentation des fonctions quelconques de première espèce.

Dans une Note présentée à l'Académie des Sciences, et imprimée de-

---

[*] *Traité des Fonctions elliptiques,* tome II, page 590

puis dans ce Journal [*], j'ai résolu en partie ce problème en prouvant que toute fonction elliptique de première espèce peut être représentée, quels que soient son module et son amplitude, par la somme ou la différence de deux arcs de *l'ellipse de Cassini* (de l'une quelconque des deux espèces que j'ai considérées). A la vérité, ce théorème ne satisfait pas complétement, en ce sens qu'il faut deux arcs pour représenter une fonction elliptique; mais, outre l'avantage qu'il présente de n'exiger que les deux mêmes arcs pour deux fonctions complémentaires, il établit un lien géométrique remarquable entre les fonctions elliptiques de première espèce et les transcendantes eulériennes de seconde espece. J'ai fait voir en effet, dans un autre article [**], que ces dernières peuvent être représentées au moyen des périmètres de courbes, qui, ainsi que les *cassinoïdes,* sont renfermées dans l'équation générale

$$r^{2m} - 2a^m r^m \cos mt + a^{2m} = b^{2m},$$

et jouissent d'une propriété commune consistant en ce que le produit des distances d'un point de la courbe à m points fixes est constant.

Cette propriété, constatée depuis longtemps pour la lemniscate, et dont la généralisation m'a conduit aux résultats que je viens de rappeler, n'est sans doute pas la seule qui puisse mettre sur la voie d'une représentation géométrique convenable des transcendantes elliptiques à amplitude et module quelconques; mais une pareille recherche ne saurait être entreprise qu'après une étude approfondie de la lemniscate. C'est dans le but de faciliter cette étude que, d'après le conseil d'un savant géomètre, M. Chasles, je me décide à publier les théorèmes suivants dont on pourra, ce me semble, un jour tirer parti.

II.

Si l'on coupe un tore par un plan parallèle à l'axe, et distant de cet axe d'une quantité égale au rayon du cercle générateur, la section

---

[*] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* tome XVI, page 914; *Journal de Mathématiques,* tome VIII, page 145.

[**] *Journal de Mathématiques,* tome VII, page 114.

que l'on obtient est une cassinoïde dont la nature dépend du rapport qui existe entre la distance du centre du cercle générateur à l'axe, et le rayon de ce cercle; ce rapport ou *module* détermine la forme du tore et celle de la cassinoïde unique que l'on peut tracer sur sa surface. Dans le cas particulier où ce module est 2, la section est une lemniscate, et son plan est tangent au tore que l'on pourrait appeler pour cette raison *tore lemniscatique*. La section d'un tore quelconque par un plan tangent parallèle à l'axe est une courbe plus générale que la lemniscate, dont la forme se rapproche dans certains cas de celle de cette dernière et qui jouit d'ailleurs de plusieurs propriétés géométriques analogues : ainsi, suivant que le module du tore est inférieur ou supérieur à 1, la section dont nous parlons est le lieu géométrique des projections orthogonales du centre d'une ellipse ou d'une hyperbole sur ses tangentes; si ce module est 2, l'hyperbole est équilatère, et l'on retombe sur la propriété connue de la lemniscate. Au surplus, cette généralisation de la lemniscate est impropre à remplir le but que nous nous proposons.

III.

Dans mon premier travail sur les fonctions elliptiques, j'ai déjà énoncé et démontré plusieurs des propriétés géométriques des courbes représentées généralement par l'équation

$$(1) \qquad r^{2m} - 2a^m r^m \cos mt + a^{2m} = b^{2m}.$$

J'ai fait voir en particulier que, dans le cas de m entier, b^m représente le produit constant des distances d'un point de la courbe aux sommets d'un polygone régulier de m côtés et de rayon a, lesquels sommets peuvent être considérés comme des foyers relativement à la courbe.

On déduit aisément de l'équation (1)

$$\frac{1}{r}\,\frac{dr}{dt} = \frac{-a^m \sin mt}{r^m - a^m \cos mt},$$

ce qui montre que

$$\frac{1}{r}\,\frac{dr}{dt} = \frac{r^m - a^m \cos mt}{a^m \sin mt}$$

sera l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des courbes homofocales représentées par l'équation (1), où b varie de 0 à ∞.

L'intégration de l'équation précédente s'effectue sans difficulté; θ désignant une constante, on trouve

$$(2) \qquad r^m = \frac{a^m \cos m\theta}{\cos m(t-\theta)}.$$

Les équations (1) et (2) représentent deux systèmes de courbes conjuguées et orthogonales; il est aisé de vérifier qu'elles sont du genre de celles que M. Lamé a appelées *lignes isothermes*, propriété qui aurait pu servir à former directement l'équation (2). Les courbes représentées par cette dernière sont composées de m branches de forme hyperbolique, passant par les foyers communs de leurs conjuguées, et présentant elles-mêmes m sommets dont le lieu géométrique représenté par l'équation

$$r^m = a^m \cos mt$$

est une courbe semblable à celle du premier système qui correspond a $b = a$.

IV.

Dans le cas particulier de $m = 2$, les équations (1) et (2) deviennent

$$(3) \qquad r^4 - 2a^2 r^2 \cos 2t + a^4 = b^4,$$

$$(4) \qquad r^2 = \frac{a^2 \cos 2\theta}{\cos 2(t-\theta)}.$$

L'équation (3) représente des cassinoïdes homofocales, et l'équation (4) des hyperboles équilatères ayant même centre et un point commun.

M. Lamé, dans une Note insérée au tome I$^{\text{er}}$ de ce *Journal* (p. 85), avait déjà remarqué que les équations (3) et (4), où b et θ sont des paramètres variables, représentent deux systèmes de courbes isothermes conjuguées et orthogonales.

Le lieu des sommets des hyperboles équilatères, représentées par l'équation (4), est une lemniscate ayant pour équation

$$r^2 = a^2 \cos 2t.$$

Le lieu de leurs foyers est aussi une lemniscate ayant pour équation

$$r^2 = 2a^2 \cos 2t.$$

Mais cette dernière est digne d'être remarquée, car c'est précisément celle que représente l'équation (3) pour $b = a$, et qui, par conséquent, fait partie du système des trajectoires orthogonales.

On peut, d'après cela, énoncer les deux théorèmes suivants :

1°. Le lieu géométrique des sommets d'un système d'hyperboles équilatères ayant même centre et un point commun est une lemniscate;

2°. Le lieu géométrique des foyers des mêmes courbes est une lemniscate qui les coupe orthogonalement.

V.

Si aux hyperboles équilatères dont nous venons de parler, on substitue un système de coniques quelconques semblables, on sera nécessairement conduit à des trajectoires orthogonales plus générales que les cassinoïdes, et jouissant de propriétés analogues. Parmi ces dernières, il en est une plus simple que toutes les autres et qui serait précisément une lemniscate, si les coniques conjuguées étaient des hyperboles équilatères. Il était naturel de rechercher si les arcs de cette courbe sont susceptibles de représenter généralement les fonctions elliptiques de première espèce, mais l'extrême complication des calculs ne m'a pas permis de m'en assurer; toutefois, l'analogie qui existe entre le module de la fonction elliptique représentée par l'arc de lemniscate et celui des hyperboles que cette courbe coupe orthogonalement, analogie que les considérations qui vont suivre mettront encore plus en évidence, m'avait fait longtemps espérer de résoudre enfin complétement le problème que je m'étais proposé.

VI.

J'appellerai, suivant l'usage, *module d'une section conique* le rapport constant des distances d'un point de la courbe au foyer et à la directrice : d'après cela, on voit que l'équation

$$(1) \qquad r^2 = a^2 \frac{1 - m^2 \cos^2 \alpha}{1 - m^2 \cos^2 (t - \alpha)}$$

représentera un système de coniques de module m, ayant pour centre commun l'origine des coordonnées polaires, et passant par un point fixe ayant pour coordonnées $t = 0$ et $r = a$.

Si m est > 1, l'équation (1) représentera des hyperboles; mais il est aisé de voir qu'elle représentera non-seulement les hyperboles de module m, mais aussi leurs conjuguées de module m', ces deux nombres m et m' satisfaisant, comme on sait, à la relation

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m'^2} = 1.$$

Il résulte de là que, sauf le cas de $m = \sqrt{2}$, l'équation (1), dans laquelle α est un paramètre variable, représente réellement deux systèmes de courbes distincts. On voit quelle complication cette circonstance doit apporter dans la recherche des trajectoires orthogonales, qui doivent aussi sans doute former deux systèmes distincts; mais celle de ces courbes qui se réduit à une lemniscate dans le cas particulier de $m = m' = \sqrt{2}$, et dont les arcs représentent la fonction F, qui, ainsi que sa fonction complémentaire, a pour module $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ne doit-elle pas, dans le cas général, servir à la représentation des deux fonctions complémentaires de modules $\frac{1}{m}$ et $\frac{1}{m'}$? Telle est la question que je m'étais posée depuis longtemps, et que je n'ai pas été assez heureux pour résoudre.

On trouve assez facilement, pour l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des courbes représentées par l'équation (1),

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{dr}{dt}(r^3 - a^2\cos 2t) + a^2 r\sin 2t\right]^2 \\ &= \left(\frac{2}{m^2} - 1\right)^2 \left\{\left[\frac{dr}{dt}(r^2 - a^2) + a^2 r\sin 2t\right]^2 + a^4 r^2 (1 - \cos 2t)^2\right\}. \end{aligned}\right.$$

Ainsi que nous l'avions prévu, elle ne change pas quand on y change m en m'; elle se simplifie considérablement si $m = \sqrt{2}$: on a, dans ce cas,

$$\frac{dr}{dt}(r^2 - a^2\cos 2t) + a^2 r\sin 2t = 0,$$

équation qui représente effectivement un système de cassinoïdes homofocales.

Il n'est pas probable que l'équation (2) puisse servir à résoudre le problème que je m'étais proposé; mais si la propriété que je soupçonne existe, peut-être pourra-t-on la découvrir à l'aide de considérations géométriques.

Le lieu géométrique des sommets et celui des foyers des sections coniques représentées par l'équation (1), où α est un paramètre variable, ne sont autres que les courbes que nous avons déjà mentionnées, et que l'on obtient en coupant un tore quelconque par un plan tangent parallèle à l'axe. Le second de ces lieux géométriques ne coupe orthogonalement les courbes (1) que dans le cas particulier de $m=\sqrt{2}$, c'est-à-dire dans le cas de la lemniscate que nous avons étudié précédemment.

VII.

En terminant cet article, je crois devoir indiquer une dernière propriété des courbes représentées par l'équation générale

$$r^{2m} - 2a^m r^m \cos mt + a^{2m} = b^{2m},$$

propriété remarquable qui offre le premier exemple de courbes algébriques dont les arcs représentent dans un cas particulier les transcendantes connues des géomètres sous le nom de fonctions abéliennes ou ultra-elliptiques.

On déduit aisément de l'équation précédente,

$$\frac{ds}{dr} = -\frac{b^m}{a^m}\frac{1}{\sin mt},$$

d'où, en désignant par $s(r_0, r_1)$ l'arc de la courbe déterminé par les rayons vecteurs r_0, r_1, qui correspondent aux azimuts t_0, t_1,

$$s(r_0, r_1) = -2b^m \int_{r_0}^{r_1} \frac{r^m}{\sqrt{-r^{4m} + 2(b^{2m} + a^{2m})r^{2m} - (b^{2m} - a^{2m})^2}}\,dr.$$

Rapport fait à l'Académie des Sciences de l'Institut, au nom d'une Commission composée de MM. Lamé *et* Liouville, *sur un Mémoire de* M. Hermite, *relatif à la division des fonctions abéliennes ou ultra-elliptiques;*

Par J. LIOUVILLE.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie*, tome XVII, séance du 14 août 1843.)

« L'Académie nous a chargés, M. Lamé et moi, de lui rendre compte d'un Mémoire relatif à une des parties les plus abstraites de l'analyse, la *division des fonctions abéliennes* ou *ultra-elliptiques*, dont l'auteur, M. Hermite, figure depuis quelques mois seulement parmi les élèves de l'École Polytechnique. C'est avec un vif plaisir que nous venons présenter aujourd'hui les résultats de l'examen auquel nous nous sommes livrés. Peu de mots en effet nous suffiront pour faire comprendre toute l'importance du travail de notre jeune compatriote.

» Les formules fondamentales de trigonométrie, par lesquelles on exprime le sinus et le cosinus de la somme de deux arcs, montrent que le cosinus d'un arc multiple s'obtient rationnellement à l'aide du cosinus de l'arc simple, tandis que la valeur de ce dernier cosinus, en fonction du premier, dépend de la résolution d'une équation algébrique de degré élevé. Le problème de la *multiplication* et celui de la *division* des arcs de cercle diffèrent dont beaucoup entre eux : l'un se résout comme de lui-même; l'autre, au contraire, exige la recherche de quantités irrationnelles, à la vérité toujours exprimables par des radicaux.

» Lorsqu'on passe des fonctions circulaires aux fonctions elliptiques, il arrive semblablement que les problèmes relatifs à la *multiplication* se résolvent de suite par les formules fondamentales, tandis que les problèmes relatifs à la *division* dépendent d'équations algébriques de degré élevé. Ces équations sont à une seule inconnue, comme dans le cas précédent, et elles se résolvent encore à l'aide de radicaux, pourvu que l'on admette les irrationnelles auxiliaires, propres au cas de la fonction complète de première espèce, irrationnelles qui ne dépendent plus de l'argument variable qu'on veut diviser, mais qui ne paraissent pouvoir se réduire à des racines d'équations binômes, que pour certaines valeurs particulières du module.

» Abel a le premier donné la théorie générale de la division des fonctions elliptiques. Les formules assez compliquées qu'il a trouvées d'abord ont été peu de temps après simplifiées par M. Jacobi. Nous devions ici mentionner ce perfectionnement, indiqué en quelques lignes dans le t. III du Journal de M. Crelle, p. 86; car les nouvelles formules de M. Hermite ont beaucoup d'analogie avec celles que M. Jacobi pose sans démonstration dans l'endroit cité.

» La considération des différentielles algébriques, qui renferment un radical carré portant sur un polynôme du troisième ou du quatrième degré, donne naissance aux transcendantes elliptiques. En augmentant le degré du polynôme on est conduit aux transcendantes ultra-elliptiques. Vous pourrez même, si vous voulez, aller plus loin, et substituer aux radicaux carrés des irrationnelles quelconques. Mais l'étude des transcendantes que l'on forme ainsi devient très-difficile. Pour passer de la théorie des fonctions elliptiques à celle des fonctions ultra-elliptiques, les géomètres ont dû vaincre les plus grands obstacles. Ce n'est pas là une de ces généralisations vulgaires où se complaisent les esprits médiocres et que Jean Bernoulli renvoyait dédaigneusement à Varignon. Il a fallu d'abord qu'Abel découvrît le théorème si remarquable sur les sommes d'intégrales; il a fallu surtout que M. Jacobi expliquât le vrai sens de ce théoreme, et la différence essentielle de nature qui sépare les transcendantes elliptiques des transcendantes ultra-elliptiques, malgré la communauté apparente de leur origine. Les géomètres philosophes admireront toujours la sagacité déployée par M. Jacobi dans ces recherches délicates et l'art avec lequel il s'est mis au seul point de vue qui pût dominer tout son sujet. Ce grand géomètre a montré que dans le cas, par exemple, d'un polynôme du cinquième ou du sixième degré placé sous un radical carré (ce qui répond aux premières transcendantes ultra-elliptiques), on ne peut plus, comme dans le cas d'un polynôme de degré moindre et des transcendantes elliptiques ordinaires, introduire en analyse de simples fonctions inverses d'une seule variable. Il faut nécessairement recourir à des fonctions de deux variables. Des fonctions de trois et de plus de trois variables sont de même indispensables dans la théorie des autres transcendantes ultra-elliptiques. Idée capitale, entièrement due à M. Jacobi, et sans laquelle le beau théorème d'Abel demeurait en quelque sorte inutile! Sans vouloir rien ôter à l'immortelle réputation du géomètre de Christiania, ne nous sera-t-il pas permis de dire ici que M. Jacobi a fait preuve de modestie lorsqu'il a appliqué aux fonctions de plusieurs variables, introduites par lui en analyse [*], le nom de *fonctions abéliennes?*

» Quoi qu'il en soit, le théorème d'Abel, convenablement interprété, fournit une solution facile du problème de la *multiplication* des arguments par un même nombre entier dans les transcendantes ultra-elliptiques, et prouve que le problème de la *division* dépend de la considération d'*un système d'équations algébriques simultanées.* Or, c'est la résolution générale de ces équations qui fait l'objet du Mémoire de M. Hermite. L'auteur réussit à l'effectuer par des radicaux, en admettant la *division des fonctions complètes* [**]. La méthode dont il se sert repose, en majeure partie, sur la propriété que les fonctions de M. Jacobi ont de se reproduire périodiquement quand les variables qu'elles contiennent augmentent ensemble de certaines quantités. Dans le cas le plus simple, les fonctions dont il s'agit sont à quatre périodes; on voit par là combien elles diffèrent, et des fonctions elliptiques, et de toutes les fonctions à une seule variable, fonctions qui ne peuvent jamais posséder plus de deux périodes distinctes. La considération des périodes conduit immédiatement à l'expression, sous forme transcendante, des racines propres à opérer la *division* des arguments; et M. Hermite en déduit, par une marche élégante, la valeur algébrique de ces mêmes racines. Il entre d'ailleurs dans des détails intéressants sur les irrationnelles auxiliaires relatives à la *division des fonctions complètes.*

» En résumé, ce que l'on savait faire pour les équations à *une seule inconnue* de la théorie des fonctions elliptiques, M. Hermite est parvenu à l'effectuer aussi pour les équations à *plusieurs inconnues* à l'aide des-

---

[*] *Voir* le Journal de M. Crelle, t. IX, p. 394, et t. XIII, p. 55.

[**] C'est ce que M. Jacobi appelle *division des indices.*

quelles on *divise* les fonctions abéliennes produites par l'intégration de radicaux carrés quelconques. C'est ainsi (on nous pardonnera ce rapprochement entre l'ancienne et la nouvelle École Polytechnique), c'est ainsi qu'à son début, Poisson étendit à la détermination du degré de l'équation finale, résultant de l'élimination des inconnues entre un nombre quelconque d'équations, la méthode des fonctions symétriques dont on n'avait d'abord su faire usage que pour deux équations à deux inconnues.

» Vos Commissaires pensent que le Mémoire de M. Hermite est tres-digne de l'approbation de l'Académie, et qu'il doit être imprimé dans le Recueil des *Savants étrangers.* »

Les conclusions de ce Rapport ont été adoptées.

Extrait d'une Lettre de M. **Jacobi** *à* M. Hermite.

Je vous rends bien sincèrement grâce de la belle et importante communication que vous venez de me faire, par rapport à la division des fonctions abéliennes. Vous vous êtes ouvert, par la découverte de cette division, un vaste champ de recherches et de découvertes nouvelles qui donneront un nouvel essor à l'art analytique. Les maintes difficultés qui se présentent dans cette matière épineuse paraissent naître en grande partie de ce que les fonctions transcendantes que j'ai introduites dans l'analyse des fonctions abéliennes renferment deux variables. Les fonctions à deux variables étant peu traitables par les méthodes connues, je suis bien aise d'y pouvoir faire une sorte de réparation, ayant remarqué que les fonctions transcendantes et à deux variables, que j'ai nommées $\lambda(u, v)$, $\lambda_1(u, v)$, sont des fonctions algébriques de fonctions transcendantes qui ne renferment qu'une seule variable.

» En effet, soit fx une fonction entiere du sixieme degré de x; si l'on fait

$$\int \frac{dx}{\sqrt{fx}} + \int \frac{dy}{\sqrt{fy}} = u, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{fx}} + \int \frac{y\,dy}{\sqrt{fy}} = v,$$

on aura

$$(\mathrm{A})\quad\left\{\begin{aligned}&\int\frac{dx}{\sqrt{fx}}+\int\frac{dy}{\sqrt{fy}}=\int\frac{dx'}{\sqrt{fx'}}+\int\frac{dy'}{\sqrt{fy'}}+\int\frac{dx''}{\sqrt{fx''}}+\int\frac{dy''}{\sqrt{fy''}},\\&\int\frac{x\,dx}{\sqrt{fx}}+\int\frac{y\,dy}{\sqrt{fy}}=\int\frac{x'dx'}{\sqrt{fx'}}+\int\frac{y'dy'}{\sqrt{fy'}}+\int\frac{x''dx''}{\sqrt{fx''}}+\int\frac{y''dy''}{\sqrt{fy''}},\end{aligned}\right.$$

en déterminant les quatre quantités x', y', x'', y'' au moyen des équations

$$\int\frac{dx'}{\sqrt{fx'}}+\int\frac{dy'}{\sqrt{fy'}}=0,\qquad\int\frac{x'dx'}{\sqrt{fx'}}+\int\frac{y'dy'}{\sqrt{fy'}}=v,$$
$$\int\frac{dx''}{\sqrt{fx''}}+\int\frac{dy''}{\sqrt{fy''}}=u,\qquad\int\frac{x''dx''}{\sqrt{fx''}}+\int\frac{y''dy''}{\sqrt{fy''}}=0.$$

Nommant

$$x=\lambda(u,v),\quad y=\lambda_1(u,v),$$

on aura

$$x'=\lambda(0,v),\quad y'=\lambda_1(0,v),\quad x''=\lambda(u,0),\quad y''=\lambda_1(u,0).$$

Or, d'après le théorème d'Abel, les quantités x et y satisfaisant aux deux équations (A) peuvent être exprimées algébriquement par x', y', x'', y''; donc les transcendantes $\lambda(u, v)$, $\lambda_1(u, v)$ sont des fonctions algébriques des transcendantes $\lambda(0, v)$, $\lambda_1(0, v)$, $\lambda(u, 0)$, $\lambda_1(u, 0)$, dont chacune ne renferme qu'une seule variable. »

Sur la division du périmètre de la lemniscate, le diviseur étant un nombre entier réel ou complexe quelconque ;

Par J. LIOUVILLE.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie*, tome XVII, séance du 2 octobre 1843.)

1. M. Gauss a nommé entiers *complexes* les quantités de la forme $p + q\sqrt{-1}$ où p et q sont des entiers réels, positifs, nuls ou négatifs; en faisant $q = 0$, on voit que les nombres *complexes* contiennent, comme cas particulier, les nombres réels. L'introduction de ces nombres complexes a permis à M. Gauss de réduire la théorie des résidus biquadratiques à des règles tout aussi simples que celles trouvées auparavant pour les résidus quadratiques eux-mêmes [*]. La plupart des propriétés des nombres entiers réels s'étendent aux nombres complexes, et cela peut être utile même en algèbre. Ainsi on pourra appliquer aux nombres complexes les règles ordinaires relatives à la recherche des racines rationnelles des équations et de leurs diviseurs rationnels proprement dits. Dans ce but on appellera *diviseur rationnel* tout diviseur de la forme $P + Q\sqrt{-1}$ où P et Q seront rationnels dans le sens ordinaire du mot, P ou Q pouvant d'ailleurs se réduire à zéro. Une équation irréductible sera celle dont le premier membre n'a aucun diviseur de cette forme $P + Q\sqrt{-1}$. Les théorèmes qui servent à la résolution des équations conserveront presque tous leur énoncé. Nous citerons en particulier celui qu'Abel a donné (Journal de M. Crelle,

---

[*] *Voyez* le tome VII des nouveaux Memoires de Gottingue. — M. Jacobi pense que M. Gauss a été conduit à employer les nombres *complexes* (dans des recherches arithmétiques) par l'étude des transcendantes elliptiques et des arcs de la lemniscate en particulier; là, en effet, cela résulte des Mémoires d'Abel, les nombres complexes se présentent naturellement comme diviseurs, et il y a de l'avantage à les considerer, même quand il s'agit en définitive d'une division à effectuer par un nombre premier réel $4\nu + 1$.

tome IV, page 149) à la fin de son Mémoire sur une classe d'équations algébriques : « Soit $\chi(X) = 0$ une équation algébrique quel-
» conque, dont toutes les racines peuvent être exprimées ration-
» nellement par l'une d'entre elles que nous désignerons par X.
» Soient $\theta(X)$ et $\theta_1(X)$ deux autres racines quelconques; l'équation
» proposée sera résoluble à l'aide de radicaux si l'on a

$$\theta[\theta_1(X)] = \theta_1[\theta(X)]. \text{ »}$$

La proposition restera exacte et la démonstration ne changera pas en admettant des quantités rationnelles *complexes* et en prenant pour $\theta(X)$, $\theta_1(X)$, $\chi(X)$ des fonctions de la forme $P + Q\sqrt{-1}$. Abel se proposait d'appliquer son théorème aux équations relatives à la division du périmètre de la lemniscate. La mort l'a empêché d'exécuter son dessein. Du moins, il n'a, que je sache, traité nulle part le cas de la division par un nombre premier $4\nu + 3$. Mais il est bien facile de suppléer à son silence; il n'y a qu'à suivre dans leur cours naturel les développements des principes qu'il a posés lui-même. C'est ce que je vais essayer de prouver en prenant pour diviseur un entier quelconque réel ou complexe, premier ou composé, p ou $p + q\sqrt{-1}$.

2. Nous adopterons ici les notations d'Abel dans ses *Recherches sur les fonctions elliptiques* (Journal de M. Crelle, t. II et III), mais en les appliquant spécialement au cas de la lemniscate. Ainsi les deux modules e, c seront égaux entre eux et à l'unité; l'indice ϖ relatif à la période imaginaire sera égal à l'indice ω relatif à la période réelle. En posant

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \alpha,$$

on aura

$$x = \varphi(\alpha), \quad f(\alpha) = \sqrt{1-\varphi^2(\alpha)}, \quad F(\alpha) = \sqrt{1+\varphi^2(\alpha)},$$

et de plus,

$$\varphi(-\alpha) = -\varphi(\alpha), \quad f(-\alpha) = f(\alpha), \quad F(-\alpha) = F(\alpha),$$
$$\varphi(\alpha\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\,\varphi(\alpha), \quad f(\alpha\sqrt{-1}) = F(\alpha), \quad F(\alpha\sqrt{-1}) = f(\alpha).$$

La formule fondamentale pour les fonctions elliptiques deviendra

$$\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varphi(\alpha)\,f(\beta)\,\mathrm{F}(\beta)+\varphi(\beta)\,f(\alpha)\,\mathrm{F}(\alpha)}{1+\varphi^2(\alpha)\,\varphi^2(\beta)}.$$

Il y a des formules analogues pour $f(\alpha+\beta)$, $\mathrm{F}(\alpha+\beta)$. De ces formules on déduira, comme Abel, les fonctions φ, f, F, relatives à un multiple ($p=2n$ ou $p=2n+1$) de α, sous la forme

$$\varphi(2n\alpha)=\varphi(\alpha)\,f(\alpha)\,\mathrm{F}(\alpha).\mathrm{R}_1, \qquad \varphi[(2n+1)\alpha]=\varphi(\alpha)\,\mathrm{R}',$$
$$f(2n\alpha)=\mathrm{R}_2, \qquad f[(2n+1)\alpha]=f(\alpha)\,\mathrm{R}''.$$
$$\mathrm{F}(2n\alpha)=\mathrm{R}_3, \qquad \mathrm{F}[(2n+1)\alpha]=\mathrm{F}(\alpha)\,\mathrm{R}'''.$$

ou R_1, etc., désignent des fonctions rationnelles de $\varphi^2(\alpha)$ ou x^2. Si p était négatif, on se rappellerait que $\varphi(p\alpha)=-\varphi(-p\alpha)$, $f(p\alpha)=f(-p\alpha)$, $\mathrm{F}(p\alpha)=\mathrm{F}(-p\alpha)$.

Maintenant, soit $p+q\sqrt{-1}$ un entier complexe; on aura, par la formule fondamentale,

$$\varphi[(p+q\sqrt{-1})\alpha]=\frac{\varphi(p\alpha)\,f(q\alpha\sqrt{-1})\,\mathrm{F}(q\alpha\sqrt{-1})+\varphi(q\alpha\sqrt{-1})\,f(p\alpha)\,\mathrm{F}(p\alpha)}{1+\varphi^2(p\alpha)\,\varphi^2(q\alpha\sqrt{-1})},$$

c'est-à-dire

$$\varphi[(p+q\sqrt{-1})\alpha]=\frac{\varphi(p\alpha)\,f(q\alpha)\,\mathrm{F}(q\alpha)+\sqrt{-1}\,\varphi(q\alpha)\,f(p\alpha)\,\mathrm{F}(p\alpha)}{1-\varphi^2(p\alpha)\,\varphi^2(q\alpha)}.$$

Il suit de là et des formules précédentes que $\varphi[(p+q\sqrt{-1})\alpha]$ s'exprimera aussi rationnellement en fonction de $\varphi(\alpha)$, $f(\alpha)$, $\mathrm{F}(\alpha)$. La valeur de cette quantité sera de la forme

$$\varphi(\alpha)\,f(\alpha)\,\mathrm{F}(\alpha)\,\mathrm{R}.$$

si p et q sont tous deux pairs ou tous deux impairs. Elle sera de la forme

$$\varphi(\alpha)\,\mathrm{R},$$

si l'un de ces deux nombres est pair et l'autre impair; R désignant dans les deux cas une fonction rationnelle complexe de $\varphi^2(\alpha)$ ou x^2.

En résumé, pour un multiple entier m, réel ou complexe quelconque, $\varphi(m\alpha)$ est de l'une des deux formes $\varphi(\alpha)\,f(\alpha)\,\mathrm{F}(\alpha)\,\mathrm{R}$, $\varphi(\alpha)\,\mathrm{R}$, R dépendant rationnellement de $\varphi^2(\alpha)$ ou x^2, et pouvant en conséquence s'exprimer par une fraction irréductible dont le numérateur T et le dénominateur S soient des fonctions entières de x^2. Il est bon d'observer que $\varphi^2(m\alpha)$ est aussi fonction rationnelle de $\varphi^2(\alpha)$ [*].

5. Le problème de la division du périmètre de la lemniscate par l'entier m, réel ou complexe, revient au fond à déterminer les valeurs de $\varphi(\alpha)$ pour lesquelles on a

$$\varphi(m\alpha) = 0\,;$$

et comme les équations $\varphi(\alpha) = 0$, $f(\alpha) = 0$, $F(\alpha) = 0$ n'offrent aucune difficulté, on comprend que tout consiste à résoudre l'équation $R = 0$, ou plutôt $T = 0$ [**].

Comme T est fonction entière de x^2, nous ferons $x^2 = X$, et nous chercherons les racines X [***]. L'expression transcendante de ces racines est facile à déduire des principes d'Abel, fondés sur la considération de la double période des fonctions elliptiques. L'une d'entre elles, que nous désignerons spécialement par X, est

$$X = \varphi^2\left(\frac{\omega}{m}\right).$$

---

[*] En changeant α en $\alpha\sqrt{-1}$, $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(m\alpha)$ se changent en $\sqrt{-1}\,\varphi(\alpha)$, $\sqrt{-1}\,\varphi(m\alpha)$; $\varphi^2(\alpha)$ devient $-\varphi^2(\alpha)$; quant au produit $f(\alpha)\,F(\alpha) = \sqrt{1-\varphi^4(\alpha)}$, il conserve son ancienne valeur. Dans les expressions de $\varphi(m\alpha)$, il faut donc que R ne change pas en remplaçant $\varphi^2(\alpha)$ ou x^2 par $-\varphi^2(\alpha)$ ou $-x^2$. Donc R, S, T sont fonctions rationnelles, non-seulement de x^2, mais même de x^4. On voit aussi que $\varphi^4(m\alpha)$ est fonction rationnelle de $\varphi^4(\alpha)$.

[**] Si l'on voulait prouver que cette équation n'a pas de racines égales, il faudrait recourir au procédé d'Abel (Journal de M. Crelle, t. III, p. 164 et 165).

[***] D'après ce qu'on a vu plus haut, T est même fonction entière de x^4; on pourrait prendre x^4 pour inconnue (c'est ce qu'a fait Abel); et, comme $\varphi^4(m\alpha)$ s'exprime rationnellement par $\varphi^4(\alpha)$, les raisonnements qui suivent subsisteraient sans aucune modification. Mais il y a quelque chose de plus général à ne faire usage que du carré x^2; la méthode en devient plus facile à étendre aux autres cas des transcendantes elliptiques de première espèce, pour lesquelles la division de la fonction complète s'effectue par radicaux en vertu d'une relation particulière existant entre les modules c, c, ou plutôt entre les indices ω, ϖ.

Les autres sont comprises dans la formule générale

$$\varphi^2\left(\frac{r\omega}{m}\right),$$

r étant un entier réel ou complexe. Quoiqu'on puisse donner à r une infinité de valeurs, ces racines sont en nombre limité. Il est même très-facile de déterminer, d'une manière précise, les valeurs de r qu'il suffit de considérer pour obtenir toutes les racines; mais, sans m'arrêter à ces détails, je passe de suite au point capital de nos recherches.

4. D'après ce qu'on a vu ci-dessus, on a, quel que soit t,

$$\varphi^2(rt) = \theta[\varphi^2(t)],$$

la fonction θ étant rationnelle. En faisant donc $t = \frac{\omega}{m}$, on aura

$$\varphi^2\left(\frac{r\omega}{m}\right) = \theta\left[\varphi^2\left(\frac{\omega}{m}\right)\right] = \theta(\mathrm{X}),$$

de sorte que chaque racine $\varphi^2\left(\frac{r\omega}{m}\right)$ de $\mathrm{T} = 0$ s'exprime rationnellement par la racine X. Cela étant, je considere deux racines quelconques

$$\varphi^2\left(\frac{r\omega}{m}\right) = \theta\left[\varphi^2\left(\frac{\omega}{m}\right)\right] = \theta(\mathrm{X}),$$
$$\varphi^2\left(\frac{r_1\omega}{m}\right) = \theta_1\left[\varphi^2\left(\frac{\omega}{m}\right)\right] = \theta_1(\mathrm{X}),$$

et je dis que $\theta[\theta_1(\mathrm{X})] = \theta_1[\theta(\mathrm{X})]$. Dès lors il suivra du théoreme d'Abel, cité n° **1**, que l'équation $\mathrm{T} = 0$ est soluble par radicaux.

Or on a

$$\theta[\theta_1(\mathrm{X})] = \theta\left[\varphi^2\left(\frac{r_1\omega}{m}\right)\right];$$

mais en posant $t = \frac{r_1\omega}{m}$, la formule

$$\theta[\varphi^2(t)] = \varphi^2(rt)$$

donne

$$\theta\left[\varphi^2\left(\frac{r_1\omega}{m}\right)\right] = \varphi^2\left(\frac{rr_1\omega}{m}\right);$$

par suite

$$\theta[\theta_1(X)] = \varphi^2\left(\frac{rr_1\omega}{m}\right).$$

Le second membre étant symétrique par rapport à r et r_1, on trouverait évidemment pour $\theta_1[\theta(X)]$ la même valeur. Donc

$$\theta[\theta_1(X)] = \theta_1[\theta(X)];$$

ce qu'il fallait démontrer.

5. Il est ainsi prouvé d'une manière générale que les équations relatives à la division de la lemniscate se résolvent par radicaux. L'analyse précédente, laquelle est au surplus, je le répète, implicitement contenue dans les ouvrages d'Abel [*], repose sur la connaissance de l'expression transcendante des racines déduite de la considération des deux périodes des fonctions elliptiques. Sans cette connaissance préliminaire, il paraît au moins très-difficile d'arriver à rien de satisfaisant pour la solution algébrique cherchée. Il resterait maintenant à indiquer la marche à suivre dans la pratique pour diminuer la longueur des calculs et obtenir les formules finales les plus simples. Par suite, il serait bon aussi de traiter à part et avec étendue le cas des diviseurs premiers. C'est ce qu'Abel lui-même a déjà fait en partie. Je pourrais ajouter à ce qu'il a donné quelques développements sur le cas d'un diviseur premier $4\nu+3$. Mais, à vrai dire, il faudra dans toute cette théorie pousser beaucoup plus loin l'étude des détails. Sous ce point de vue, on doit reconnaître, avec un illustre géomètre qui dans ces dernières années a publié sur les nombres d'admirables travaux; on doit, dis-je, reconnaître avec M. Lejeune-Dirichlet que la question n'a été jusqu'à présent qu'ébauchée [**]. Aussi les géomètres attendent-ils avec impatience le nouveau Mémoire que M. Dirichlet leur a promis.

---

[*] La marche que j'ai suivie est exactement celle d'Abel lui-même pour la division du cercle. (Voir le Journal de M. Crelle, t. IV, p. 152.)

[**] Journal de M. Crelle, t. XXIV, p. 366.

◆

SUR UN THÉORÈME D'ABEL;

Par J. LIOUVILLE.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie,* tome XVII, séance du 9 octobre 1843.)

Abel a donné à la fin de son Mémoire sur une classe d'équations algébriques (Journal de M. Crelle, tome IV, page 149) un théorème élégant et très-utile que l'on peut énoncer ainsi : « Soit $\chi(x) = 0$ une » équation algébrique quelconque dont toutes les racines s'expriment ra- » tionnellement en fonction d'une seule d'entre elles que nous dési- » gnerons par x; soient $\theta(x)$, $\theta_1(x)$ deux autres racines quelconques; » si l'on a

$$\theta[\theta_1(x)] = \theta_1[\theta(x)],$$

» l'équation proposée sera résoluble par radicaux, en fonction bien » entendu des coefficients $a, b, c, \ldots$, contenus dans $\chi(x)$, $\theta(x)$, etc., » coefficients dont la nature peut être plus ou moins compliquée sui- » vant les cas. » Ce théorème est d'un usage fort commode dans la pratique, ainsi que le prouvent les applications qu'on en a faites à la division du cercle et de la lemniscate. La condition de solubilité qu'il indique étant du reste *suffisante* et non pas *nécessaire,* il est tout naturel qu'on puisse aisément le généraliser, ce qu'Abel sans doute n'a pas voulu faire pour lui conserver mieux son précieux caractère de simplicité. L'énoncé qu'Abel a donné à son théorème suffisait probablement pour le but que l'illustre auteur voulait atteindre. Toutefois il est bon de faire observer que de nouveaux cas de solubilité résultent de sa démonstration même. D'abord il est bien évident que nulle condition n'a besoin d'être imposée aux fonctions θ qui servent à exprimer des racines étrangères à l'équation irréductible dont x dépend et sur laquelle seule reposent les raisonnements d'Abel. Mais, en laissant de côté cette première observation (si vraie qu'elle en devient insignifiante), en admettant que l'équation $\chi(x) = 0$ ait été rendue ou soit d'avance irréductible, on comprendra avec un peu d'attention que le fond de la démonstration d'Abel portant sur des groupes de racines dont on forme des fonctions symétriques plutôt que sur des racines isolées, on peut changer de diverses manières les conditions imposées à celles-ci, sans que la conclusion finale en éprouve la moindre altération. Il sera très-facile de développer cette remarque, et d'obtenir ainsi, par l'analyse même d'Abel, de nouveaux théorèmes analogues au sien.

NOTE

SUR

LA MÉTHODE DE RECHERCHE DES SURFACES ISOTHERMES;

PAR M. G. LAMÉ.

(Extrait du *Compte rendu* de la séance de l'Académie des Sciences du 27 novembre 1843.)

Dans mon premier Mémoire sur les surfaces isothermes (tome II de ce Journal), j'ai exposé la méthode analytique qui m'a conduit aux surfaces isothermes et orthogonales du second ordre. Mais cette exposition laisse à désirer sous le rapport de la simplicité; de plus, elle est incomplète, car une trop grande complication dans les calculs m'a fait oublier plusieurs familles isolées de surfaces isothermes. En cherchant à combler cette lacune, que M. Sturm m'a fait apercevoir, je suis parvenu à simplifier assez la méthode dont il s'agit, pour qu'on puisse aborder la recherche des surfaces isothermes d'un ordre plus élevé. Voici comme il convient de présenter l'exemple qui fait l'objet du Mémoire cité.

On se propose de trouver les familles de surfaces isothermes comprises dans l'équation

$$(1) \qquad lx^2 + my^2 + nz^2 = 1,$$

laquelle s'étend à toutes les surfaces du second ordre ayant le même centre, et leurs sections principales sur les mêmes plans.

Le problème d'analyse qu'il s'agit de résoudre consiste à regarder les coefficients l, m, n comme des fonctions inconnues d'un paramètre λ, et à déterminer ces fonctions par la condition que le rapport

$$(2) \qquad \frac{\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2}}{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}$$

soit exprimable en λ seul, lorsque, considérant à la fois toutes les surfaces comprises dans l'équation (1), le paramètre λ devient une fonction de x, y, z, donnée par cette même équation.

Désignons par L le premier membre de l'équation (1); posons, pour simplifier,

$$l^2x^2 + m^2y^2 + n^2z^2 = \mathrm{M}; \tag{3}$$

enfin employons une notation connue, en représentant par la même lettre, accentuée une ou deux fois (F′, F″), les dérivées première et seconde de toute fonction (F) de λ, prises par rapport à ce paramètre seul.

On déduit de l'équation (1), par des différentiations successives, et par l'élimination,

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{L}'^2\left[\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right] &= 4\mathrm{M}, \\ \mathrm{L}'^3\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2}\right) &= 4\left(\mathrm{M}'\mathrm{L}' - \mathrm{ML}'' - \frac{l+m+n}{2}\mathrm{L}'^2\right); \end{aligned}\right. \tag{4}$$

d'où l'on conclut, pour le rapport (2),

$$\frac{\mathrm{M}'\mathrm{L}' - \mathrm{ML}'' - \frac{l+m+n}{2}\mathrm{L}'^2}{\mathrm{ML}'}.$$

Si donc φ désigne une fonction inconnue de λ seul, on peut égaler ce rapport à $\frac{\varphi'}{\varphi}$, et le problème proposé est réduit à faire en sorte que l'équation

$$\frac{\mathrm{M}'\mathrm{L}' - \mathrm{ML}'' - \frac{l+m+n}{2}\mathrm{L}'^2}{\mathrm{ML}'} = \frac{\varphi'}{\varphi} \tag{5}$$

soit vérifiée en même temps que l'équation (1), ou $\mathrm{L} = 1$.

La question se simplifie encore si l'on élimine l'une des coordonnées, x par exemple, entre les équations (1) et (5). En effet, en posant

$$\left\{\begin{aligned} l' + (lm' - l'm)y^2 + (ln' - l'n)z^2 &= \mathrm{N}, \\ l + m(m - l)y^2 + n(n - l)z^2 &= \mathfrak{M}, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

la valeur de x^2, tirée de l'équation (1), donne

$$lL' = \mathrm{N}, \quad lL'' = \mathrm{N}', \quad \mathrm{M} = \mathcal{M}, \quad \mathrm{M}' = \mathcal{M}' + \mathrm{N},$$

et l'équation (5) devient

$$(7) \qquad \mathcal{M}'\mathrm{N}\varphi - \mathcal{M}(\varphi\mathrm{N}' + \varphi'\mathrm{N}) - \frac{m+n-l}{2l}\varphi\mathrm{N}^2 = 0.$$

Or cette équation finale doit être identique, quelles que soient les deux seules variables indépendantes y et z actuellement présentes, sans quoi λ serait indépendant de x, ce qui ne peut être, en vertu de l'équation (1). Donc, pour trouver les familles de surfaces isothermes comprises dans la formule (1), il suffit de chercher les fonctions l, m, n, φ de λ, qui peuvent vérifier l'équation (7), quels que soient y et z.

Le premier membre de l'équation (7) se présente sous la forme d'un polynôme du quatrième degré, à puissances paires de y et de z. Mais, 1°. tous les termes en y^2 et z^2 disparaissent quand on pose

$$(8) \qquad l = m = n;$$

car on en déduit

$$l' = m' = n', \quad l'' = m'' = n'', \quad \mathrm{N} = l', \quad \mathrm{N}' = l'', \quad \mathcal{M} = l, \quad \mathcal{M}' = l'.$$

et l'équation (7) se réduit à

$$(9) \qquad \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{l'}{2l} - \frac{l''}{l'}.$$

Rien n'empêche de prendre $\frac{1}{\lambda^2}$ pour la valeur commune des fonctions (8); les équations (1) et (9) deviennent

$$(10) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2, \quad \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{2}{\lambda}, \quad \text{ou} \quad \varphi = \lambda^2.$$

et l'on est conduit à la famille bien connue des sphères concentriques, qui est isotherme, et pour laquelle la température est exprimée par une fonction linéaire de $\int \frac{d\lambda}{\varphi}$, ou de $\frac{1}{\lambda}$.

2°. Le premier membre de l'équation (7) se réduit au second degré quand on pose

$$(11)\qquad \frac{l'}{l} = \frac{m'}{m} = \frac{n'}{n},$$

car N se réduit à l', N$'$ à l''; mais $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ conservent leurs termes en y^2 et z^2. Les équations (11) donnent, par l'intégration,

$$(12)\qquad l = \alpha\psi, \quad m = \beta\psi, \quad n = \gamma\psi,$$

α, β, γ étant constants, ψ fonction de λ; d'où l'on conclut

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \mathrm{N} = \alpha\psi', & \mathrm{N}' = \alpha\psi'', \\ \mathfrak{M} = \alpha\psi + \psi^2\mathrm{F}, & \mathfrak{M}' = \alpha\psi' + 2\psi\psi'\mathrm{F}, \\ \mathrm{F} = \beta(\beta - \alpha)y^2 + \gamma(\gamma - \alpha)z^2. & \end{array}\right.$$

Toutes ces valeurs, substituées dans l'équation (7), la transforment ainsi :

$$(14)\qquad \left[\frac{\alpha}{\psi} + \beta(\beta - \alpha)y^2 + \gamma(\gamma - \alpha)z^2\right]\frac{d\dfrac{\psi^2}{\varphi\psi'}}{d\lambda} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2\varphi}.$$

Pour que les termes en y^2 et z^2 disparaissent, il faut, ou que $\alpha = \beta = \gamma$, ce qui reproduirait le système des sphères concentriques, ou que

$$(15)\qquad \frac{d\dfrac{\psi^2}{\varphi\psi'}}{d\lambda} = 0, \quad \gamma = -(\alpha + \beta).$$

Rien n'empeche, dans le dernier cas, de prendre $\psi = \frac{1}{\lambda}$, et la première équation (15) conduit à une valeur constante pour φ; l'équation (1) devient

$$(16)\qquad \alpha x^2 + \beta y^2 - (\alpha + \beta)z^2 = \lambda;$$

elle représente alors plusieurs familles d'hyperboloïdes isothermes, sur lesquelles la température est exprimée par une fonction linéaire de $\int\frac{d\lambda}{\varphi}$, ou de λ : ce qui est d'ailleurs évident, puisque la fonction λ (16) satisfait à l'équation

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2} = 0.$$

3°. Enfin, on peut vérifier l'équation (7) sans poser les relations (8) ou (11), c'est-à-dire sans que les termes en y^2 et z^2 disparaissent directement dans $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, N, N'. En effet, comme cette vérification doit avoir lieu quels que soient y et z, on peut supposer ces coordonnées constantes tandis que λ varie, et écrire ainsi l'équation (7) :

$$(17) \qquad \frac{d\,\frac{\mathfrak{M}}{\mathrm{N}\varphi}}{d\lambda} = \frac{m+n-l}{2l\varphi};$$

alors, si l'on pose

$$\frac{l'}{l} = \frac{lm'-l'm}{m(m-l)} = \frac{ln'-l'n}{n(n-l)},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(18) \qquad \frac{l'}{l} = \frac{m'-l'}{m-l} - \frac{m'}{m} = \frac{n'-l'}{n-l} - \frac{n}{n},$$

et si ψ est la valeur commune de ces trois quantités, on aura simplement $\frac{\mathfrak{M}}{\mathrm{N}} = \frac{1}{\psi}$, quels que soient y et z; l'équation (17) deviendra

$$(19) \qquad \frac{d\,\frac{1}{\psi\varphi}}{d\lambda} = \frac{m+n-l}{2l\varphi}.$$

et son intégration conduira à la valeur de φ.

Les intégrales des équations (18) peuvent se mettre sous la forme

$$ml = b^2(m-l), \quad nl = c^2(n-l),$$

b et c étant deux constantes, ou sous celle-ci

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{l} - b^2, \quad \frac{1}{n} = \frac{1}{l} - c^2;$$

si l'on prend, ce qui est permis, $l = \frac{1}{\lambda^2}$, on a

$$(20) \qquad l = \frac{1}{\lambda^2}, \quad m = \frac{1}{\lambda^2 - b^2}, \quad n = \frac{1}{\lambda^2 - c^2}, \quad \psi = \frac{l'}{l} = -\frac{2}{\lambda};$$

l'équation (19) devient, toute réduction faite,

$$(21) \qquad \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\lambda}{\lambda^2 - b} + \frac{\lambda}{\lambda^2 - c^2}.$$

et donne, par l'intégration,

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} & \varphi = \sqrt{\lambda^2 - b^2}\,\sqrt{\lambda^2 - c^2}, \\ \text{ou}\quad & \varphi = \sqrt{\lambda^2 - b^2}\,\sqrt{c^2 - \lambda^2}, \\ \text{ou}\quad & \varphi = \sqrt{b^2 - \lambda^2}\,\sqrt{c^2 - \lambda^2}, \end{aligned}\right.$$

suivant que λ surpassera c plus grand que b, ou sera compris entre c et b, ou sera moindre que b.

Ces trois cas différents conduisent aux familles connues d'ellipsoïdes et d'hyperboloïdes isothermes, représentées par les équations

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1,\quad \frac{x^2}{\lambda_1^2} + \frac{y^2}{\lambda_1^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \lambda_1^2} = 1,\quad \frac{x^2}{\lambda_2^2} - \frac{y^2}{b^2 - \lambda_2^2} - \frac{z^2}{c^2 - \lambda_2^2} = 1,$$

où $\lambda > c > \lambda_1 > b > \lambda_2 > 0$), et sur lesquelles la température est exprimée par une fonction linéaire de $\int \frac{d\lambda}{\varphi}$, φ ayant l'une des formes (22), ou par l'une des transcendantes

$$\varepsilon = \int_c^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - b^2}\,\sqrt{\lambda^2 - c^2}},\quad \varepsilon_1 = \int_b^{\lambda_1} \frac{d\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 - b^2}\,\sqrt{c^2 - \lambda_1^2}},\quad \varepsilon_2 = \int_0^{\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{\sqrt{b^2 - \lambda_2^2}\,\sqrt{c^2 - \lambda_2^2}}.$$

FIN DU HUITIÈME VOLUME.

Mémoire sur une nouvelle méthode de génération et de discussion des surfaces du deuxième ordre, par M. B. Amiot.

Fig 1

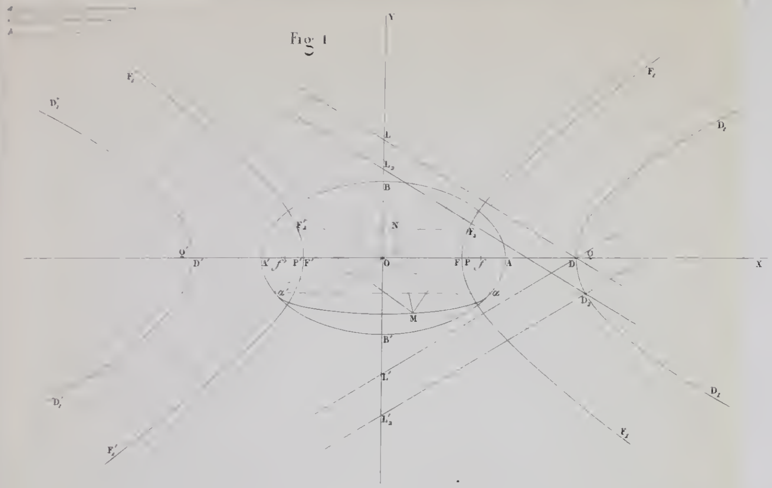


Fig 2.

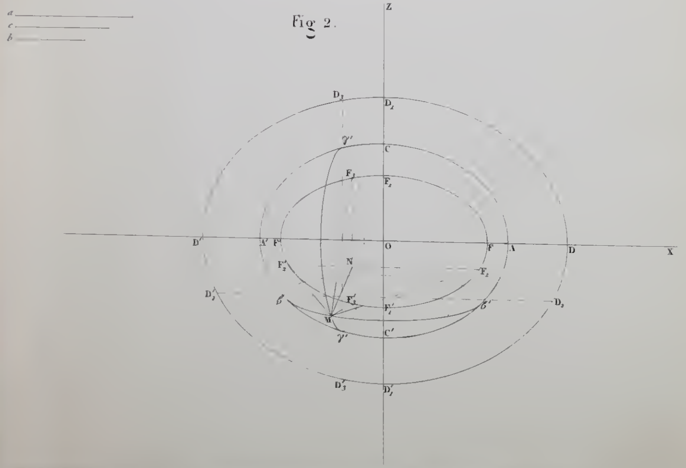


Fig. 3.

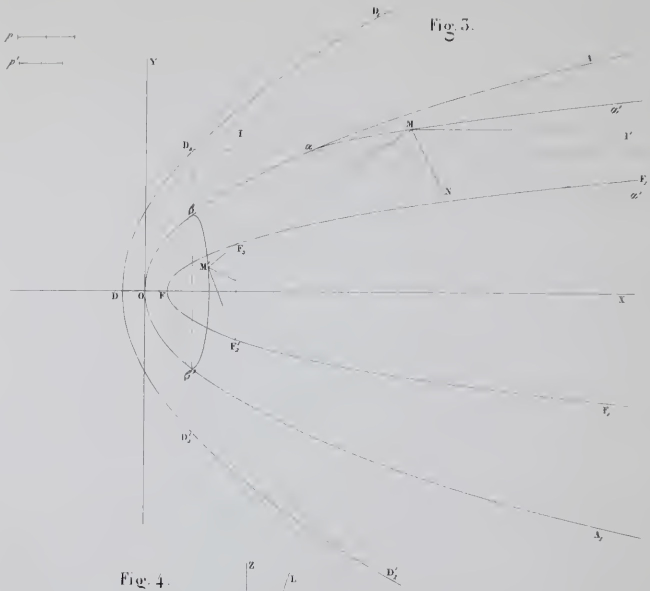
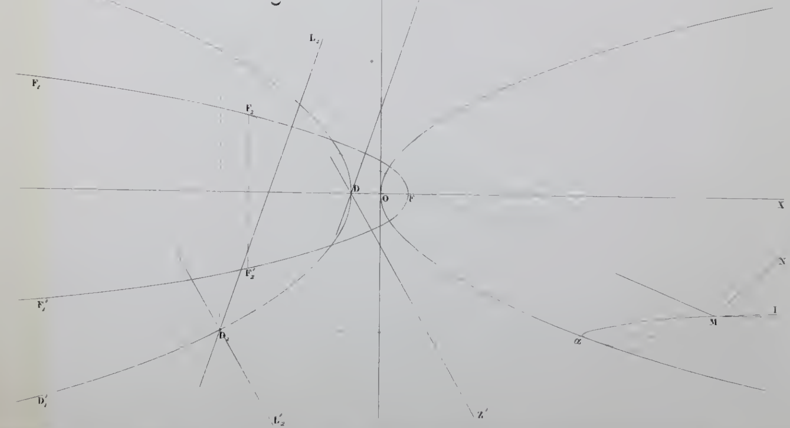


Fig. 4.



Démonstration d'un théorème de géométrie

par M. J. Bertrand

Fig 1

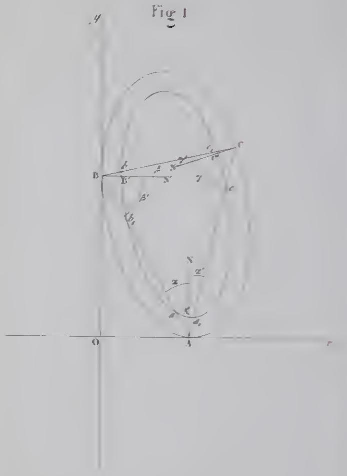
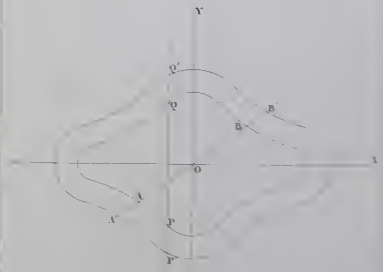


Fig 2.



Journal de mathématiques
pures et appliquées